

УДК 629.341

DOI: 10.30977/BUL.2219-5548.2021.95.0.165

ІМПУЛЬСНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ТРИКУТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ

Янютін Є. Г.¹, Шарапата А. С.¹

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Анотація. В цій статті розглядаються імпульсні впливи різних навантажень на трикутні, рівнобедрені, пружні, ізотропні пластини. Дослідження проводяться з використанням класичної теорії пластин. Наведено аналітичний розв'язок прямої задачі з визначення внутрішніх моментів і прогинів пластини, а також числові дані розрахунку конкретного випадку навантаження.

Ключові слова: трикутні пластини, класична теорія пластин, метод Нав'є, перетворення Лапласа, коливання, пряма задача.

Вступ

Наразі розв'язок прямих задач механіки деформованого твердого тіла не втрачає актуальності й має велике значення для моделювання, розрахунку напружено-деформованого стану елементів конструкцій і використання у подальших розв'язках задач ідентифікації та управління.

Аналіз публікацій

Теорія коливань трикутних пластин, що наведена, базується на підходах, які були викладені в монографіях [1, 2] і в наш час визнані класичними в галузі динаміки та міцності елементів конструкцій машин, приладів, апаратури і в галузі коливань систем із розподіленими параметрами.

В основу теорії нестационарних коливань трикутних пластин закладається ідея про можливість симетрії законів коливань у пластинках квадратної у плані форми.

Мета і постановка задачі

Метою є розробка способу розв'язання прямої задачі коливання трикутних пластин.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати диференціальне рівняння, яке аналітично описує коливання трикутних пластин.

Виклад основного матеріалу

Диференціальне рівняння нестационарних коливань навантаженої тонкої пластини в декартовій системі координат записується таким чином [3]

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, y, t), \quad (1)$$

де $w(x, y, t)$ – відхилення точок серединної площини пластини від горизонтальної площини $z=0$; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$; E, ν, ρ – пружні постійні Ляме матеріалу пластини і його щільність; h – товщина пластини, яка передбачається постійною; $F(x, y, t)$ – функція трьох змінних, яка визначає нормальне навантаження, що впливає на пластину. Передбачається, що це навантаження прикладене нормально до серединної площини пластини.

Пластину, що має форму рівнобедреного прямокутного трикутника з вільно обпертими краями, можна розглядати як половину, яка зображена на рис. 1 штриховою лінією, квадратної пластини. Якщо в точці A з координатами ξ і η прикласти зосереджене навантаження $+P(t)$, а в точці A' , яка є дзеркальним відображенням точки A відносно діагоналі BC квадрата, прикласти фіктивне навантаження $-P(t)$, то очевидно, ці два навантаження викличуть такі деформації квадратної пластини, що діагональ BC займе положення вузлової лінії [2]. Рис. 1 по суті відтворює рис. 161, наведений в роботі [2].

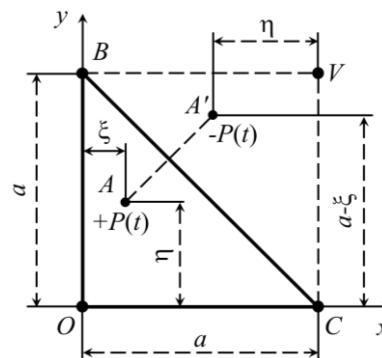


Рис. 1. Схема навантаження квадратної пластини

Диференціальне рівняння (1) краще переписати у вигляді

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = F(x, y, \tau), \quad (2)$$

де введена нова часова змінна, така, що $\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$. Неважко побачити, що величини t і τ пов'язані співвідношенням $\tau = t / \sqrt{\rho h}$.

Для розв'язання рівняння (2) для квадратної пластини з вільно обпертим контуром будемо використовувати метод, запропонований Нав'є, опис якого, наприклад, наведено в [2].

