

УДК 539.3

Канд. техн. наук С. А. Моргун

Национальный университет кораблестроения им. адм. Макарова, г. Николаев

ВЛИЯНИЕ ПОЛЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ НА ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ РАБОЧИХ ЛОПАТОК ТУРБОМАШИН

Изложена методика определения частот колебаний охлаждаемых рабочих лопаток турбомашин с учетом действия поля центробежных сил. С использованием метода конечных элементов разработана уточненная математическая модель колебаний лопатки. Приведены результаты расчета частот колебаний охлаждаемых лопаток турбины в зависимости от частоты вращения ротора для первой изгибной формы колебаний. Результаты расчетов частот также иллюстрируют влияние волновых чисел на частоты колебаний лопаток, находящихся в поле центробежных сил.

Ключевые слова: охлаждаемые лопатки, метод конечных элементов, частоты колебаний, поле центробежных сил, волновые числа, частота вращения ротора.

Введение

В современных условиях глобальной конкуренции для сбалансированного развития экономики и повышения конкурентной способности украинских товаров на рынках ВТО чрезвычайно важным является снижение затрат энергии на их производство [1, 2]. Не менее остро, в свете общемировой тенденции ограничения применения ядерной энергии из-за высоких экологических рисков, стоит задача увеличения выработки электроэнергии на украинских тепловых электростанциях для обеспечения энергетического баланса страны [3]. Этот процесс сопровождается увеличением единичной мощности турбоагрегатов при обязательном условии повышения их экономичности и надежности. Проблема обеспечения надёжности особенно важна для мощных турбин, причем ее важность с ростом единичной мощности возрастает, так как выход из строя даже одного турбоагрегата приводит к высоким капитальным затратам на ремонт, простоя оборудования и, как следствие, к большим экономическим потерям. Следует также, что наличие поля центробежных сил приводит к «раскрутке» пера лопатки и его удлинению, что, в свою очередь, может привести к перераспределению поля динамических напряжений в пере лопатки. Это соответственно, влечет к возникновению концентраторов напряжений не только в корневом, но и в периферийных сечениях пера [3, 5].

Поэтому учет влияния различных факторов, не приведенных в упрощенных математических моделях динамического поведения рабочих лопаток турбомашин, приобретает первостепенное значение.

Целью работы является создание уточненной математической модели, позволяющей учесть влияние поля центробежных сил на частоты колебаний рабочих лопаток турбомашин.

Изложение основного материала

При исследовании колебаний вращающихся лопаток необходимо учитывать поле центробежных сил, так как оно вызывает появление дополнительных напряжений и ведет к повышению частот колебаний лопаток. Наиболее существенно это влияние для изгибных колебаний. Кроме того, поле центробежных сил вызывает раскрутку закрученных лопаток и, следовательно, приводит к изменению формы их колебаний [2, 5].

Свободные колебания трехмерной модели рабочей лопатки с учетом центробежных сил описываются при помощи вариационного уравнения Остроградского-Гамильтона [2, 4]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\Pi - T - A_u) dt = 0, \quad (1)$$

где Π – потенциальная энергия деформации лопатки;

T – кинетическая энергия лопатки;

A_u – работа центробежных сил.

Предположим, что на вращающемся с угловой скоростью ω диске радиуса R установлена лопатка (рис. 1).

Лопатка с диском рассматриваются в прямоугольной правой системе координат X^1, X^2, X^3 . Ось X^3 направлена по радиусу от оси вращения, ось X^1 параллельна оси вращения.

Для формирования конечно-элементной модели рассматриваемой лопатки используется криволинейный суперпараметрический восьмиузловой конечный элемент. Функции формы для него приведены в работе [7]. В пределах выбранного конечного элемента выделим элементарный единичный объём ρdV . Вектор центробежных сил dF_u развиваемых массой ρdV выражается следующим

образом:

$$dF_u = \left\{ \begin{matrix} dF_{x^1} \\ dF_{x^2} \\ dF_{x^3} \end{matrix} \right\}, \quad (2)$$

где $x^1, x^2, x^3 = (x, y, z)$ – декартовы координаты элементарного объема dV .

