ISSN 1819-8058

УДК 681.58, УДК 620.91

И.М.Хоменко (консорциум NOVARKA), **В.А.Сафонов,** докт.техн.наук (Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности, Севастополь),
А.М.Хоменко (консорциум NOVARKA)

Определение аналитической зависимости угла падения прямого солнечного излучения на свободно ориентированную гелиоприемную панель как функции от зенита, азимута и углов Эйлера

В статье выводится формула для определения значения угла падения прямого солнечного излучения на свободно ориентированную гелиоприемную поверхность в зависимости от пяти углов: зенита, азимута и трех углов вращения панели относительно собственных координатных осей. Для решения поставленной задачи использовались методы векторной алгебры. Солнечный луч и нормаль панели были определены в специально выбранной единой системе координат. Взаимная ориентация луча и нормали организовывалась последовательностью вращения единичного вектора относительно координатных осей панели. В результате нескольких векторных умножений матриц вращения и единичного вектора была получена универсальная формула, учитывающая все возможные ориентации солнечного луча и гелиоприемной панели.

У статті виводиться формула для визначення кута падіння прямого сонячного випромінювання на вільно орієнтовану геліоприймальну поверхню залежно від п'яти кутів: зеніту, азимута і трьох кутів обертання панелі відносно власних координатних осей. Для розв'язання поставленої задачі використовувалися методи векторної алгебри. Сонячний промінь і нормаль панелі були визначені у спеціально вибраній єдиній системі координат. Взаємна орієнтація променя і нормалі була організована послідовністю обертання одиничного вектора відносно координатних осей панелі. В результаті декількох векторних множень матриць обертання та одиничного вектора була отримана універсальна формула, що враховує усі можливі орієнтації сонячного променя та геліоприймальної панелі.

Введение. Статья является продолжением теоретических исследований, проводимых мировыми учеными по изучению эффективности использования следящих гелиоприемных устройств в различных точках земного шара в зависимости от сезона и климатических условий.

Для оптимального приема солнечного излучения поверхность гелиоприемного устройства должна быть перпендикулярной к вектору луча. Положение нормали гелиоприемной панели может быть выражено через три угла поворота относительно локальных координатных осей. Положение солнечного луча относительно центра панели определяется по двум углам: зениту и азимуту, которые в свою очередь являются сложными функциями от даты и времени. Таким образом, задача определения угла между солнечным лучом и нормалью к приемной поверхности решается путем рассмотрения их векторов в общей системе трехмерных координат.

Актуальность проблемы. Оценка эффективности использования гелиоприемных панелей, способных менять свою ориентацию в пространстве, должна основываться на аналитических зависимостях, которые позволяют рассчитать угол падения излучения для любых положений панели. Современные методы ограничиваются рассмотрением частных случаев, когда панель вращается относительно одной или двух своих осей. Отсутствие универсальной формулы, позволяющей учитывать вращение панели по всем координатным осям, ограничивает область анализа использования следящих гелиоприемных устройств (трекеров) в различных точках земного шара.

Постановка цели и задач научного исследования. Положение свободно ориентированной панели может быть задано при помощи разворотов относительно трех координатных осей. Цель данной работы заключается в получении зависимости угла между солнечным лучом и нормалью к свободно ориентированной гелиоприемной поверхности как функции от пяти углов (зенита, азимута и трех углов поворота панели относительно выбранной системы отсчета).