Розв'язання рівняння (2) будемо виконувати в поєднанні із застосуванням перетворення Лапласа у часі $w^L(x, y, s) = L(w(x, y, \tau))$.

Якщо скористатися результатами монографії [2], то спочатку необхідно розвинути функцію $F^L(x, y, s)$ в наступний ряд:

$$F^L(x, y, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^L(s) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3)$$

Оскільки в нашому випадку $a=b$ (пластина є квадратною), то

$$F^L(x, y, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^L(s) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (4)$$

Коефіцієнти $a_{mn}^L(s)$ (3) знаходяться за формулами

$$\iint_{0,0}^{a,a} F^L(x, y, s) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} dx dy = \frac{a^2}{4} a_{mn}^L(s). \quad (5)$$

Якщо прийняти початкові умови нульовими $\left(w(x, y, 0) = 0; \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial \tau} = 0 \right)$, то рівняння (2) у просторі зображень за Лапласом можна записати у формі

$$D \left(\frac{\partial^4 w^L}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w^L}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w^L}{\partial y^4} \right) + s^2 w^L = F^L(x, y, s). \quad (6)$$

Вигляд розв'язання рівняння (6) для квадратної пластини подається подвійним рядом

$$w^L(x, y, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}^L(s) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}. \quad (7)$$

Зауважимо, що вид шуканої функції у формі розвинення (7) забезпечує відповідність граничним умовам вільного обпирання квадратної пластини уздовж чотирьох її сторін ($x=0, y=0, x=a, y=a$).

Здійснимо підстановку розвинення (7) в рівняння (6). Використовуємо також розвинення (6) і властивість ортогональності функцій $\sin \frac{m\pi x}{a}$ і $\sin \frac{n\pi y}{a}$ на інтервалі $(0, a)$. Після виконання нескладних операцій з рівняння (6) буде впливати така формула для величини $w_{mn}^L(s)$:

$$w_{mn}^L(s) = \frac{a_{mn}^L(s)}{C_{mn}^2 + s^2}, \quad (8)$$

де $C_{mn}^2 = \pi^4 D a^{-4} (m^2 + n^2)^2$.

Значимо, що $C_{mn} = C_{nm}$.

Оригінал функції (8) знаходиться елементарно

$$w_{mn}(\tau) = \frac{1}{C_{mn}} \int_0^{\tau} a_{mn}(\tau) \sin C_{mn}(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (9)$$

На розглянуту квадратну пластину, яка по суті складається з двох трикутних пластин, впливають два зосереджених навантаження $+P(\tau)$ і $-P(\tau)$, причому їх точки прикладання симетрично розташовані відносно прямої $x + y = a$. Таким чином

$$F(x, y, \tau) = P(\tau) \delta(x - \xi) \delta(y - \eta) - P(\tau) \delta(x - a + \eta) \delta(y - a + \xi). \quad (10)$$

У формулі (10) функція $P(\tau)$ визначає змінну зосереджених навантажень у залежності від часової змінної τ .

Співвідношення (5) записується у просторі оригіналів

$$a_{mn}(\tau) = \frac{4}{a^2} \int_0^a \int_0^a F(x, y, \tau) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} dx dy. \quad (11)$$

Якщо здійснити підстановку виразу (10) в рівняння (11), то отримаємо такий вираз

$$a_{mn}(\tau) = \frac{4P(\tau)}{a^2} \left(\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{a} - \sin \frac{m\pi(a-\eta)}{a} \sin \frac{n\pi(a-\xi)}{a} \right). \quad (12)$$

Функція, що визначає нормальне переміщення трикутної пластини в довільній точці x, y , виходить такою

$$w(x, y, \tau) = \frac{4}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{C_{mn}} \times \int_0^{\tau} P(\tau_1) \sin C_{mn}(\tau - \tau_1) d\tau_1 \times \left(\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{a} - \sin \frac{m\pi(a-\eta)}{a} \sin \frac{n\pi(a-\xi)}{a} \right) \times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (13)$$

