

УДК 629.7.054

В.Н. МЕЛЬНИК, В.В. КАРАЧУН, Г.В. БОЙКО

Национальный технический университет Украины "КПИ", Киев, Украина

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДВУХ СОЕДИНЕННЫХ УПРУГОЙ СВЯЗЬЮ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ В АКУСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Формулируется задача Коши для механической системы из двух круговых коаксиальных цилиндров, наружный из которых имеет упруго-податливую поверхность, а внутренний абсолютно твердый и находится во взвешенном состоянии в разделяющей цилиндры жидкости.

Исходя из технической моментной теории построены уравнения наружной оболочки для двух ее координатных функций в рамках плоской задачи при нормальном падении волны акустического воздействия на поверхность наружного цилиндра. Установлена закономерность поступательного перемещения внутреннего цилиндра и степень влияния упругой связи и точки ее приложения на особенности движения цилиндра под действием звуковой волны. Воздействие передается внутреннему цилинду только через упругую связь.

Ключевые слова: оболочка, акустическое излучение, координатные функции, упругая связь.

Введение

Анализ проблемы и ее связь с научно-техническими задачами. Оборонное научное агентство *DARPA (USA)* приняло решение ускорить разработку гиперзвуковых летательных аппаратов в ходе программы *H*, которая призвана решить технические проблемы гиперзвукового полета.

Гиперзвуковой полет на скорости $20 M$ позволяет доставить полезный груз в течение одного часа в любую точку планеты.

Масштабные исследования гиперзвуковых технологий проводятся по пяти магистральным направлениям: *системы теплозащиты, аэродинамика, наведение, навигация и управление движением, оборудование и двигатели*. Конечной целью является доведение до пригодного к серийному производству уровня технологий гиперзвукового полета. Нужно отметить, что ни одно современное средство ПВО не способно поразить гиперзвуковой аппарат, летящий со скоростью $20 M$.

Гиперзвуковые ЛА на основе прямоточного воздушно-реактивного двигателя генерируют в пространство акустическое излучение высокого уровня не только на стартовых позициях, но также и при преодолении звукового барьера. Причем, ударная *N-волна* может превышать условия старта почти в десять раз и, таким образом, оказывать влияние не только на фюзеляж, но и практически на все комплектующие аппарата.

Обзор публикаций и выделение нерешенных проблем. Влияние упругости на колебания кон-

струкции в жидкости впервые анализировалось by *ld Rayleigh* (Джон Уильям Стретт) в 1883 г. [1] и Е. Николаи в 1909 году [2] при изучении колебаний бесконечных оболочек, а также by *H. Lamb* в 1920 году [3]. Анализ структуры звукового поля внутри оболочки, по обе стороны которой находятся, в общем случае, неодинаковые акустические среды, проводился Е.Шендеровым [4]. Изучение динамических свойств жесткого свободного от закреплений цилиндра выполнялось В.Новожиловым [5].

Нерешенными здесь остались вопросы анализа структуры возмущенного движения цилиндра, соединенного с наружной оболочкой линейно упругой связью, с учетом особенностей механической модели взаимодействия и специфики крепления подвижного цилиндра.

Постановка задачи данного исследования. Строится расчетная модель взаимодействия звуковой волны с системой «цилиндр в цилиндре» в рамках задачи Коши, когда точка приложения упругой связи очерчена дельта-функцией Дирака.

Изложение основного материала с обоснованием полученных научных результатов

Пусть, в момент времени $t = 0$ с упругой наружной оболочкой начинает взаимодействовать волна давления вида

$$P(r, \beta, t) \stackrel{\text{def}}{=} -P_0(r, \beta, t)R^2 \frac{1-\sigma^2}{Eh_0}, \quad (1)$$

где E - модуль упругости;
 σ - коэффициент Пуассона;

h_0 - толщина оболочки;

x, β - безразмерные координаты в долях радиуса R оболочки (рис. 1). Фронт волны параллелен боковой образующей цилиндра, а полный импульс давления предполагается конечным по величине.

