УДК 004.942: 629.4.001.4

Миргород В. Ф. д-р техн. наук, ст. науч. сотрудник АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: v.f.mirgorod@gmail.com;

Ранченко Г. С. директор, главный конструктор АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua;

Гвоздева И. М. д-р техн. наук, ст. науч. сотрудник АО «Элемент», Одесса, Украина, e-mail: odessa@element.od.ua

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ПОДОБНЫЕ ПО ПРИЗНАКУ МАСШТАБА ВРЕМЕНИ

Выполнено исследование динамических систем, подобных относительно масштаба времени. Признаком подобия является совпадение закономерностей процессов изменения состояния динамических систем при изменении масштаба времени. Установлены необходимые и достаточные условия подобия свободных (задача Коши) и вынужденных движений линейных стационарных динамических систем. Предложены условия подобия линейных стационарных динамических систем, заданных математическими моделями в различных формах: обыкновенных дифференциальных уравнений, математических моделей пространства состояния, передаточных функций и частотных характеристик. Рассмотрены параметрические линейные динамические системы, для которых определено свойство самоподобия. Самоподобной называется параметрическая линейная динамическая система, в которой, после завершения переходных процессов, вызванных изменением (скачкообразным либо постепенным) ее параметров, свободные и вынужденные движения подобны по признаку масштаба времени. Установлены признаки самоподобия параметрических линейных динамических систем первого и второго порядков (линейных осцилляторов). Для нелинейных динамических систем, математические модели которых имеют вид формы Гаммерштейна, получены условия самоподобия процессов изменения состояния при малых отклонениях от установившихся режимов. Решены прикладные задачи исследования подобных и самоподобных динамических систем, в частности, систем регулирования и авиационного газотурбинного двигателя. Математическая модель авиационного газотурбинного двигателя представлена совокупностью моделей пространства состояния, в которой сопровождающая матрица характеристического полинома является λ - матрицей. На основе решения задачи на собственные числа и собственные векторы для этой матрицы получены условия самоподобия переходных процессов изменения оборотов турбин двигателя. Установлено, что в широком диапазоне изменения режимов полета переходные процессы изменения оборотов турбин двигателя описываются одинаковыми закономерностями. Проведено сопоставление результатов моделирования и экспериментальных данных переходных процессов изменения оборотов турбин для трехвального авиационного газотурбинного двигателя. Предлагаемый подход позволяет выполнить синтез таких управлений сложными системами, которые обеспечивают подобие динамических свойств.

Ключевые слова: *динамическая система; математическая модель; признак подобия; масштаб времени; газотурбинный двигатель.*

Введение

Подобие процессов в различных динамических системах является мощным инструментом их исследования[1].

Методы теории подобия находят широкое применение в различных областях науки и техники, позволяя получить эмпирические математические модели для процессов, не имеющих еще адекватного теоретического математического описания.

Одной из задач теории подобия является исследование процессов, инвариантных относительно масштаба времени.

Повышение интенсивности процессов преобразования энергии при сохранении динамических свойств системы требует систематического исследования систем, подобных по признаку масштаба времени.

1. Постановка задачи

Подобие процессов в динамических системах (объектах) одной физической природы при масштабном моделировании связано с сохранением ряда фундаментальных физических констант: чисел Маха, Рейнольдса, Эйлера, Прандтля, Струхаля и др. методы электромеханической аналогии основаны на подобии законов сохранения процессов различной физической природы. Однако вопросам систематического исследования систем, подобных по признаку масштаба времени, установлению признаков подобия процессов в динамических системах с различными формами математического описания уделено еще недостаточно внимания.

Целью работы является исследование линейных стационарных и параметрических динамических систем, подобных, и самоподобных относительно масштаба времени. Признаком подобия является совпадение закономерностей процессов изменения состояния динамических систем при изменении масштаба времени.