Вираз (13) можна змінити до наступного вигляду, якщо зробити елементарні тригонометричні перетворення,

$$w(x, y, \tau) = \frac{4}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \times \left(\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{a} - (-1)^{m+n} \sin \frac{m\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a} \right) \times \frac{1}{C_{mn}} \int_0^{\tau} P(\tau_1) \sin C_{mn}(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (14)$$

Якщо в якості функції $P(\tau_1)$ в (14) покласти $P(\tau_1) = H_0 H(\tau_1)$, то впливе така наступна формула

$$w(x, y, \tau) = \frac{4H_0}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a} \times \left(\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{a} - (-1)^{m+n} \sin \frac{m\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a} \right) \frac{(1 - \cos(C_{mn}\tau))}{C_{mn}^2}.$$

Необхідно перевірити, чи будуть задовольнятися граничні умови $w(x, y, \tau) = 0$ на третій стороні трикутника, яка збігається з відповідним відрізком прямої $x + y = a$. Для цього покладемо у формулі (14) $y = a - x$. В результаті отримаємо

$$w(x, a - x, \tau) = \frac{4}{a^2} \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \times \left((-1)^{n+1} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{a} - (-1)^{m+1} \sin \frac{m\pi\eta}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a} \right) \times \frac{1}{C_{mn}} \int_0^{\tau} P(\tau_1) \sin C_{mn}(\tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (15)$$

Покладемо в (15) $m = 1, n = 1$. Будемо мати у круглих дужках величину $\sin \frac{\pi\xi}{a} \sin \frac{\pi\eta}{a} - \sin \frac{\pi\eta}{a} \sin \frac{\pi\xi}{a} = 0$. Тобто перший член у нескінченній сумі (15) дорівнює нулю.

Покладемо в (15) $m = 2, n = 2$. Будемо мати у круглих дужках в (17) величину $\sin \frac{2\pi\xi}{a} \sin \frac{2\pi\eta}{a} - \sin \frac{2\pi\eta}{a} \sin \frac{2\pi\xi}{a} = 0$.

Отже член у подвійній сумі (15) для $m = 2, n = 2$ так само дорівнює нулю.

Визначимо величини, відповідні членам у подвійній сумі (15) з $m = 1, n = 2$ і $m = 2, n = 1$.

Для $m = 1, n = 2$ матимемо

$$\frac{4}{a^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \times \left(-\sin \frac{\pi\xi}{a} \sin \frac{2\pi\eta}{a} - \sin \frac{\pi\eta}{a} \sin \frac{2\pi\xi}{a} \right) \times \frac{1}{C_{12}} \int_0^{\tau} P(\tau_1) \sin C_{12}(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (16)$$

Для $m = 2, n = 1$ із (15) буде випливати

$$\frac{4}{a^2} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi x}{a} \times \left(\sin \frac{2\pi \xi}{a} \sin \frac{\pi \eta}{a} + \sin \frac{2\pi \eta}{a} \sin \frac{\pi \xi}{a} \right) \times \frac{1}{C_{21}} \int_0^{\tau} P(\tau_1) \sin C_{21}(\tau - \tau_1) d\tau_1. \quad (17)$$

Узагальнюючи вищенаведене, робимо висновок, що сума перших чотирьох членів у ряді (15) дорівнює нулю.

Послідовність таких операцій можна продовжити і дійти висновку, що уздовж відрізка прямої $x + y = a$, який відповідає третій стороні трикутника, виконується умова рівності нулю нормального переміщення.

У зв'язку з тим, що розглядається питання про деформацію пластини, необхідно дослідити другу граничну умову уздовж третьої сторони трикутника, яка відповідає рівності нулю згинального моменту M_n , де \vec{n} – одиничний нормальний вектор прямої $x + y = a$.