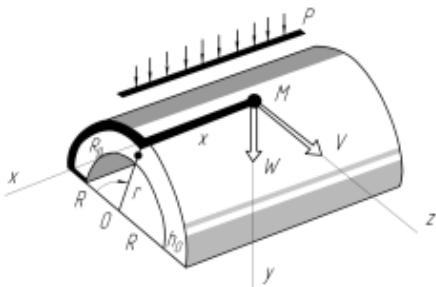


Рис.1 Координаты точки на поверхности наружной оболочки

Составляя уравнения наружной упругой оболочки, воспользуемся технической моментной теорией, в соответствии с которой при нормальном падении звука составляющие смещения тонкой оболочки вдоль продольной оси цилиндра будут равны нулю:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho V + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial \beta} &= 0; \\ \omega^2 \rho W + \frac{\partial V}{\partial \beta} + c^2 \Delta^2 \Delta^2 W + W + \\ + c_1 [W(x_0, \beta, t) - U(t)] \delta_1(x - x_0) &= \\ = -\frac{1-\sigma^2}{Eh_0} R^2 P_0(r, \beta, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Эти уравнения, как и более точные, обладают симметричной структурой, что согласуется с теоремой Бетти о взаимности работ.

Последнее слагаемое в левой части второго уравнения (2) введено для описания действия на оболочку упругой связи, на которой подведен внутренний цилиндр. Дельта-функция Дирака $\delta_1(x - x_0)$ позволяет указать точку приложения силы упругости, т.е. в точке x_0 . Сила упругости пропорциональна ее деформации – разности перемещений верхней $W(x_0, \beta, t)$ и нижней точки пружины $U(t)$. Положение произвольной точки M срединной поверхности радиуса R определяется координатами x и β , из которых x представляет собой величину, пропорциональную расстоянию до точки M вдоль образующей оболочки, а β – величину, пропорциональную расстоянию

до точки M по дуге поперечного круга (в плоскости шпангоута). В качестве коэффициента пропорциональности принят радиус R . Величины x и β представляют собой безразмерные координаты, из которых β будет, очевидно, измеряться центральным углом. Задача решается в линейном приближении.

С учетом принятых предположений, внутренний цилиндр можно считать перемещающимся поступательно в направлении волны давления. Уравнение его движения будет иметь вид

$$M \frac{d^2}{dt^2} [U(t) - W(x_0, \beta, t)] + c_1 [U(t) - W_0(x_0, \beta, t)] = P, \quad (3)$$

где M – масса внутреннего цилиндра;

$U(t)$ – перемещение цилиндра вдоль оси Oy .

Добавив к уравнению (3) следующие кинематические соотношения

$$U(0) - W(x_0, \beta, 0) = l = l(x_0, \beta);$$

$$\frac{d}{dt} [U(t) - W(x_0, \beta, t)] \Big|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

получаем задачу Коши для функции $[U(t) - W(x_0, \beta, t)]$. Решением уравнений (3), (4) будет функция –

$$U(t) - W(x_0, \beta, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c_1} f(x_0, \beta, t), \quad (5)$$

где $c_1 = c_1(x_0, \beta, t)$ – жесткость упругой связи;

$P = P(x_0, \beta, t)$ – возмущающее воздействие, заданное по величине. В простейшем случае это положительные константы.

С учетом соотношения (5), уравнениям (2) можно придать вид –

$$\omega^2 \rho V + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial \beta} = 0;$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho W + \frac{\partial V}{\partial \beta} + c^2 \Delta^2 \Delta^2 W + W = \\ = f(x_0, \beta, t) \delta_1(x - x_0) + P(r, \beta, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как внутренний цилиндр конечный по протяженности, то переменные будут изменяться в пределах – $0 < R_1 < r < R_2$; $0 \leq \beta \leq 2\pi$; $0 < x < h$.