2. Решение проблемы

Определение 1 (О.1)

Две линейные стационарные системы (ЛСС) являются подобными по признаку масштаба времени, если при изменении масштаба времени процессы изменения состояния ЛСС подобны: описываются одинаковыми закономерностями. Рис. 1 и 2 иллюстрируют процессы в подобных системах при одинаковых входных воздействиях.

Таким образом, две ЛСС, удовлетворяющие О.1, подобны, если процессы изменения их состояния $x_1(t)$ первой и $x_2(\mu t)$ второй систем тождественно совпадают при $\mu = 1$.

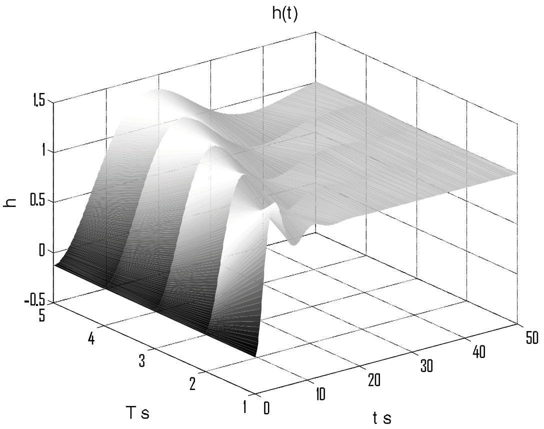

Рис. 1. Процессы в подобных ЛСС

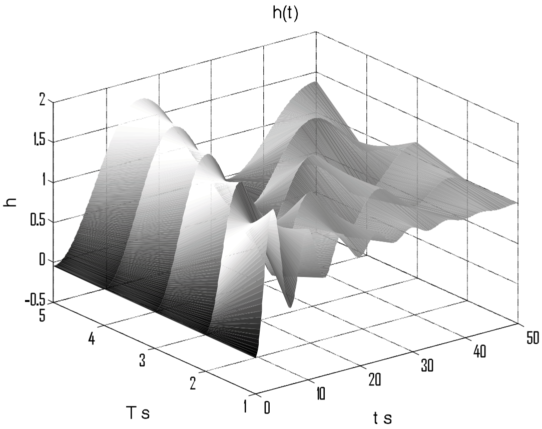

Рис. 2. Процессы в подобных ЛСС

1. Задача Коши. Свободное движение подобных ЛСС

Утверждение 1 (У.1)

Необходимым и достаточным условием подобия свободныхдвижений ЛСС, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями (ОЛДУ), является масштабность корней характеристического уравнения.

Необходимость: Общее решение ОЛДУ имеет вид:

$$\chi(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \ ,$$

где C_i - постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, λ_i - корни характеристического уравнения, n - порядок системы.

Свободное движение $x^{(\mu)}(t)$ подобной по О.1 системы описывается выражением:

$$\chi^{(\mu)}(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i (\mu t)} = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{(\lambda_i \mu) t} = \chi(\mu t).$$

Отсюда непосредственно следует справедливость У.1.

Достаточность следует из существования и единственности решения задачи Коши для ОЛДУ.

Следствие 1.1. Коэффициенты ОЛДУ подобных по О.1 ЛСС пропорциональны масштабу подобия в соответствующей степени μ^i, где степень равна порядку соответствующей производной в ОЛДУ.

Действительно, ОЛДУ вида $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \frac{d^i \chi}{dt^i} = 0$, с заданными начальными условиями, имеет известное решение

$$\chi(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \ .$$

Следовательно, подобные по О.1 ЛСС имеют следующие характеристические уравнения:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(\mu\lambda)^i=\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha_i\mu^i)\lambda^i=0\ .$$