$$\left\{ \begin{matrix} dF_{x^1} \\ dF_{x^2} \\ dF_{x^3} \end{matrix} \right\} - \text{вектор центробежных сил, развиваемых массой } \rho dV.$$

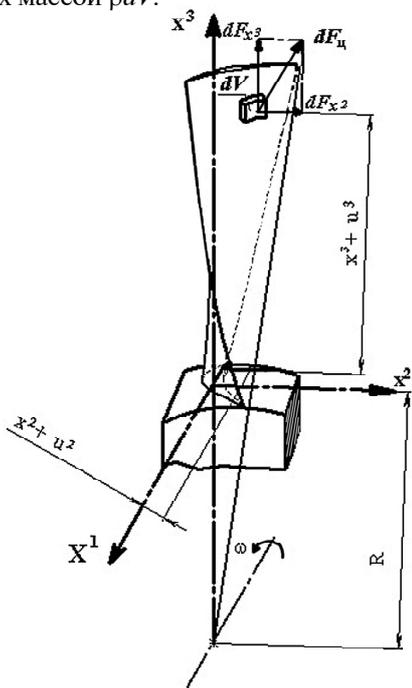


Рис. 1. Схема для учета влияния поля центробежных сил на жесткость лопатки

Запишем выражения для компонентов вектора центробежных сил элементарного единичного объема ρdV :

$$\begin{aligned} dF_{x^1} &= 0, \\ dF_{x^2} &= \rho\omega^2(x^2 + u^2) dV, \\ dF_{x^3} &= \rho\omega^2(R + x^3 + u^3) dV, \end{aligned} \quad (3)$$

где u^2 и u^3 – перемещения dV при колебаниях в направлении координатных осей x^2 и x^3 соответственно.

Перейдем к вычислению работы компонент вектора центробежных сил $dF_{x^1}, dF_{x^2}, dF_{x^3}$ на возможных перемещениях du^1, du^2, du^3 элементарного объема dV с учетом зависимостей (2, 3):

$$dA_{x^1} = 0,$$

$$dA_{x^2} = \int_0^{u^2} dF_{x^2} du^2,$$

$$dA_{x^3} = \int_0^{u^3} dF_{x^3} du^3. \quad (4)$$

Подставляя (3) в (4) получаем:

$$\begin{aligned} dA_{x^1} &= 0, \\ dA_{x^2} &= \int_0^{u^2} dF_{x^2} du^2 = -\rho\omega^2 \left(x^2 + \frac{u^2}{2} \right) u^2, \\ dA_{x^3} &= \int_0^{u^3} dF_{x^3} du^3 = \rho\omega^2 \left(R + x^3 + \frac{u^3}{2} \right) u^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Знак минус в выражении для вычисления dA_{x^2} используется для того, чтобы математически учесть факт уменьшения жесткости (размягчения) системы из-за наличия силы dF_{x^2} .

Тогда с учетом уравнений (5) работа компонент вектора центробежных сил $F_{x^1}, F_{x^2}, F_{x^3}$ на возможных перемещениях u^1, u^2, u^3 для всего конечного элемента выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{x^1} &= 0, \\ A_{x^2} &= \int_V dA_{x^2} dV, \\ A_{x^3} &= \int_V dA_{x^3} dV. \end{aligned} \quad (6)$$

Суммарная работа центробежных сил для всего элемента вычисляется так:

$$\begin{aligned} A_u &= A_{x^1} + A_{x^2} + A_{x^3} = \\ &= \rho\omega^2 \int_V \left[-x^2 u^2 + (R + x^3) u^3 \right] dV + \rho\omega^2 \int_V \left[-\frac{(u^2)^2}{2} + \frac{(u^3)^2}{2} \right] dV \end{aligned}$$

или в сокращенной форме:

$$A_u = \rho\omega^2 \int_V C_1 dV + \rho\omega^2 \int_V C_2 dV. \quad (7)$$

Величины C_1 и C_2 , входящие в уравнение (7), могут быть представлены следующим образом:

$$C_1 = p^k u^k; \quad C_2 = \frac{1}{2} q_{kl} u^k, \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (8)$$

где $(p^1, p^2, p^3) = (0, -x^2, R + x^3)$; q_{kl} – элементы матрицы Q :

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Компоненты перемещений u^k рассматриваемого конечного элемента выразим через компоненты перемещений его узлов δ_j [6]:

$$u^k = N_{kj} \delta_j, \quad (k = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

где N_{kj} – элементы матрицы N , содержащей функции формы рассматриваемого конечного элемента;

n – число степеней свободы конечного элемента.