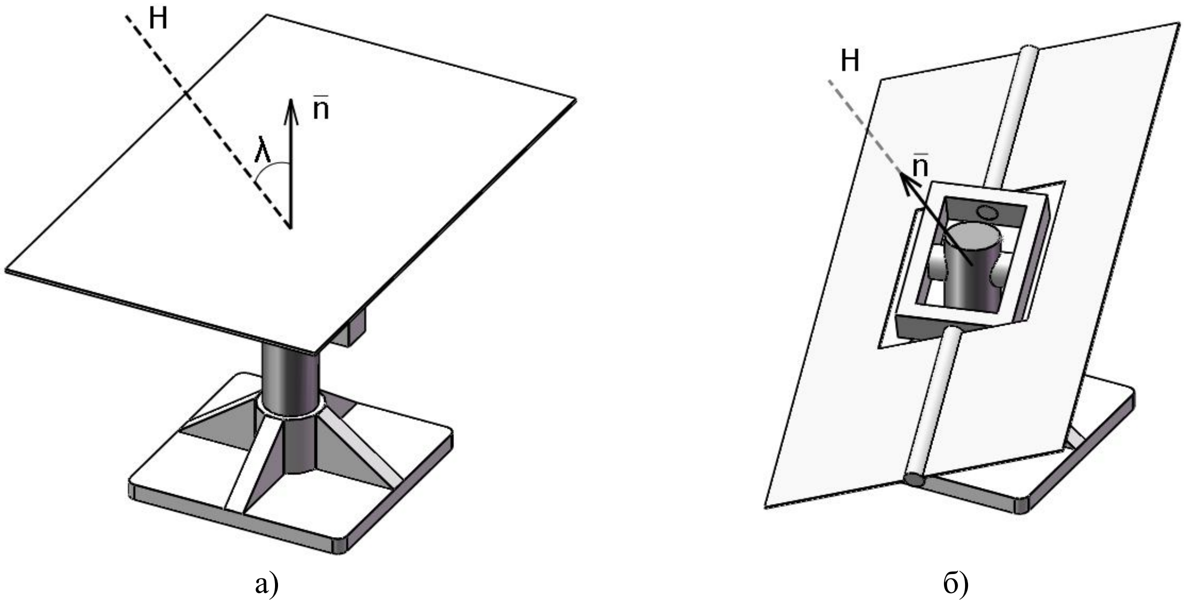

Рис. 1. *а) неподвижная панель; б) панель, следящая за солнечным лучом.*

Решение задачи. Плотность потока излучения, падающего на гелиоприемную панель (рис. 1), пропорциональна косинусу угла между вектором излучения *H* и вектором-нормалью панели *n* [1].

$$H_n = H \cdot \cos\lambda\,. \qquad (1)$$

Гелиоприемные панели, горизонтально лежащие на поверхности Земли, недополучают около 40% солнечной энергии по сравнению с панелями, которые непрерывно поворачиваются для обеспечения перпендикулярного падения солнечных лучей [1].

Нормаль к панели и солнечный луч можно представить двумя единичными векторами (значение модуля равно 1) в выбранной системе координат. Оба вектора имеют общее начало в точке отсчета. Координаты обоих векторов будут выражены как функции углов поворота относительно осей системы. По правилам векторной алгебры косинус угла между двумя единичными векторами a и b находится по формуле:

$$\cos\lambda = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \qquad (2)$$

Для применения этой формулы к нашей задаче необходимо определиться с системой отсчета. Начальной точкой системы будет геометрический центр панели (точка *O*). Прежде чем выбирать направления осей системы отсчета, обратим внимание на геометрические параметры солнечного луча, направленного в точку *O* на поверхности Земли. Положение точки *O* относительно центра Земли определяется через ее широту φ и часовой угол t. Положение центра Земли относительно солнечного луча определяется углом склонения δ. Принимаем, что широта точки задана, угол склонения и часовой угол рассчитаны по аналитическим зависимостям от даты и времени.

Ориентацию луча относительно точки *O* можно охарактеризовать по двум углам: зениту и азимуту, которые определяются из модели астрономического треугольника (рис. 2).