Следствие 1.2. Все комплексно-сопряженные корни $\alpha\pm j\beta$ на плоскости корней характеристических уравнений подобных по О.1 ЛСС лежат на двух симметричных лучах с одинаковыми углами наклона

$$\operatorname{arctg}(\beta/\alpha).$$

Следствие 1.3. Все ЛСС второго порядка (линейные осцилляторы), которые описываются ОЛДУ с заданными начальными условиями

$$T^2\frac{d^2\chi}{dt^2}+2\xi T\frac{d\chi}{dt}+\chi=0,$$

подобны друг другу по О.1 при условии

$$\xi=\text{const}.$$

Следствие 1.4. ЛСС, представленные математическими моделями пространства состояний

$$\frac{d\vec{\chi}}{dt}=A^{(\mu)}\vec{\chi},$$

являются подобными по признаку масштаба времени, если при изменении масштаба времени сопровождающие матрицы характеристического полинома масштабно изменяются

$$A^{(\mu)}=A/\mu.$$

Действительно, характеристические уравнения подобных по О.1 ЛСС имеют вид

$$\det(\mu\lambda E-A)=\mu\det(\lambda E-A/\mu)=0.$$

Отсюда непосредственно следует справедливость Следствия 1.3.

Следствие 1.5. Для подобных по О.1 ЛСС, представленных математическими моделями пространствасостояний, собственные векторы расположены одинаковым образом.

Действительно, задача на собственные векторы $\vec{v}_k$ и собственные значения λ_k ЛСС имеет следующий вид:

$$A\vec{v}_k=\lambda_k\vec{v}_k,\ k=1,2...n.$$

Справедливость Следствия 1.5. непосредственно вытекает из Следствий 1.1 и 1.4.

2. Вынужденное движение подобных ЛСС

Утверждение 2 (У.2)

Необходимым и достаточным условием подобия вынужденных движений ЛСС типа SISO (Single-inputsingle-outputsystem), описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями или моделями пространства состояний, является выполнение У.1 и, кроме того, масштабность нулей передаточной функции.

Необходимость: Вынужденное движение ЛСС типа SISO описывается следующим векторно-матричным уравнением:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vec{\chi}}{dt}&=A\vec{\chi}+\vec{b}u,\\ y&=\vec{c}^T\vec{\chi}.\end{aligned}\right\}.$$

Передаточная функция ЛСС имеет вид:

$$W(s)=\vec{c}^T(sE-A)^{-1}\vec{b}.$$

Подобная ЛСС имеет следующую передаточную функцию:

$$W(s)=\vec{c}^T(\mu sE-A)^{-1}\vec{b}=\vec{c}^T\frac{\operatorname{adj}(\mu sE-A)}{\det(\mu sE-A)}\vec{b}.$$

Отсюда непосредственно следует справедливость У.2.

Достаточность следует из существования и единственности решения ОЛДУ и однозначности преобразования Лапласа.

Замечание 1. Справедливость представленного утверждения непосредственно следует из следующего свойства преобразования Лапласа:

$$L\{f(\mu t)\}=\frac{1}{\mu}F\left(\frac{s}{\mu}\right),$$

где

$$F(s)=L\{f(t)\}$$

Следствие 2.1. Коэффициенты неоднородных ЛДУ подобных по О.1 ЛСС пропорциональны масштабу подобия в соответствующей степени μ^i, где степень равна порядку соответствующей производной в ЛДУ.

Следствие 2.2. Передаточные функции подобных ЛСС могут быть получены заменой оператора Лапласа s на оператор μs.

Следствие 2.3. Все амплитудно-фазочастотные характеристики (АФЧХ) подобных ЛСС имеют идентичные графики, однако точки, соответствующие аргументу на этих графиках, разделены масштабно пропорциональными отрезками частот.

Следствие 2.4. Фазовые портреты подобных ЛСС второго порядка в координатах

$$\left(\mu\frac{d}{dt}\chi(t),\chi(t)\right)$$

имеют идентичные графики, однако точки, соответствующие аргументу на этих графиках, разделены масштабно пропорциональными отрезками времени (рис.3).

Следствие 2.5. Логарифмические амплитудночастотные характеристики (ЛАЧХ) подобных ЛСС имеют идентичные графики (рис.4) со сдвигом по оси аргумента на $\lg(\mu)$.