В предположении, что толщина наружного цилиндра настолько мала, что производными решения по r можно пренебречь, бигармонический оператор приобретет вид –

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 &= \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \end{aligned} \quad (7)$$

и система уравнений (6) перепишется следующим образом —

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho V + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} + \frac{1-\sigma}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial W}{\partial \beta} &= 0; \\ \omega^2 \rho W + \frac{\partial V}{\partial \beta} + c^2 \left(\frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \beta^4} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 W}{\partial \beta^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) + W &= \\ &= f(x_0, \beta, t) \delta_1(x - x_0) + P(r, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, x_0, \beta, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Для цилиндра конечных размеров граничные условия для функций V и W формулируем для $x = 0$ и $x = h$, то есть:

$$\begin{aligned} V|_{x=0} = V|_{x=h} &= 0; \quad W|_{x=0} = W|_{x=h} = 0; \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}|_{x=h} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, задача (8), (9) оказывается двухточечной. Разложим правую часть второго из уравнений системы (8) в ряд Фурье в прямоугольнике

$$\Pi = \{(x, \beta)\} \mid 0 \leq x \leq h; \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi \}$$

по системе функций

$$\exp(im\beta) \sin \frac{n\pi x}{h}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad (11)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(x, x_0, \beta, t) &= f(x_0, \beta, t) \delta_1(x - x_0) + P(r, \beta, t) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} F_{mn}(x_0, t, r) \exp(im\beta) \sin \frac{n\pi x}{h}. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение системы (8), (9) ищем в виде рядов Фурье по функциям системы (11) в прямоугольнике (10):

$$\begin{aligned} V &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} V_{mn} \exp(im\beta) \cdot \sin \frac{n\pi x}{h}; \\ W &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} W_{mn} \exp(im\beta) \cdot \sin \frac{n\pi x}{h}. \end{aligned} \quad (13)$$

Ближайшей целью анализа является нахождение коэффициентов Фурье V_{mn} и W_{mn} , которые зависят от времени t , параметра x_0 и других величин.

Подстановка (12), (13) и (14) в систему уравнений (8) дает:

$$\left[\omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right] V_{mn} + im W_{mn} = 0; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} im V_{mn} + \{(\omega^2 \rho + 1) + c^2 \times \\ \times \left[\left(\frac{m}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{mn\pi}{rh} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^4 \right] \} W_{mn} = F_{mn}. \end{aligned} \quad (15)$$

Найдем:

$$V_{mn} = -im \frac{F_{mn}}{\Delta_{mn}};$$

$$W_{mn} = \left[\omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right] \frac{F_{mn}}{\Delta_{mn}};$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (16)$$

$$F_{mn} = \frac{1}{\pi h} \left\{ \left(\sin \frac{n\pi x_0}{h} \right) \int_0^{2\pi} f(x_0, \beta, t) \exp(-im\beta) d\beta + \right.$$

$$\left. + [1 - (-1)^n] \int_0^{2\pi} P(r, \beta) \exp(-im\beta) d\beta \right\}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{mn} = m^2 + \left[\omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ (\omega^2 \rho + 1) + c^2 \left[\left(\frac{m}{r} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Теперь можно перейти к выявлению закономерностей перемещения внутреннего цилиндра $U(t)$ в направлении оси Oy :

$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{c_1} f(x_0, \beta, t) + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} W_{mn}(x_0, t) \exp(im\beta) \cdot \sin \frac{n\pi x_0}{h}. \end{aligned} \quad (17)$$

Положим для конкретности $0 < c$, $P = \text{const}$. Тогда уравнение (3) при начальных условиях (4) даст:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1} f(x_0, \beta, t) &= U(t) - W(x_0, \beta, t) = \\ &= \frac{1}{c_1} P + \left(1 - \frac{1}{c_1} P \right) \cos \left(\sqrt{\frac{c_1}{M}} t \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из геометрических соображений следует, что

$1 > 0$, а $2 \frac{1}{c_1} p > 0$, поэтому после подстановки

(18) в (17) получаем:

$$U(t) = \left\{ \frac{p}{c_1} + \left(1 - \frac{p}{c_1}\right) \cos \left(\sqrt{\frac{c_1}{M}} t \right) \right\} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} W_{mn}(x_0, t) \exp(im\beta) \cdot \sin \frac{n\pi x_0}{h}. \quad (19)$$

Первое слагаемое здесь описывает перемещение внутреннего цилиндра при абсолютно твердой наружной оболочке; в совокупности со вторым – перемещение внутреннего цилиндра под действием внешнего возмущающего воздействия в случае упруго-податливой наружной оболочки.