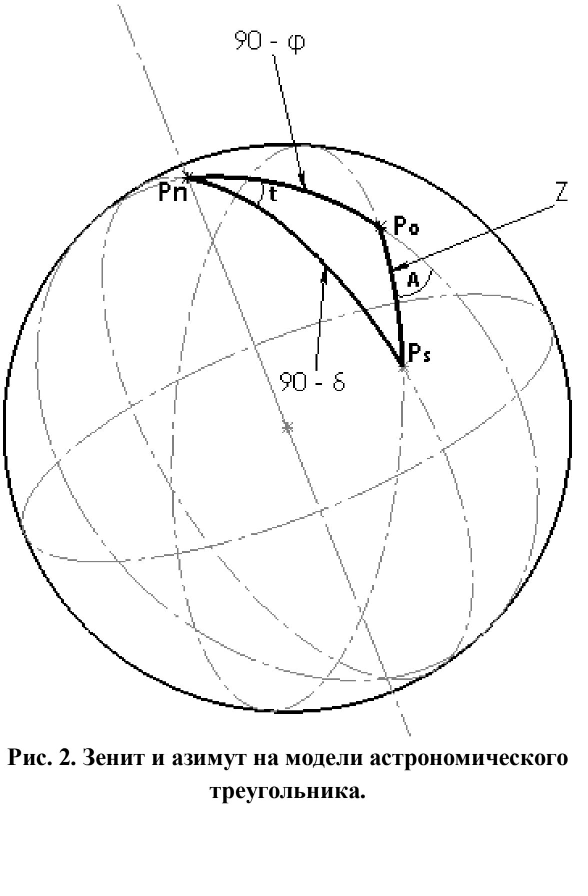

Рис. 2. Зенит и азимут на модели астрономического треугольника.

Астрономический треугольник получается из первой системы экваториальных координат [2]. В этой системе центр Земли принимается неподвижным. Из центра строится небесная сфера, на поверхности которой находится Солнце (точка *Ps*), которое совершает видимое для наблюдателя движение. В дополнение к Солнцу на сферу проецируются зафиксированные положения северного полюса *Pn* и наблюдателя *Po*.

Через точки *Ps*, *Pn* и *Po* проводят три круга с центрами, совпадающими с центром Земли:

1) через проекцию полюса и наблюдателя (*Pn* и *Po*) – так называемый меридиан;
2) через проекцию полюса и солнца (*Pn* и *Ps*) – круг склонения;
3) через проекцию наблюдателя и солнца (*Po* и *Ps*) – вертикал светила.

Если принять радиус небесной сферы за единицу, то по правилам сферической тригонометрии [3] значение зенита можно определить через арккосинус выражения:

$$\cos Z = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t , \quad (3)$$

значение азимута можно определить через арктангенс выражения:

$$tgA = \frac{\cos\delta \cdot \sin t}{-\sin\delta \cdot \cos\varphi + \cos\delta \cdot \sin\varphi \cdot \cos t} . \quad (4)$$

Модель астрономического треугольника дает возможность определить ориентацию солнечного луча, направленного в центр панели, расположенной на поверхности Земли относительно небесной сферы. Но вектор-нормаль панели будет сориентирован относительно земных координат. Следовательно, следующим этапом в решении поставленной задачи будет определение системы координат, общей и для солнечного луча, и для нормали панели.

Так как направление солнечного луча будет представлено единичным вектором, исходящим из центра гелиоприемной панели, то значения зенитного и азимутального углов должны быть преобразованы в координаты этого единичного вектора относительно системы отсчета панели, которую мы определим ниже.

Зенит можно определить как угол между солнечным лучом и вектором, лежащим на прямой, соединяющей точку *O* с центром Земли. Этот вектор направлен от центра Земли (рис. 3).

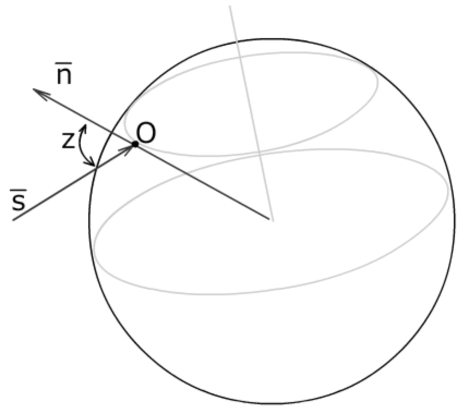

Рис. 3. Зенитный угол относительно наблюдателя и центра Земли.

Для определения азимута необходимо получить вектор, который является проекцией солнечного луча на касательную плоскость к поверхности Земли в точке *O*. Также необходим вектор, полученный проецированием на ту же плоскость вектора от точки *O* к южному полюсу Земли. Азимут можно определить как угол между этими векторами.

На основании вышеизложенного представляется удобной для дальнейших расчетов следующая система отсчета (рис. 4). Панель может совершать вращение относительно своего центра (точки O) относительно трех координатных осей. Направления координатных осей относительно планеты Земля выберем так, чтобы любой исследователь мог легко их определить при помощи компаса и отвеса. Ось X будет направлена вдоль линии север-юг (+ на юге), ось Y – вдоль линии запад-восток (+ на востоке), а ось Z перпендикулярна поверхности Земли. Будем придерживаться этой системы для обоих полушарий Земли.