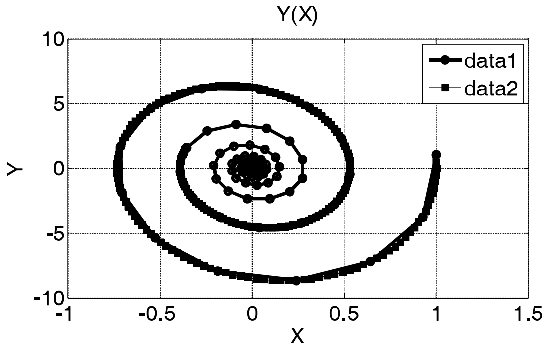

Рис. 3. Фазовые портреты подобных ЛСС

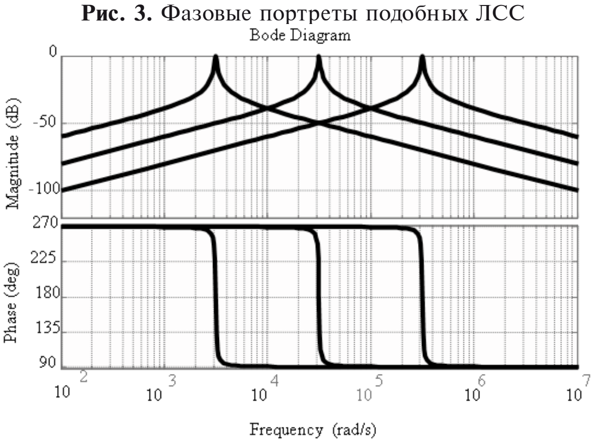

Рис. 4. ЛАЧХ подобных линейных осцилляторов

Следствие 2.6. Траектории оптимальных по квадратичному критерию ЛСС подобны, если критерий подчинен условию масштаба. При этом матрицы Риккатти и законы оптимального управления идентичны для всех подобных оптимальных ЛСС. Подобными являются также оптимальные наблюдатели состояния (фильтр Калмана) при выполнении того же условия.

Замечание 2. Системный оператор $\mathrm{Sys}\{\cdot\}$ ЛСС удовлетворяет условию:

$$\mathrm{Sys}\left\{e^{j\omega\chi}\right\} = K(j\omega t)e^{j\omega t}$$

поскольку его собственными функциями являются гармонические функции. Здесь $K(j\omega t)$ является непрерывным спектром собственных значений системного оператора ЛСС. В обозначениях теории управления $K(j\omega t)$ представляет собой АФЧХ. Подобные ЛСС имеют следующий спектр собственных значений системного оператора

$$K^{(\mu)}(j\omega t) = K(j\mu\omega t).$$

3. Самоподобные параметрические системы

Определение 2 (О.2)

Самоподобной называется параметрическая линейная динамическая система (ЛДС), в которой, после завершения переходных процессов, вызванных изменением (скачкообразным либо постепенным) ее параметров, свободные и вынужденные движения удовлетворяют О.1, то есть подобны по признаку масштаба времени.

Утверждение 3 (У.3)

Необходимым условием самоподобия параметрических ЛДС типа SISO является возможность представления их уравнений движения в виде:

$$T(\mu)\frac{d\vec{\chi}}{dt} = A\vec{\chi} + \vec{b}u,$$

где: $T(\mu) = \mu T$, T- диагональная числовая матрица, в частном случае единичная матрица.

Данное условие является только необходимым, но не достаточным, поскольку возможны иные сочетания параметров ЛДС, обеспечивающие самоподобие их движений.

Следствие 3.1. Все параметрические ЛДС первого порядка самоподобны по признаку масштаба времени.

Действительно, уравнение движения параметрической ЛДС первого порядка имеет следующий вид:

$$T(\mu)\frac{d\chi}{dt} + \chi = ku.$$

Справедливость Следствия 3.1 непосредственно вытекает из У.1, если только за время переходного процесса в параметрической ЛДС постоянная времени не изменяется.

