УДК 539.3

А.В. ПЛАЩИНСКАЯ

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

РОСТ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН В ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОДНООСНОМ АСИММЕТРИЧНОМ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Рассматривается задача о росте усталостной трещины, выходящей из концентратора напряжений, в тонкой пластине конечных размеров при одноосном многоцикловом асимметричном нагружении. В качестве концентратора напряжений рассматривается эллиптическое отверстие. Численно-аналитическое решение задачи получено на основе феноменологической двустадийной модели роста усталостной трещины и критерия эквивалентных напряжений, сводящего асимметричный цикл нагружения к эквивалентному по времени разрушения симметричному циклу. Результаты расчета по модели для алюминиевых пластин удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

***Ключевые слова**: усталостная трещина, асимметричный цикл нагружения, пластины конечных размеров, эллиптическое отверстие, одноосное растяжение-сжатие, поврежденность, пластическая зона.*

Введение

Исследования в области прогнозирования долговечности конструкций, подверженных сложному комплексу статических и циклических нагрузок, связаны с определением кинетики усталостного разрушения. Многие элементы конструкций в турбомашиностроении, судостроении, авиации, например, обшивка несущих плоскостей, обшивка фюзеляжа, элементы горячей части турбодвигателей представляют собой тонкие пластины с различного вида отверстиями, выемками, надрезами, которые являются «инициаторами» усталостного разрушения. Таким образом решение задач усталостного разрушения пластин с концентраторами напряжений с учетом асимметрии цикла нагружения представляет практический и теоретический интерес.

Решение проблемы экспериментальным путем связано с проведением сложных, экспериментов, дорогостоящих натурных испытаний и получения на их основе эмпирических зависимостей.

Настоящая работа является развитием теоретического подхода [1,2], основанного на совместном рассмотрении концепций механики разрушения и механики непрерывной поврежденности. На основе феноменологической двухстадийной модели роста усталостной трещины получено численно-аналитическое решение задачи о распространении усталостной трещины в пластинах конечных размеров с центральным эллиптическим отверстием и как частным случаем - круговым отверстием, при асимметричном одноосном растяжении-сжатии.

1. Постановка задачи

Рассматривается тонкая пластина (рис.1)

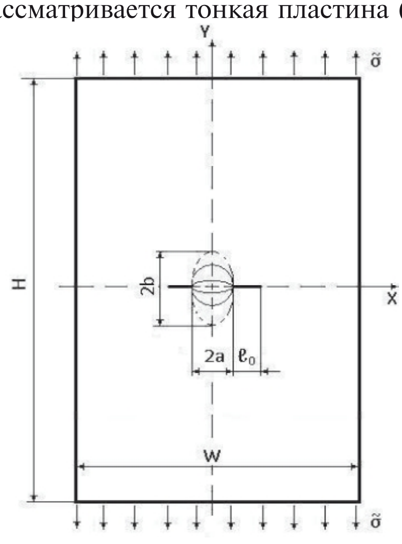


Рис.1.Схема нагружения пластины

длиной H , шириной W , ослабленная центральным эллиптическим отверстием с полуосями a , b и двумя симметрично расположенными трещинами начальной длины ℓ_0 , выходящими из контура отверстия. Берега трещины и контур отверстия свободны от нагрузки. Пластина находится под действием одноосной циклической нагрузки, вызывающей номинальные циклические напряжения $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a g(n) , \qquad (1)$$

© А.В. Плащинская, 2013

где σ_m и σ_a – среднее и амплитудное напряжения цикла;

$g(\cdot)$ – известная периодическая функция числа циклов нагружения n ($n = ft$);

t – физическое время;

f – частота нагружения.

Задача заключается в определении функциональной зависимости между переменными, характеризующими кинетику роста трещины, параметрами нагружения, набором коэффициентов и материальных констант $C_i\ (i = 1,k)$ вида

$$\ell = F_2(\sigma_a, \sigma_m, n, a, b, h, W, C_i), \qquad (2)$$

при одноосном асимметричном циклическом растяжении-сжатии.