Рівняння цієї прямої в нормальній формі є таким $(x + y - a)/\pm\sqrt{2} = 0$. Тому одиничний нормальний вектор до третьої сторони розглянутої трикутної пластини записується так:

$$\vec{n} = \pm 0.5 \cdot \sqrt{2} \cdot \vec{i} \pm 0.5 \cdot \sqrt{2} \cdot \vec{j}, \quad (18)$$

де \vec{i}, \vec{j} – орти декартової системи координат.

Для визначеності будемо приймати, що $\vec{n} = 0.5 \cdot \sqrt{2} \cdot \vec{i} + 0.5 \cdot \sqrt{2} \cdot \vec{j}$.

Для криволінійного граничного контуру пластини в [2] наводиться такий вираз

$$M_n = M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha - 2M_{xy} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (19)$$

де $M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$;

$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$;

$M_{xy} = -M_{yx} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$; α – кут між

вектором \vec{n} і віссю абсцис. При цьому передбачається, що вектор \vec{n} розташований в точці, що знаходиться на криволінійному

контурі. У загальному випадку криволінійного контуру вектор \vec{n} може змінювати своє положення від «точки до точки». У нашому випадку прямолінійного контуру $\alpha = \pi/4$. Тому співвідношення (19) при $\alpha = \pi/4$ після підстановки виразів для моментів набуде форми

$$M_n = -\frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (20)$$

З формули (20) випливає, що

$$M_n = -\frac{D}{2} (1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{D}{2} (1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (21)$$

У формулу (21) необхідно спочатку підставити вираз (15) для перевірки виконання другої граничної умови. В результаті матимемо вираз для згинального моменту, який виникає в точці з координатами x, y квадратної пластини. Якщо ще врахувати, що нас цікавить зміна згинального моменту M_n уздовж границі трикутної пластини ($x + y = a$), то згаданий вираз для згинального моменту уздовж цієї граничної сторони можна звести до вигляду

$$M_n(x, a - x, \tau) = \frac{2D\pi^2}{a^4} \times \left[(1 + \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (m^2 + n^2) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} \times \times B_{mn}(\tau) + (1 - \nu) \times \times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m \cdot n \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} B_{mn}(\tau) \right], \quad (22)$$

де

$$B_{mn}(\tau) = - \left(\sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{a} (-1)^n - \sin \frac{m\pi \eta}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} (-1)^m \right) \times \frac{1}{C_{mm}} \int_0^{\tau} P(\tau_1) \sin C_{mm}(\tau_1) (\tau - \tau_1) d\tau_1.$$

Легко перекоонатися, що всі члени, що входять до розвинення в (22) з однаковими

значеннями m і n , дорівнюватимуть нулю. А всі члени типу d_{mn} і d_{nm} , де n і m мають різні значення, пов'язані співвідношеннями $d_{mn} = -d_{nm}$. Тому формула (22) визначає згинальний момент M_n на третій стороні трикутника як функцію з нульовими значеннями. Отже, друга гранична умова (силова) для випадку вільного обпирання третьої сторони трикутної пластини також виконується. Тобто побудова розв'язання (14) визначає нормальні коливання пластини у формі рівнобедреного прямокутного трикутника з вільним обпиранням її уздовж усіх сторін. При побудові розв'язання передбачається, що на пластину в деякій її точці з координатами ξ , η впливає нормальне зосереджене навантаження, залежність якого в часі визначається заданою функцією $P(\tau)$.

Відзначимо, що аналогічна задача була розглянута авторами статті [4] на основі теорії С. П. Тимошенко для пластин.

Наведемо приклад розрахунку коливань трикутної пластини згідно формули (14) у відповідності до класичної теорії.

Характеристики матеріалу пластин $E = 2,07 \cdot 10^{11}$ Па; $\nu = 0,3$; $\rho = 7880$ кг/м³. Параметри розмірів пластин: $h = 0,04$ м; $a = b = 4$ м. Величина сили $H_0 = 10^2$ Н. Точки, в яких обчислювалися переміщення, мали координати: (1,2 м; 1,2 м), (1,5 м; 1,5 м), (1,9 м; 1,9 м). Точка, в якій була прикладена сила, була задана такою (1,2 м, 1,2 м).