Если бы $\frac{P}{M} = g(x_0, \beta, t)$, то решение задачи Коши (3), (4) имело бы вид –

$$\frac{1}{c_1} f(x_0, \beta, t) = U(t) - W(x_0, \beta, t) = \\ = l \cos \left(\sqrt{\frac{c_1}{M}} t \right) + \sqrt{\frac{M}{c_1}} \int_0^t g(x_0, \beta, \tau) \sin \left(\sqrt{\frac{c_1}{M}} t - \tau \right) d\tau, \quad (20)$$

а закон движения внутреннего цилиндра определялся бы выражением –

$$U(t) = \\ + \left\{ l \cos \left(\sqrt{\frac{c_1}{M}} t \right) + \sqrt{\frac{M}{c_1}} \int_0^t g(x_0, \beta, \tau) \sin \left(\sqrt{\frac{c_1}{M}} t - \tau \right) d\tau \right\} + \\ + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2}{m^2 + \left[\omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\sigma}{2} \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right] N} \cdot \frac{1}{\pi h} \times \\ \times \left\{ \left(\sin \frac{n\pi x_0}{h} \right) \int_0^{2\pi} f(x_0, \beta, t) \exp(-im\beta) dt + [l - (-1)^n] \right\} \times \\ \times \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m J_m(kr) [\exp(im\beta) + \exp(-im\beta)] dt \right\} \times \\ \times \exp(im\beta) \cdot \sin \frac{n\pi x_0}{h}, \quad (21)$$

$$\text{где } N = (\omega^2 \rho + 1) + c^2 \left[\left(\frac{m}{r} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \right]^2;$$

$$P(r, \beta) = P_0 \exp(ikr \cos \beta) =$$

$$= P_0 \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m J_m(kr) \cos m\beta$$

k – волновое число.

Выводы и перспективы дальнейших исследований в данном направлении

Построенный аналитический аппарат позволяет проводить качественный и количественный анализ возмущенного движения системы двух цилиндров под действием звуковой волны для различных условий внешнего воздействия, акустических свойств пространства, структурной, тепловой и др. неоднородностей.

Углубление содержательной части расчетной модели в дальнейших исследованиях позволит раскрыть не только нюансы явления, но и установить локальные особенности резонансного типа, в том числе явление антрезонанса.

Проникающее через ГАО и элементы фюзеляжа акустическое излучение попадает в приборный отсек РН. Характер и степень акустического влияния, равно как и выбор механической расчетной модели возмущенного движения, находятся в прямой зависимости от соотношения габаритов изделия и половины длины звуковой волны. В том случае, когда эта величина в пределах единицы, тогда акустическая нагрузка приравнивается к равномерно распределенной, а расчетная модель – к твердому телу на упругих связях. Если же габаритный размер в несколько раз превышает половину длины, тогда внешнее воздействие рассматривается как волновое, а вся конструкция – как система с распределенными параметрами.

Понятие «шум» не накладывает ограничений на характер и структуру спектра колебаний. Это могут быть не только периодические колебания, называемые звуковыми, но также и случайные или нестационарные процессы.

Наличие пиков в спектре прошедшей волны говорит о преобладающем присутствии частот прошедшего внутрь звукового излучения (либо полосы). Для шумогашения могут быть использованы пористые конструкции: перфорированный с косыми прорезями, а также перфорированный с продольными прорезями экраны.