Усталостную трещину рассматриваем как узкую щель, у вершины которой под действием циклического нагружения формируется тонкая концевая зона, где сосредоточены все неупругие эффекты, напряжения в которой ограничены пределом текучести материала $[-\sigma_Y, \sigma_Y]$. При этом весь основной массив пластины деформируется линейно-упруго.

Решение задачи состоит в совместном решении краевой задачи теории упругости с подвижной границей при плоском напряженном состоянии и эволюционного уравнения накопления усталостных повреждений.

Напряженное состояние пластины в произвольный момент времени n, согласно принципу подобия, определяется из тех же соотношений, что и при статическом нагружении. Таким образом, система разрешающих уравнений включает:

1. Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}(n)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(n)}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}(n)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}(n)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

2. Уравнения совместности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x(n) + \sigma_y(n)) = 0 \qquad (4)$$

3. Граничные условия для пластины, представленной на (рис. 1), имеют вид

$$\sigma_{xx}(n)\cdot\cos(\nu, x) = 0, \quad x = \pm\frac{W}{2} \quad -\frac{H}{2} \le y \le \frac{H}{2}$$

$$\sigma_{yy}(n)\cdot\cos(\nu, y) = \begin{cases} \pm\tilde{\sigma}, & y = \pm\frac{H}{2}; \quad -\frac{W}{2} \le x \le \frac{W}{2} \\ 0 \quad y = 0 & \begin{cases} -d_0 \le x \le d_0 & 0 \le n \le n_* \\ -d(n) \le x \le d(n) & n \succ n_* \end{cases} \end{cases} \qquad (5)$$

где ν – нормаль к боковой поверхности, $d_0 = a + \ell_0$, $d(n) = a + \ell(n)$.

4. Критерий эквивалентных напряжений сводит асимметричное циклическое нагружение к эквивалентному по числу циклов разрушения $n = n_R$ симметричному циклическому нагружению [2]

$$\tilde{\sigma}_a = \sigma_a\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sigma_m}{2\sigma_B}\right)^2\right]^{-\eta}, \qquad (6)$$

где $\tilde{\sigma}_a$ – амплитудное напряжение эквивалентного симметричного цикла;

η – коэффициент чувствительности асимметрии цикла.

5. Соотношение для определения длины циклической пластической зоны по модифицированной модели Дагдейла при циклическом нагружении [3]

$$\lambda(d(n)) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\Delta Keff\left(\frac{H}{W}, \frac{b}{a}, \frac{d(n)}{W}\right)}{2\sigma_Y}\right)^2, \qquad (7)$$

где $\Delta Keff = K_{max}$ – эффективный коэффициент интенсивности напряжений при симметричном цикле нагружения.

6. Эволюционное уравнение накопления усталостных повреждений, описывающее процесс распространения усталостной трещины

$$\frac{\partial \omega(x,n)}{\partial n} = D\left[\frac{\Delta\sigma_{eqv}(x,n)}{1-\omega}\right]^q, \qquad (8)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \omega(x,0) = 0 \\ \omega(x, n_R) = 1 \end{cases}, \qquad (9)$$

где $\omega(x,n)$ – скалярная функция поврежденности, определяющая уровень повреждений в произвольной точке x в момент времени n;

$\Delta\sigma_{eqv}(x,n)$ – размах эквивалентного напряжения;

D и q – коэффициенты, определяющие сопротивление материала усталостному разрушению.

2. Распределение напряжений по фронту трещины

Напряженное состояние в окрестности вершины трещины вдоль оси OX определяется из решения системы уравнений (3)-(5). В качестве эквивалентного напряжения, согласно критерию максимальных напряжений, рассматриваем напряжение $\sigma_{yy}(x,n)$. В общем виде распределение напряжений вдоль фронта распространения трещины по оси $0X$ $(y=0)$ при $n \succ n_*$ можно записать следующим образом

$$\Delta\sigma_{yy}(x,n) = \begin{cases} 0 & |x| < d(n) \\ [-\sigma_Y, \sigma_Y] & |x| = d(n) + \lambda(d), \\ \frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{d(n)}{x - d(n)}} \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{b}{a}, \frac{d(n)}{W}\right) & |x| > d(n) + \lambda(d) \end{cases} \quad (10)$$

а в течение инкубационного периода $0 \le n \le n_*$ имеет вид (10) при $a(n) = a_0$. Здесь $\lambda(d_0)$ и $\lambda(d(n))$ – начальная и текущая длина тонкой циклической пластической зоны, которая формируется в вершине усталостной трещины за инкубационный период и на стадии роста трещины соответственно;

$f\left(\frac{H}{W}, \frac{b}{a}, \frac{d(n)}{W}\right)$ – корректирующая функция, учитывающая влияние граничных условий и построенная аппроксимацией множества численных решений для трещин дискретной длины $\ell_0 \le \ell \le \ell(n)$.