В этом случае выражения (8) примут вид:

$$C_1 = p^k N_{kj} \delta_j; C_2 = \frac{1}{2} q_{kl} (N_{kj} \delta_j)(N_{lj} \delta_j), \quad (10)$$

Учитывая соотношения (10), подставим выражение (7) в уравнение Остроградского-Гамильтона (1). Получаем матрицу-вектор центробежных сил F_u (первое слагаемое в уравнении (7) и дополнительную матрицу жёсткости K_δ (второе слагаемое), образующуюся из-за наличия переменных составляющих вектора центробежных сил [5]. Матрица-вектор центробежных сил конечного элемента и ее компоненты приведены ниже:

$$F_u^e = \begin{Bmatrix} F_u^1 \\ F_u^2 \\ \dots \\ F_u^n \end{Bmatrix}, \quad F_u^i = \rho \omega^2 \int_V p^k N_{kj} dV$$

$$(i = 1, \dots, n; k = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Также приведем структуру дополнительной матрицы жесткости:

$$K_\delta^e = \begin{bmatrix} k_\delta^{11} & & & \\ & k_\delta^{22} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & k_\delta^{nn} \end{bmatrix}, \quad k_\delta^{ij} = \rho \omega^2 \int_V N_{kj} q_{kl} N_{lj}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, n; k, l = 1, 2, 3). \quad (12)$$

Рассмотрим методику учета поля центробежных сил при выводе уравнений движения рабочих лопаток на основе зависимостей (1–12):

1. При заданных граничных условиях (условия закрепления лопатки в диске) вычисляем обобщенные перемещения узлов лопатки δ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) в поле центробежных сил.

2. Для каждого конечного элемента e формируем матрицы инерции M^e , основную матрицу жесткости K_δ^e , а также матрицу центробежных сил F_u^e с использованием соотношений (2–7, 10, 11) и диагональную дополнительную матрицу жесткости K_δ^e (соотношения 8, 10, 12).

3. Матрица жесткости всего конечного элемента K^e будет вычисляться так:

$$K^e = K_\delta^e + K_u^e.$$

4. По правилам МКЭ формируем матрицы жёсткости K инерции M , а также векторы обобщенных координат δ и центробежных сил F_u для всей лопатки:

$$K = \sum K^e; \quad M = \sum M^e; \quad F_u = \{F_u^e\}; \quad \delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_m \end{Bmatrix}$$

$$(e = 1, \dots, m),$$

где m – число конечных элементов, на которые разбита модель лопатки.

5. С учетом глобальных матриц инерции (M), жесткости (K) и центробежных сил (F_u) вариационное уравнение Остроградского-Гамильтона (1) приводится к системе уравнений свободных колебаний конечно-элементной модели рабочей лопатки:

$$[M] \ddot{\delta} + [K] \delta - \{F_u\} = 0. \quad (13)$$

6. Частоты колебаний лопатки с учетом действия поля центробежных сил с учетом зависимости (14) вычисляются следующим образом:

$$\det[K] - f^2[M] = \{F_u\}. \quad (14)$$

Основные результаты и их анализ

Для подтверждения адекватности разработанной математической модели приведены результаты расчета частот собственных колебаний охлаждаемых лопаток турбины с учетом воздействия центробежной силы, полученные с использованием пакета прикладных программ ANSYS. Исследуемые турбинные лопатки имеют следующие характеристики: длина $l = 120$ мм; хорда профиля $b = 30,755$ мм; угол закрутки $\alpha = 51^\circ 31'$. Материал – жаропрочная сталь СМ88У-ВИ (плотность $\rho = 8100$ кг/м³, модуль Юнга $E = 1,693 \cdot 10^{11}$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$). В рассмотрение принимаются граничные условия типа $C - C$ (соответствуют наличию бандажной полки). Ниже на рис. 2, 3 приведены зависимости, отражающие влияние волновых чисел m и n на частоты колебаний лопатки с учетом и без учета воздействия центробежной силы.