Следствие 3.2. Все параметрические ЛДС второго порядка (линейные осцилляторы), которые описываются ОЛДУ с заданными начальными условиями

$$\left[T(\mu)\right]^2\frac{d^2\chi}{dt^2} + 2\xi T(\mu)\frac{d\chi}{dt} + \chi = 0,$$

самоподобны при условии

$$\xi = \mathrm{const}.$$

Справедливость Следствия 3.2 непосредственно вытекает из Следствия 2.1, если только за время переходного процесса в параметрической ЛДС постоянная времени не изменяется.

4. Нелинейные динамические системы

4.1 Линеаризованные нелинейные динамические системы

Уравнение изменения состояния нелинейных динамических систем имеет вид:

$$\frac{d\vec{\chi}}{dt} = f\left(\vec{\chi}, \vec{u}\right).$$

Линеаризация производится в окрестности некоторого к-го установившегося режима, уравнение в отклонениях от которого принимает следующий вид:

$$\frac{d\Lambda\chi_k}{dt} = A_k \Lambda\vec{\chi}_k + B_k \Lambda\vec{u}_k,$$

где матрицы градиентов

$$A_k, B_k,$$

зависят от точки к-го установившегося режима

$$f\left(\vec{\chi}_k, \vec{u}_k\right) = 0.$$

Такие модели нелинейных систем называются кусочно-линейными динамическими моделями (КЛДМ). Подобие КЛДМ устанавливает У.2, однако, поскольку исходной является одна и та же нелинейная система, то можно говорить лишь о самоподобии движений.

4.2 Линеаризованные параметрические нелинейные динамические системы

Параметризация исходной нелинейной ММПС приводит к модели в форме Гаммерштейна:

$$\frac{d\vec{\chi}}{dt} = A(s)\left[\vec{\chi} - \vec{\chi}_{st}(s)\right],$$

где семейство статических характеристик исследуемого объекта задается зависимостью от некоторого режимного параметра s:

$$\vec{\chi}_{st}(s).$$

Утверждение 4 (У.4)

Необходимым условием самоподобия КЛДМ и ММ в форме Гаммерштейна является масштабность собственных чисел сопровождающей матрицы характеристического полинома (матрицы градиентов)

$$A_k = \left.\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\chi}}\right|_{\vec{\chi} = \vec{\chi}_k}$$

для различных установившихся режимов.

5. Примеры применения подобных динамических систем

5.1 Равнополосные фильтры

Линейные полосовые фильтры, как это следует из рис. 4 и Следствия 1.3, образуют подобные по масштабу времени ЛДС. Такие фильтры (декадные, октавные и т.п.) называют равнополосными. Имеет место также следующее обобщение: линейные пассивные четырехполюсники образуют подобные по масштабу времени ЛДС, если только значения индуктивностей катушек и емкостей конденсаторов масштабны.

5.2 Типовые пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы

Линейные пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы, как это следует из Следствия 1.3, образуют подобные по масштабу времени ЛДС. Передаточная функция типового регулятора имеет следующий вид:

$$W(s) = k + I\frac{1}{\mu s} + D\frac{s\mu}{T\mu s + 1}.$$

ЛАЧХ таких регуляторов для различных масштабов времени представлены на рис. 5. Изменение параметра масштаба позволяет смещать ЛАЧХ регулятора параллельно по оси аргументов.

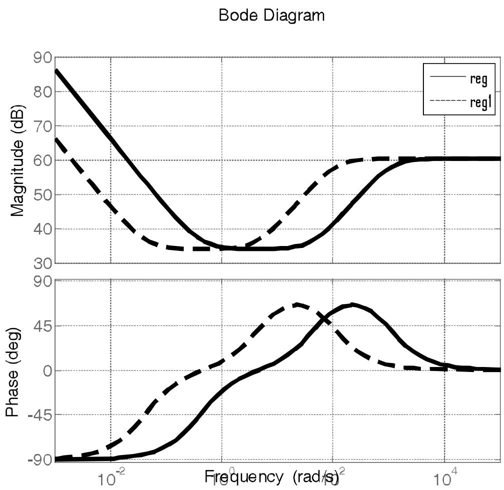

Рис. 5. ЛАЧХ подобных регуляторов

5.3. Газотурбинный двигатель

5.3.1 Одновальный турбореактивный двигатель

Одновальный турбореактивный двигатель (ТРД) в малых отклонениях от установившегося режима описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка относительно оборотов турбины и имеет следующую передаточную функцию [2]:

$$K(s) = \frac{X_N(s)}{X_G(s)} = \frac{k_D(V)}{T_D(V,H)s + 1},$$

где V, H скорость и высота полета.