3. Определяющие уравнения модели роста усталостной трещины

Интегрируя уравнение (8) с учетом начальных условий (9), распределения напряжений у вершины трещины (10) и двухстадийности процесса усталостного разрушения получаем уравнение движения фронта разрушения в точке с координатой $x_* = d(n) + \lambda(d(n))$ в момент времени n

$$1 - (1+q)D\left(\frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{2}}\right)^q \times \int_0^{n_*} \left[\frac{d_0}{d(n) + \lambda(d(n)) - d_0}\right]^{\frac{q}{2}} \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{a}{b}, \frac{d_0}{W}\right) d\tau = (1+q)D\left(\frac{\tilde{\sigma}_a}{\sqrt{2}}\right)^q \times \int_{n_*}^{n} \left[\frac{d(\tau)}{d(n) + \lambda(d(n)) - d(\tau)}\right]^{\frac{q}{2}} \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{a}{b}, \frac{d(\tau)}{W}\right) d\tau. \quad (11)$$

Длительность инкубационного периода определим из (11) при условии $n = n_*$ в точке с координатой $x_* = d(0) + \lambda(d(0))$

Решая уравнение (11) с использованием преобразования Лапласа, получаем систему уравнений (12)

$$\begin{cases} \frac{d\ell}{dn} = \left(1 + \frac{1}{q}\right) D \frac{1}{[2\lambda(d(n))]^{\frac{q}{2}-1}} \cdot \left(\tilde{\sigma}_a \sqrt{d} \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{b}{a}, \frac{d(n)}{W}\right)\right)^q \\ n_* = \frac{1}{(1+q)D} \left[\frac{1}{\tilde{\sigma}_a}\right]^q \left[\frac{2\lambda(d_0)}{d_0}\right]^{\frac{q}{2}} \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{b}{a}, \frac{d_0}{W}\right)^{-q}, \end{cases} \quad (12)$$

где первое уравнение описывает стадию роста трещины, а второе – длительность инкубационного периода.

Длина циклической пластической зоны с учетом конечности размеров пластины и асимметрией цикла нагружения определяется из соотношения

$$\lambda(d(n)) = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi\tilde{\sigma}_a \cdot f\left(\frac{H}{W}, \frac{b}{a}, \frac{d(n)}{W}\right)}{2\sigma_Y} \right)^2 d(n) \quad (13)$$

4. Определение коэффициентов уравнений и материальных констант

Для решения задачи по соотношениям (12) необходимо определить σ_Y, σ_B, а также коэффициенты D, q и η.

Величины σ_Y, σ_B определяются по результатам стандартных испытаний гладких цилиндрических образцов на кратковременную прочность, непосредственно по диаграмме растяжения «$\sigma - \varepsilon$».

Коэффициенты D, q определяются из базовых экспериментов по усталостному разрушению гладких цилиндрических образцов в условиях симметричного растяжения-сжатия аппроксимацией экспериментальных данных уравнением

$$n_R = [(1+q)D(\sigma_a)^q]^{-1}, \quad (14)$$

где n_R – число циклов до разрушения гладкого цилиндрического образца.

Коэффициент η – характеризует чувствительность материала к асимметрии цикла нагружения и определяется из экспериментов на усталость гладких цилиндрических образцов в условиях растяжения-сжатия при различных степенях асимметрии цикла путем минимизации функционала

$$\Phi\left(\psi\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right), \eta\right) = \sum_{i=1}^{k} \left[\psi\left(\frac{\sigma_{m_i}}{\sigma_B}\right) - \left(\frac{\sigma_{a_i}}{\sigma_n}\right)\right]^2 = \min, \quad i = 1, k \quad (15)$$

где σ_{a_i} и σ_{m_i} – амплитудное и среднее напряжения i-того асимметричного цикла;

σ_n – предел усталости симметричного цикла нагружения соответствующие одинаковой долговечности n.