Проведенные вычисления, а также анализ и описание механизма упругого взаимодействия подвеса поплавкового двухступенчатого гироскопа как многофазной механической структуры с внешними возмущающими воздействиями, позволяет сделать следующие выводы и сформулировать рекомендации для дальнейшего использования полученных результатов при определении погрешностей гироскопа в натурных условиях:

- системный анализ погрешностей двухстепенного поплавкового гироскопа невозможен без учета дифракции прошедших внутрь звуковых полей на его подвесе. Решение такой задачи предполагает необходимым представление подвижной части прибора в виде системы с распределенными параметрами, аналитически описываемой дифференциальными уравнениями, отображающими природу упругого взаимодействия поверхности с внешними возмущающими факторами волнового характера;

- построение расчетных механических моделей следует проводить для самого общего случая реализации геометрии поплавка – в виде оболочки вращения произвольного очертания. Как производные отсюда должны пристекать математические модели других технических решений – выпуклые, вогнутые оболочки, классический цилиндр, что предоставит возможность обоснованного решения проблемы оптимизации конструкции с точки зрения минимума погрешности измерений. Такой подход оправдан и в том смысле, что изначально для всех расчетных моделей формирует одинаковый механизм проявления изучаемых явлений, с одной стороны, и пренебрежение второстепенными – с другой. Это послужит в дальнейшем незыблемым фундаментом достоверности со-поставительного анализа;

- принятая универсальность математического описания механической модели как оболочки вращения расширяет возможности учета многих факторов, влияющих на его свойства, а также установления степени правомочности тех или иных допущений и упрощений при анализе погрешностей прибора в целом.

Литература

1. Rayleigh. On the vibrations of a cylindrical vessel containing Ligind.– Philos. Mag., 1883. XV.
2. Николай Е.И. О колебаниях тонкостенных цилиндров [Текст]/Е.И. Николай // Журн. Русск.физ.-хим.общ.-ва.– 1909, Т. X1, отдел.1.
3. Lamb H.O. On the vibration of an elastic plate in contact with water [text] / H.O.Lamb // Proc. Roy. Soc. Of London, sre.A, – 1920, vol. 98. - р. 690.
4. Шендеров Е.Л. Прохождение звуковой волны через упругую цилиндрическую оболочку [Текст]/ Е.Л. Шендеров // Акустич. журн.– 1963.– 9.– Вып.2.– С.47-49.
5. Новожилов В.В. О перемещении абсолютно твердого тела под действием акустической волны давления [Текст]/ В.В.Новожилов // Прикл. матем. и мех.– 1959.– Т. XXIII. 4.– С.794-797.

Поступила в редакцию 01.06.2013

В.М. Мельник, В.В. Каракун, Г.В. Бойко. Задача Коши для двух з'єднаних пружною в'яззю коаксіальних циліндрів в акустичному середовищі

Формулюється задача Коши для механічної системи з двох ковових коаксіальних циліндрів, зовнішній з яких має пружно-податливу поверхню, а внутрішній абсолютно твердий і знаходитьться у зваженому стані в рідині, яка знаходитьться між циліндрами. Виходячи з технічної моментної теорії побудовані рівняння зовнішньої оболонки для двох її координатних функцій в рамках плоскої задачі за нормальному падіння хвилі акустичного впливу на поверхню зовнішнього цилінду. Встановлена закономірність поступального руху і ступінь діяння пружної в'язі і точки її прикладення на особливості руху циліндра під дією звукової хвилі. Вплив передається внутрішньому цилінду крізь пружну в'язь.

Ключові слова: оболонка, акустичне випромінювання, координатні функції, пружна в'язь.

V.N. Mel'nick, V.V. Karachun, G.V. Boiko. Cauchy's task for two coaxial cylinders connected by elastic communication in the acoustic environment

Cauchy's task for mechanical system from two circular coaxial cylinders is formulated, external from which has an elastic and pliable surface, and internal absolutely firm and is in a suspension in liquid dividing cylinders. Proceeding from the technical moment theory the equations of an external cover for its two coordinate functions within a flat task are constructed at normal falling of a wave of acoustic impact on a surface of the external cylinder. Consistent pattern of forward movement of the internal cylinder and extent of influence of elastic communication and point of its appendix on feature of movement of the cylinder under the influence of a sound wave is determined. Influence is transmitted to the internal cylinder only through elastic communication.

Key words: cover, acoustic radiation, coordinate functions, elastic communication.