Поверхні на рисунках 2, а, б, в, г відображають епюри коливань квадратної пластини відповідно в моменти часу $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-5}$, $\tau_2 = 4 \cdot 10^{-5}$, $\tau_3 = 8 \cdot 10^{-5}$, $\tau_4 = 1,04 \cdot 10^{-4}$.

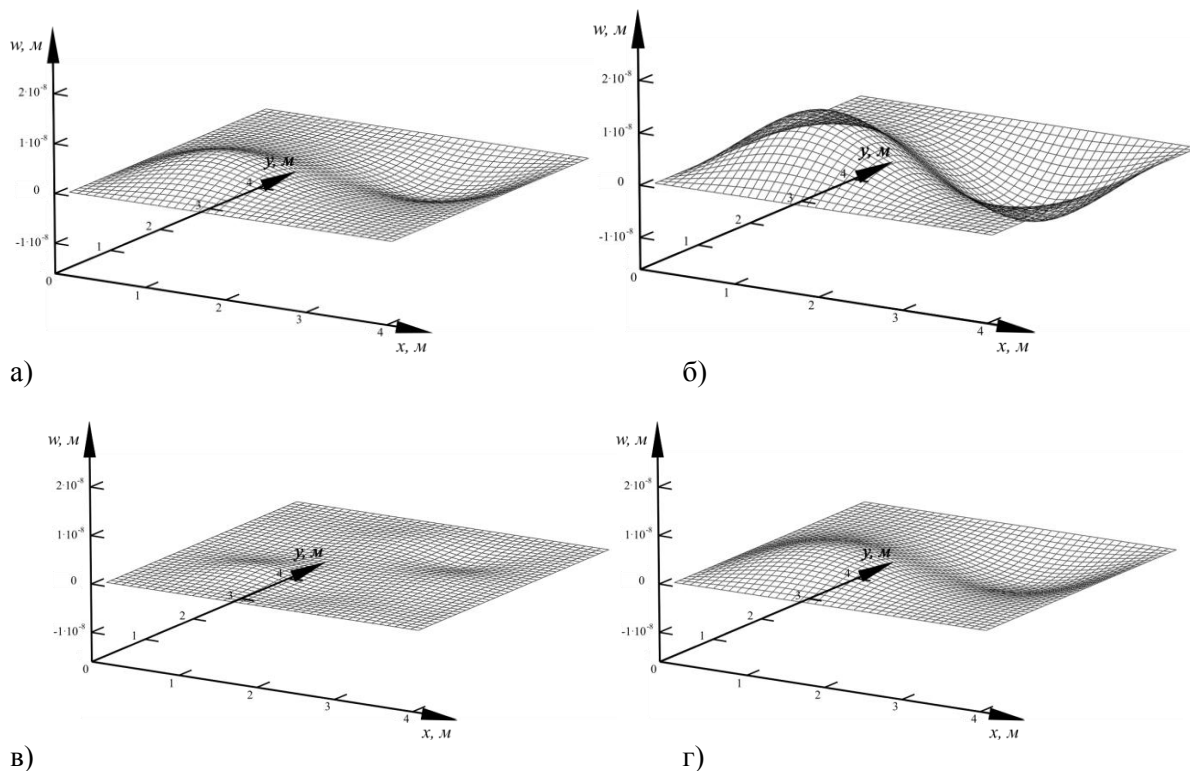


Рис. 2. Епюри переміщень

Висновки

Представлено методику розв'язання прямої задачі коливання пластини у формі рівнобедреного прямокутного трикутника. Для цього використано класичну теорію пластин, метод Нав'є і перетворення Лапласа. Отримано відповідні аналітичні залежності. Вони дозволяють моделювати нестационарні коливання пружної, ізотропної пластини з вільно обпертим трикутним контуром, визначати прогини у будь-якій точці пластини, а також

внутрішні моменти. Представлено числові розрахунки у вигляді епюр прогинів пластини в різні моменти часу конкретного випадку навантаження пластини зосередженим нестационарним навантаженням у заданій точці.