Представляя

$$\psi\left(\frac{\sigma_{m_i}}{\sigma_B}\right)=\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_{m_i}}{\sigma_B}\right)\right]^{\eta}, \qquad (16)$$

получим выражение для определения η в виде (17)

$$\eta=(\lg\sigma_{a_i}-\lg\sigma_n)\left\{\lg\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_{m_i}}{\sigma_B}\right)\right]\right\} \qquad (17)$$

Полученные из экспериментальных данных [4] значения коэффициентов для алюминиевых сплавов 2024-Т3 и 7075-Т6 сведены в табл.1.

Таблица 1 – Механические свойства и материальные константы алюминиевых сплавов 2024-Т3 и 7075-Т6

Сплав	σ_Y, МПа	σ_B, МПа	D, (МПа^q · цикл)$^{-1}$	q	η
2024-Т3	353	489	$7{,}45\cdot10^{-26}$	8,28	2.37
7075-Т6	523	571	$3{,}33\cdot10^{-29}$	9,23	3.57

5. Решение задач

Определим зависимость длины трещины ℓ от числа циклов нагружения n в пластинах из алюминиевых сплавов 2024-Т3 и 7075-Т6 (рис.1) шириной W = 0,305 м, длиной Н = 0,891 м с центральным эллиптическим отверстием с полуосями $a = 0{,}8\cdot10^{-3}$ м, $b=\delta\cdot a$ и двумя симметрично расположенными трещинами начальной полудлины $\ell_0 = 0{,}8\cdot10^{-3}$ м при многоцикловом асимметричном одноосном растяжении-сжатии.

Решение задачи сводится к интегрированию уравнения для скорости усталостной трещины в системе (16) с учетом (17)

$$\begin{cases} n=n_*+\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{q-2}\dfrac{\left[1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sigma_m}{2\sigma_B}\right)^2\right]^{2\eta}}{\left(1+\dfrac{1}{q}\right)D(\sigma_Y)^{q-2}}\times \\ \times\displaystyle\int_{a+\ell_0}^{a+\ell(n)}\frac{1}{\left(\tilde{\sigma}_a\cdot f\left(\dfrac{H}{W},\dfrac{b}{a},\dfrac{a+\ell}{W}\right)\right)^2\cdot(a+\ell)}d\ell \\ n_*=\dfrac{1}{(1+q)D\left[\dfrac{4\sigma_Y}{\pi}\right]^q} \end{cases} \qquad (18)$$

Выражение корректирующей функции, используемое при решении данной задачи, построенное на основе аппроксимации численного решения, представлено в работе [5] и имеет вид

$$F\left(\frac{b}{a},\frac{a}{W},\frac{a+\ell(n)}{W}\right)=\varphi\left(\frac{b}{a},\frac{a+\ell(n)}{W}\right)\psi\left(\frac{b}{a},\frac{a}{W},\frac{a+\ell(n)}{W}\right) \qquad (19)$$

с учетом обозначений

$\delta=b/a$, $\alpha=2(a+\ell(n))W$, $\gamma=2a/W$

$$\varphi(\delta,\alpha)=(\pi\sqrt{(\mathrm{tg}\alpha_0+g\sin2\alpha_0)/\alpha_0}\cdot \\ \cdot(1+\varepsilon^2(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)-\sqrt{1+2g})/(\pi-1) \qquad (20)$$

$$\psi(\delta,\gamma,\alpha)=h(3\beta^{2/3}-2\sqrt{h}\beta^{\rho}), \qquad (21)$$

$$g(\delta)=0{,}13[(2/\pi)\mathrm{arctg}\delta]^2 \qquad (22)$$

$$\varepsilon(\delta,\alpha)=\alpha(2/\pi)\mathrm{arctg}(0{,}6\sqrt[3]{\delta}), \qquad (23)$$

$$\rho(\delta,\gamma)=\ln\left(h^{-3/2}\right)/\ln[\gamma\delta/(\gamma(2\delta-1)+1)], \qquad (24)$$