Результаты расчета, приведенные на графиках 2 и 3, свидетельствуют о том, что для данного типа граничных условий, характерного для конструкции рабочих лопаток турбомашин, имеющих бандажную полку, частота колебаний возрастает с увеличением как волнового числа n , так и волнового числа m . Следует отметить, что влияние

волнового числа в окружном направлении (n) значительно выше, чем числа полуволн m . Объяснением этому служит то, что наличие в периферийном сечении лопатки бандажной полки призвано конструктивно обеспечить рассеивание потенциальной энергии деформации и, как следствие, снизить частоту колебаний лопатки.

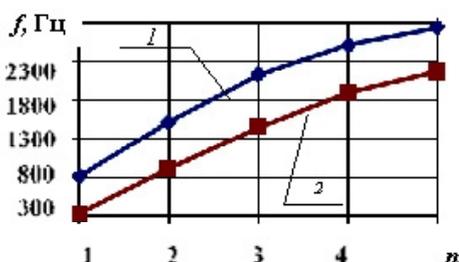


Рис. 2. Зависимость частоты колебаний лопатки турбины от волновых чисел n ($m = 0$):

1 — частоты колебаний лопатки с учетом центробежной силы; 2 — частоты колебаний лопатки без учета центробежной силы

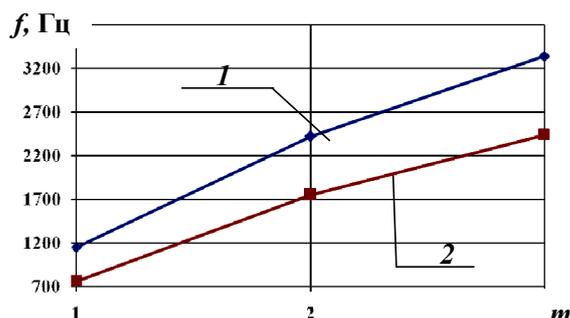


Рис. 3. Зависимость частоты колебаний лопатки турбины от волновых чисел m ($n = 1$):

1 — частоты колебаний лопатки с учетом центробежной силы; 2 — частоты колебаний лопатки без учета центробежной силы

Результаты расчета, приведенные на графиках 2 и 3, свидетельствуют о том, что для данного типа граничных условий, характерного для конструкции рабочих лопаток турбомашин имеющих бандажную полку, частота колебаний возрастает с увеличением, как волнового числа n , так и волнового числа m . Следует отметить, что влияние волнового числа в окружном направлении (n) значительно выше, чем числа полуволн m . Объяснением этому служит то, что наличие в периферийном сечении лопатки бандажной полки призвано конструктивно обеспечить рассеивание потенциальной энергии деформации и, как следствие, снизить частоту колебаний лопатки.

Далее проводится исследование влияния величины центробежной силы на величину колебаний лопатки. С учетом зависимости 14 следует

отметить, что при равной плотности материала лопатки и радиусе диска основное влияние на величину центробежной силы оказывает частота вращения ротора турбомашин. Ниже на рис. 4 приведены зависимости частоты колебаний охлаждаемой лопатки первой ступени турбины от частоты вращения ротора с учетом и без учета влияния центробежной силы.

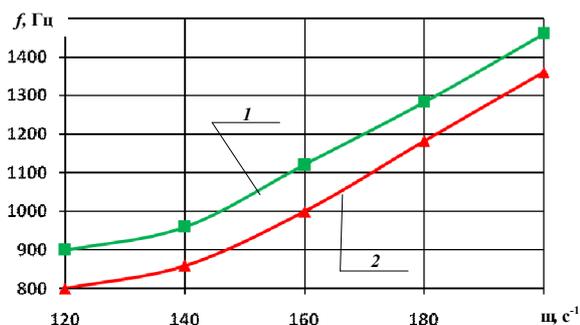


Рис. 4. Зависимость частот колебаний лопатки от частоты вращения ротора. Форма колебаний $m = 0$ ($n = 1$):

1 — охлаждаемая лопатка; 2 — неохлаждаемая лопатка

Анализ графических зависимостей, приведенных на рис 4, свидетельствует о том, что наличие действия поля центробежных сил приводит к увеличению частоты колебаний лопатки. Это происходит вследствие изменения жесткости пера, что хорошо иллюстрируется зависимостями (8, 10). Подобные зависимости наблюдаются не только для первой, но и для более высоких форм колебаний. Однако для изгибных форм колебаний влияние центробежной силы является более существенным, так как приводит к удлинению пера лопатки и соответственно к изменению поля его перемещений.