Следовательно, одновальный ТРД является самоподобной относительно масштаба времени ЛДС. Этот факт отметили практики, в частности, в [2] на с.48 утверждается:

«Отметим интересные свойства подобных режимов двигателей, характеризующие объект регулирования по числу оборотов при различных высотах полета и V = const. В этом случае коэффициент усиления остается постоянным, и поэтому амплитудно-фазовая характеристика представляется одной полуокружностью для всех высот полета, но с различным распределением частот вдоль характеристики».

5.3.2 Многовальный турбореактивный двигатель

Многовальный турбореактивный газотурбинный двигатель (ГТД) является сложной нелинейной динамической системой, математическая модель которой может быть представлена в виде модели пространства состояний ив форме Гаммерштейна. Рис. 6 иллюстрирует зависимости собственных чисел сопровождающей матрицы характеристического полинома модели трехвального ГТД от режимной переменной: степени повышения давления. Как это следует из результатов расчетов и рис. 7, 8 в диапазоне степени повышения давления (8...18) собственные числа масштабны. Следовательно, рассматриваемая динамическая система удовлетворяет условию самоподобия по масштабу времени. Поэтому в указанном диапазоне переходные процессы в ГТД при частичной приемистости подчиняются одинаковым закономерностям, отличаясь лишь масштабом времени протекания (рис. 9).

Адекватность применяемой математической модели трехвального ГТД подтверждают расчеты и рис. 10, на котором представлены процессы приемистости, полученные в процессе летных испытаний экспериментальным путем и по результатам моделирования согласно КЛДМ.

Как это следует из результатов анализа и приведенных иллюстраций, самоподобие процессов в ГТД требует соответствующего изменения параметров, применяемых в САУ регуляторов.

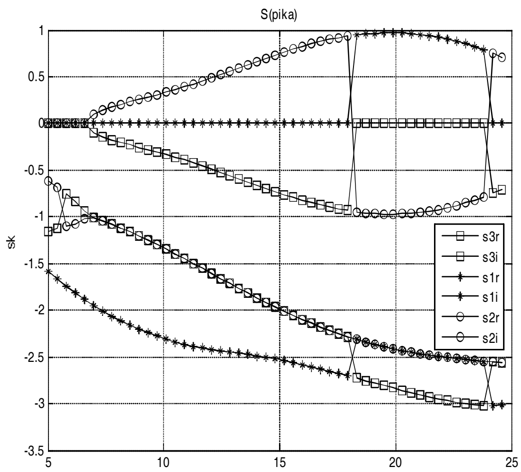

Рис. 6. Траектории собственных значений в зависимости от режимной переменной:

s1r – вещественная часть; s1i – мнимая часть;

s2r – вещественная часть; s2i – мнимая часть;

s3r – вещественная часть; s3i – мнимая часть

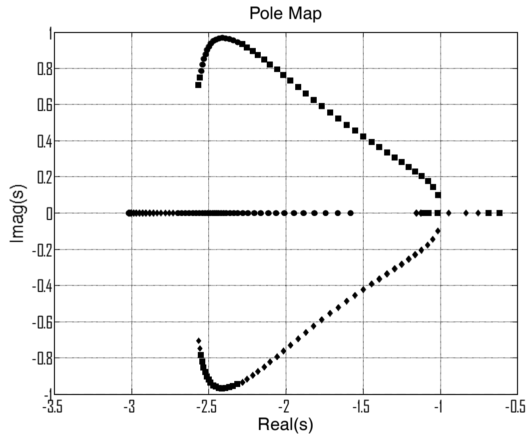

Рис. 7. Траектории собственных значений в зависимости от режимной переменной на комплексной плоскости