$$h(\delta)=1+(2/\pi)\mathrm{arctg}(1{,}5\sqrt{\delta}), \qquad (25)$$

$$\alpha_0=\pi\alpha/2,\quad \beta=(\alpha-\gamma)(1-\gamma) \qquad (26)$$

Результаты расчета зависимости длины трещины с концентратором $2d(n)=2(a+\ell(n))$ по модели для пластин из алюминиевого сплава 2024-Т3 с эллиптическими отверстиями различного вида при $a=\mathrm{const}$ ($\delta=3$ (линия 1); $\delta=1$ (линия 2); $\delta=0{,}5$ (линия 3); $\delta=0{,}001$ (линия 4)) при напряжении $\sigma_{max}=138$МПа и отнулевом цикле нагружения ($R=0$) представлены на (рис.2) и сопоставлены с экспериментальными данными (о).

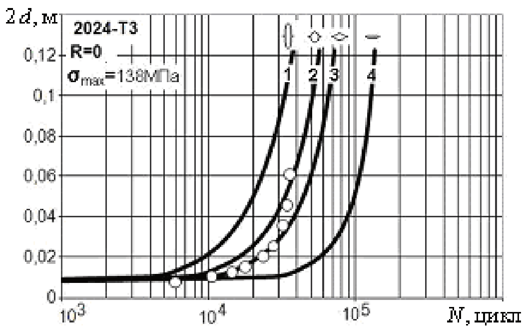
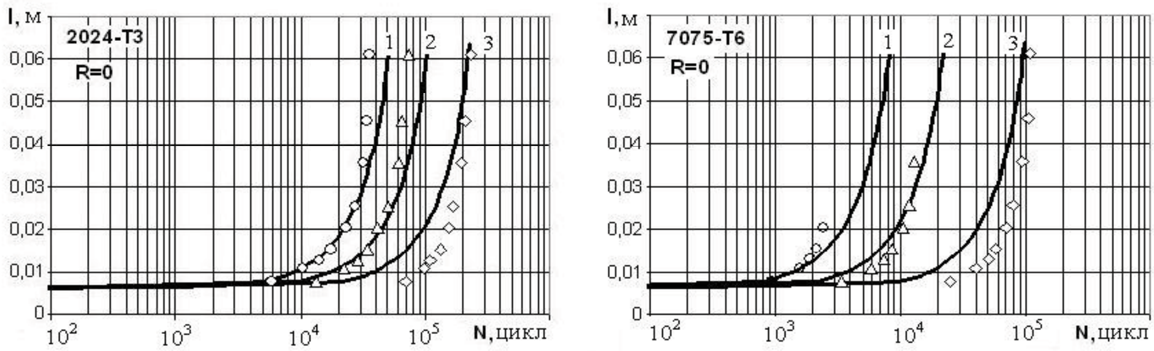


Рис. 2. Влияние формы отверстия на зависимость длины трещины от числа циклов нагружения при $a = \text{const}$ ($\delta = 3$ (линия 1), $\delta = 1$ (линия 2), $\delta = 0{,}5$ (линия 3), $\delta = 0{,}001$ (линия 4)), (▬) – расчет; (○) – эксперимент для кругового отверстия

Результаты расчета зависимости длины трещины ℓ от числа циклов нагружения для пластин с круговым отверстием $(a = b)$ из алюминиевых сплавов 2024-Т3 (σ_{max} =138 МПа (линия ▬ 1), 100 МПа (линия ▬ 2), 69 МПа (линия ▬ 3)) и 7075-Т6 (σ_{max} =207 МПа (линия ▬ 1), 138 МПа (линия ▬ 2), 69 МПа (линия ▬ 3)) представлены на (рис. 3а), (рис. 3б) соответственно и сопоставлены с экспериментальными данными (о, Δ, ◊) [6].

Результаты расчета попадают в 90% доверительные интервалы. Таким образом, получено удовлетворительное согласование – как качественное, так и количественное расчетных данных с экспериментальными.