Література

1. Стретт Дж. В. (Лорд Реллей) Теория звука. Том 1. Гостехиздат. Москва, 1955. 504 с.
2. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 632 с.

3. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. Москва: Машиностроение, 1970. 734 с.
4. Янютин Е. Г., Воропай А. В., Егоров П. А. Нестационарные колебания мембран и пластин в форме прямоугольного равнобедренного треугольника. *Вісник НТУ «ХПИ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях.* №1 (1355), 2020. С. 125–133.

References

1. Strett Dzh. V. (Lord Relley) (1955). Teoriya zvuka [Sound theory]. *tom 1. Gosttekhizdat. Moskva, 1955. 504 p.* [in Russian].
2. Timoshenko S. P., Voynovskiy-Kriger S. (1966). Plastinki i obolochki [Plates and shells]. *Izd. Nauka. Moskva, 1966. 632 p.* [in Russian].
3. Filippov A. P. (1970). Kolebaniya deformiruyemykh sistem [Oscillations of deformable systems]. *Izd. "Mashinostroyeniye". Moskva, 1970. 734 p.* [in Russian].
4. Yanyutin Ye. G. Voropay A. V., Yegorov P. A. (2020) Nestatsionarnyye kolebaniya membran i pla-stin v forme pryamougol'nogo ravnobedrenno-go treugol'nika [Non-stationary vibrations of membranes and plates in the form of a right-angled isosceles triangle]. *Visnyk NTU «KHPi». Seriya: Matematychni modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh,* 2020, no. 1 (1355). pp. 125–133. [in Russian].

Янютін Євген Григорович¹, д.т.н., проф. каф. деталей машин і ТММ, e.yanyutin@gmail.com, тел. +38 095-906-87-67,

Шарпата Андрій Сергійович¹, к.т.н., доц. каф. деталей машин і ТММ, тел. +38 095-906-87-67, phd.sharapata@gmail.com,

¹Харківський національний автомобільно-дорожній університет, 61002, Україна, м. Харків, вул. Ярослава Мудрого, 25.

Impulse deformation of triangular plates based on the classical theory

Abstract. Problem. This article discusses the impulse effects of various loads on triangular, isosceles, elastic, isotropic plates. Analytical solutions of the direct problem of determining the internal moments and deflections of the plate, as well as the numerical results of calculations of specific loading case are presented. **Goal.** The goal is to develop a method for solving direct problems of determining internal moments and deflections in rectangular triangular, isosceles, elastic, thin, isotropic plates. **Methodology.** To solve the direct problem, the Navier method, the classical theory of modeling vibrations of thin plates and the Laplace transform are used. **Results.** A technique has been obtained that allows one to obtain numerical and analytical dependences for calculating the internal moments and deflections in a triangular plate. **Originality.** For the first time, a technique was developed for solving direct non-stationary problems to determine the internal moments and deflections in rectangular triangular, isosceles, elastic, thin, isotropic plates based on the classical theory. **Practical value.** The obtained analytical dependences can be used to simulate impulse vibrations of square and isosceles rectangular triangular thin isotropic elastic plates, which can be critical structural elements.

Key words: triangular plates, classical plate theory, Navier method, Laplace transform, direct task.

Yanyutin Yevgeniy Grigor'yevich¹, professor, Doct. of Science, MP and TMM Department, tel. +38 095-906-87-67, e.yanyutin@gmail.com,

Sharapata Andrey Sergeevich¹, Ph.D., Assoc. Prof. MP and TMM Department, +38 095-906-87-67, phd.sharapata@gmail.com

¹Kharkov National Automobile and Highway University, 25, Yaroslava Mudrogo str., Kharkiv, 61002, Ukraine.