Заключение

С использованием метода конечных элементов (МКЭ) решена задача расчета величины частот колебаний охлаждаемых рабочих лопаток турбомашин, с учетом воздействия на них поля центробежных сил. Для решения данной задачи на основе метода конечных элементов разработана уточненная математическая модель лопатки на основе специальных конечных элементов, позволяющая в достаточно полной мере учитывать ее конструктивную неоднородность. Проведено исследование зависимости влияния частоты вращения ротора на частоты колебаний лопаток. Установлено, что с увеличением частоты вращения, а, следовательно, и центробежной силы, частота колебаний лопаток возрастает. Однако такое увеличение является незначительным и не превышает 5–7 % от частот колебаний лопаток, определенных без учета действия поля центробеж-

ных сил. Подобные зависимости проявляются для разных волновых чисел, однако наиболее ярко для первой изгибной формы колебаний. Поэтому учет данного фактора позволяет более точно определить резонансную частоту колебаний лопаток и выработать комплекс мер по его недопущению.

Список литературы

1. Биргер И. А. Динамика авиационных газотурбинных двигателей / Под ред. И. А. Биргера, Б. Ф. Шорра. – М. : Машиностроение, 1981. – 232 с.
2. Воробьев Ю. С. Колебания лопаточного аппарата турбомашин / Ю. С. Воробьев. – К. : Наук. думка, 1988. – 224 с.
3. Зайдельман Р. Л. Надежность лопаточного аппарата паровых турбин / Р. Л. Зайдельман – М. : Энергия, 1978 – 226 с.

4. Зенкевич О. К. Метод конечных элементов в технике / О. К. Зенкевич. – М. : Мир, 1978. – 519 с.
5. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин. – М. : Машиностроение, 1982. – 264 с.
6. Каиров А. С. Исследование собственных колебаний лопаток газотурбинного двигателя методом динамических суперэлементов / А. С. Каиров, С. А. Моргун // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій : зб. наук. праць. – Дніпропетровськ : Ліра, 2012. – Вип. 20. – С. 176–182.
7. Каиров А. С. Исследование собственных колебаний лопаток турбомашин методом конечных элементов / А. С. Каиров, С. А. Моргун // Зб. наук. праць НУК. – Миколаїв, 2012. – №5–6. – С. 76–80.

Поступила в редакцию 23.02.2016

Моргун С.О. Вплив поля відцентрових сил на частоти коливань робочих лопаток турбомашин

Викладено методіку визначення частот коливань охолоджуваних робочих лопаток турбомашин з урахуванням дії поля відцентрових сил. З використанням методу скінченних елементів розроблено уточнену математичну модель коливань лопатки. Наведено результати розрахунку частот коливань охолоджуваних лопаток турбіни в залежності від частоти обертання ротора для першої згинної форми коливань. Результати розрахунку частот також ілюструють вплив хвильових чисел на частоти коливань лопаток, що знаходяться в полі відцентрових сил.

Ключові слова: охолоджені лопатки, метод скінченних елементів, частоти коливань, поле відцентрових сил, хвильові числа, частота обертання ротора.

Morgun S. The influence of the centrifugal forces field on the turbine blades oscillation frequencies

The methodology of the cooled turbine blades oscillation frequencies calculation is developed. The blades are considered to be under the centrifugal forces field influence. The new, more correct mathematical model of blades oscillations is formed by the finite elements method usage. The dependencies between the turbine rotor's rotational velocity and the blades' oscillation frequency are also obtained. The main numerical results, obtained by such dependencies usage are given for the first vibration form. The results of frequencies calculation also illustrate the influence of the wave numbers on the turbine blades oscillation frequencies, taking into consideration the centrifugal forces influence.

Key words: cooled turbomachinery blades, finite elements method, oscillation frequencies, centrifugal forces field, wave numbers, turbine rotor's rotational velocity.