а *б*

Рис. 3. Зависимость длины трещины от числа циклов нагружения в пластине с круговым отверстием ($R = 0$):
а) – алюминиевый сплав 2024-Т3 (σ_{max} = 138 МПа (1,○); σ_{max} = 100 МПа; (2, Δ); σ_{max} = 69 МПа (3, ◊);
б) –алюминиевый сплав 7075-Т6. (σ_{max} =207 МПа (1, ○); σ_{max} = 138 МПа; (2, Δ); σ_{max} = 69 МПа (3, ◊).

Заключение

На основе теоретической двухстадийной модели роста усталостной трещины с использованием критерия эквивалентности напряжений, сводящего асимметричное циклическое нагружение к эквивалентному по числу циклов нагружения получено численно-аналитическое решение задачи о росте усталостных трещин в тонких пластинах конечных размеров с центральным эллиптическим отверстием при одноосном асимметричном нагружении. Показано влияние формы концентратора напряжений, в зависимости от соотношений полуосей эллиптического отверстия, на кинетику роста усталостной трещины. Результаты расчетов зависимости длины трещин от числа циклов нагружения для пластины с круговым отверстием при различных уровнях приложенного нагружения удовлетворительно согласуются - как качественно, так и количественно с экспериментальными данными.

Литература

1. Голуб В.П. Феноменологическая модель роста усталостной трещины в идеально-пластических бесконечных пластинках при одноосном симметричном знакопеременном нагружении [Текст] /В.П. Голуб, А.В. Плащинская //Прикл. механика. – 2005. – Том 41 (51), №12. – С. 116-127.
2. Плащинская А.В. Кинетика роста усталостных трещин в тонких пластинах конечных размеров при асимметричном нагружении [Текст] /А.В.Плащинская //Вісник НТУУ КПІ Машинобудування. – 2010. – С. 189-194.
3. Newman J. C., Jr. FASTRAN-II – A fatigue crack growth structural analysis program [Text] /J.C.,Jr.Newman. – NASA-TM-104159, 1992. – 103 p.
4. Grover H.J. Axial-Load Fatigue Properties of 24S-T and 75S-T Aluminum Alloy as Determined in Several Laboratories [Text] / H.J. Grover, W.S. Hyler, P. Kuhn, C.B. Landers and F.M. Howell. – NACA TN-2928, 1953. – 64 p.

5. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами [Текст] /М.П.Саврук //Механика разрушения и прочность материалов. – Т. 2 //Киев: Наукова думка. – 1988. – 618 с.

6. Illg W. The rate of fatigue-crack propagation for two aluminum alloys [Text] /W.Illg, A.J., Jr.McEvily // NACA TN 4394, 1958. – 47 p.

Поступила в редакцию 06.06.2013

А.В. Плащинська. Розповсюдження тріщин втоми в тонких пластинах кінцевих розмірів з концентраторами напружень при одновісному асимметричному розтягу-стиску

Розглядається задача про розповсюдження тріщини втоми, що виходить з концентратора напружень, в тонкій пластині кінцевих розмірів при одновісному багатоцикловому асиметричному навантаженні. В якості концентратора напружень розглядається еліптичний отвір. Чисельно-аналітичне рішення задачі отримано на основі феноменологічної двустадийному моделі розповсюдження тріщини втоми і критерію еквівалентних напружень, що зводить асиметричний цикл навантаження до еквівалентного за часом руйнування симетричного циклу. Результати розрахунку за моделлю для алюмінієвих пластин задовільно узгоджуються з експериментальними даними.

Ключові слова: *тріщина втоми, асиметричний цикл навантаження, пластина кінцевих розмірів, еліптичний отвір, одновісний розтяг-стиск, пошкодження, пластична зона*

A.V. Plashchynska. Fatigue crack growth in a thin finite plate with a stress concentrator under uniaxial asymmetrical tension-compression

The problem of fatigue crack growth from a stress concentrator in thin finite plates under high-cyclic uniaxial asymmetrical loading is considered. As a stress concentrator is considered an elliptical hole. The numerical analytical solution is obtained on basis of fatigue crack growth two-stage theoretical model and equivalent stresses criterion reduced asymmetrical loading to equivalent symmetrical cyclic loading on rupture time . The calculation results using model agree well with those obtained by experiment.

Key words: *fatigue crack, asymmetrical loading cycle, thin finite plates, the elliptical hole , uniaxial tension-compression, damage, the plastic zone.*