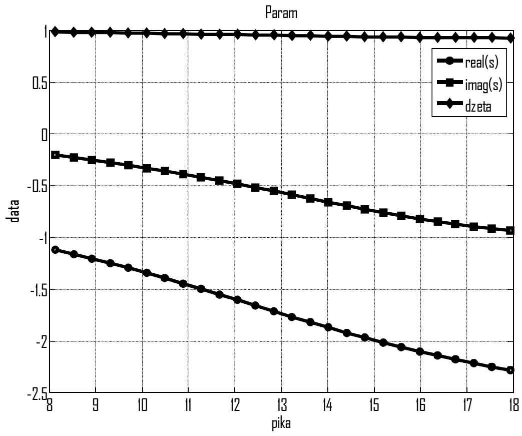

Рис. 8. Траектории собственных значений в зависимости от режимной переменной и коэффициент затухания

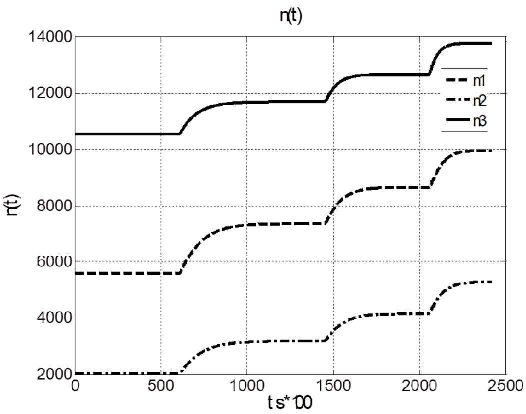

Рис. 9. Изменение оборотов турбин ГТД при частичной приемистости

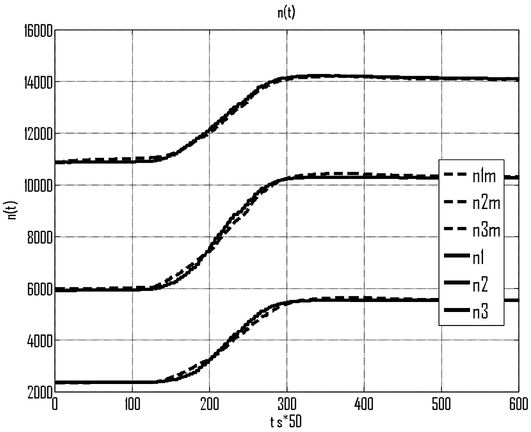

Рис. 10. Изменение оборотов турбин ГТД при приемистости в эксперименте и по данным моделирования

Заключение

Предлагаемый подход к построению подобных и самоподобных динамических систем позволяет расширить возможности анализа их свойств и синтеза соответствующих управлений движением в пространстве состояния.

Перспективы дальнейших исследований заключаются в расширении предлагаемого подхода на стохастические системы.

Литература

1. Клайн С. Дж. Подобие и приближенные методы[Текст]С.Дж.Клайн. — М.: Мир, 1968. — 302 с.

2. Шевяков А.А. Автоматика авиационных и ракетных силовых установок [Текст]/ А.А. Шевяков — М.: Машиностроение, 1965.— 548 с.

Поступила в редакцию 30.07.2019

В.Ф. Миргород, Г.С. Ранченко, І.М. Гвоздєва. Динамічні системи, подібні за ознакою масштабу часу

Виконано дослідження динамічних систем, подібних щодо масштабу часу. Ознакою подібності є збіг закономірностей процесів зміни стану динамічних систем при зміні масштабу часу. Встановлено необхідні та достатні умови подібності вільних (задача Коші) і вимушених рухів лінійних стаціонарних динамічних систем. Запропоновано умови подібності лінійних стаціонарних динамічних систем, заданих математичними моделями в різних формах: звичайних диференціальних рівнянь, математичних моделей простору стану, передавальних функцій і частотних характеристик. Розглянуто параметричні лінійні динамічні системи, для яких визначено властивість самоподібності. Самоподібною називається параметрична лінійна динамічна система, в якій, після завершення перехідних процесів, викликаних зміною (стрибкоподібним або поступовим) її параметрів, вільні і вимушені руху подібні за ознакою масштабу часу. Встановлено ознаки самоподібності параметричних лінійних динамічних систем першого і другого порядків (лінійних осциляторів). Для нелінійних динамічних систем, математичні моделі яких мають вигляд форми Гаммерштейна, отримані умови самоподібності процесів зміни стану при малих відхиленнях від усталених режимів. Вирішені прикладні завдання дослідження подібних і самоподібних динамічних систем, зокрема, систем регулювання і авіаційного газотурбінного двигуна. Математична модель авіаційного газотурбінного двигуна представлена сукупністю моделей простору стану, в якій супроводжує матриця характеристичного полінома є λ *-матрицею. На основі рішення задачі на власні числа і власні вектори для цієї матриці отримані умови самоподібності перехідних процесів зміни оборотів турбін двигуна. Встановлено, що в широкому діапазоні зміни режимів польоту перехідні процеси зміни оборотів турбін двигуна описуються однаковими закономірностями. Проведено зіставлення результатів моделювання і експериментальних даних перехідних процесів зміни оборотів турбін для тривального авіаційного газотурбінного двигуна. Пропонований підхід дозволяє виконати синтез таких управлінь складними системами, які забезпечують подібність динамічних властивостей.*

Ключові слова: *динамічна система; математична модель; ознака подібності; масштаб часу; газотурбінний двигун.*

V.F. Myrhorod, G.S. Ranchenko, I.M. Gvozdeva. Dynamic systems, like the scale of time

A study of dynamic systems similar to the time scale was performed. A sign of similarity is the coincidence of the laws of the processes of changing the state of dynamic systems with a change in the time scale. The necessary and sufficient conditions for the similarity of free (Cauchy problem) and forced motions of linear stationary dynamic systems are established. Conditions for the similarity of linear stationary dynamic systems, given by mathematical models in various forms, are proposed: ordinary differential equations, mathematical models of the state space, transfer functions, and frequency characteristics. Parametric linear dynamic systems are considered for which the self-similarity property is defined. A parametric linear dynamic system is called self-similar, in which, after the completion of transients caused by a change (jump-like or gradual) of its parameters, the free and forced motions are similar in terms of the time scale. The signs of self-similarity of parametric linear dynamic systems of the first and second orders (linear oscillators) are established. For nonlinear dynamic systems whose mathematical models have the form of the Hammerstein form, the conditions for self-similarity of state change processes with small deviations from steady-state regimes are obtained. Solved applied problems of the study of similar and self-similar dynamic systems, in particular, control systems and aviation gas turbine engine. The mathematical model of the aviation gas turbine engine is represented by a set of models of the state space in which the accompanying matrix of the characteristic polynomial is λ *-the matrix. On the basis of solving the eigenvalue problem and the eigenvectors for this matrix, the conditions for self-similarity of transients of changes in engine turbine speed are obtained. It has been established that in a wide range of changes in flight modes transients of changes in revolutions of engine turbines are described by the same laws. Comparison of simulation results and experimental data of transient changes in turbine rotations for a three-shaft aviation gas turbine engine was carried out. The proposed approach allows the synthesis of such controls of complex systems that provide similarity of dynamic properties.*

***Key words**: dynamic system; mathematical model; similarity sign; time scale; gas turbine engine.*

References

1. Kline S.J.Podobie i priblijennye metodi [Similarity and approximate methods]. Moscow: Mir, 1968. 302 p.

2. Sevjakov A A. Avtomatika aviacionnyh i raketnih silovih ustanovok [Aviation and rocket power plant automation]. Moscow, Masinstroenie., 1965. 548 p.