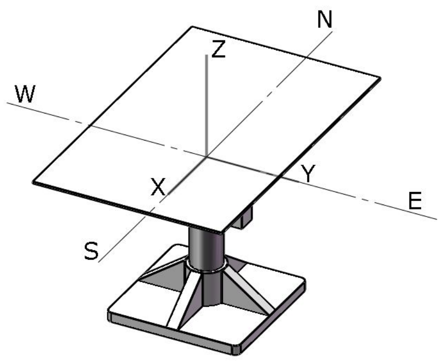

Рис. 4. Система отсчета для определения угла между нормалью к свободно ориентированной поверхности и солнечным лучом.

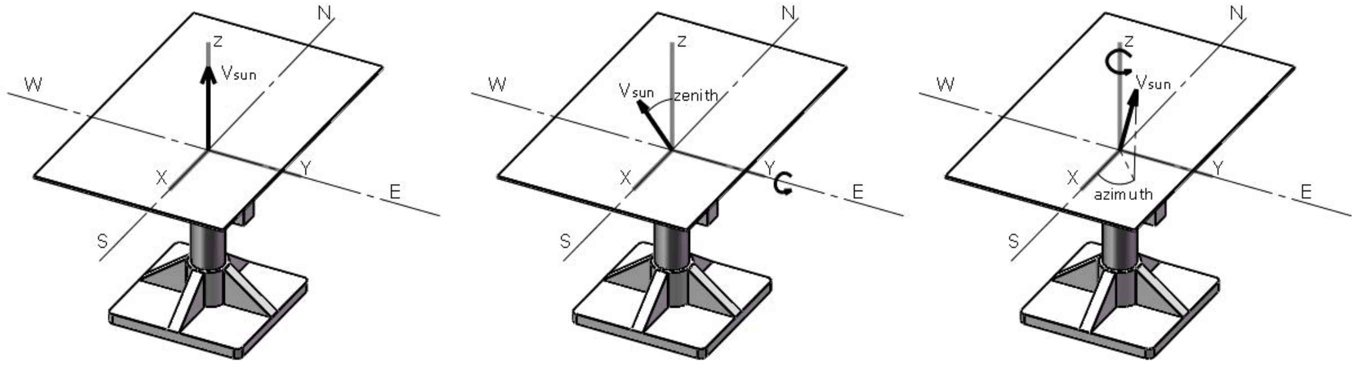

Рис. 5. Последовательность поворотов единичного вектора солнечного луча.

Определим координаты единичного вектора солнечного луча в выбранной системе координат (рис. 5). Для этого установим единичный вектор вдоль оси Z (это вектор [0,0,1]), а затем произведем два последовательных разворота:

1) на угол зенита вокруг оси OY ($R_{y,zen}$);
2) на угол азимута вокруг оси OZ ($R_{z,az}$).

В векторной алгебре для описания локальных координат относительно фиксированной системы отсчета, после поворота вокруг одной из осей, используют матрицы поворота. Например, после поворота вокруг оси OZ на угол α положение локальных осей определяется так:

$$R_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

При последовательности поворотов вокруг нескольких осей результирующая матрица будет представлена векторным умножением нескольких матриц поворота.

Для компактного представления обозначим косинусы зенитного и азимутального углов через *Cz* и *Ca*, а синусы соответственно как *Sz* и *Sa*.

Результирующая матрица поворота будет иметь следующий вид:

$$R_{zen,az} = R_{z,az} \cdot R_{y,zen} = \\ = \begin{bmatrix} C_a & -S_a & 0 \\ S_a & C_a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_z & 0 & S_z \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_z & 0 & C_z \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C_a \cdot C_z & -S_a & C_a \cdot S_z \\ S_a \cdot C_z & C_a & S_a \cdot S_z \\ -S_z & 0 & C_z \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Координаты единичного вектора солнечного луча будут равны скалярному произведению вектора в начальном положении (0,0,1) на результирующую матрицу поворота:

$$V_{sun} = R_{zen,az} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_a \cdot S_z \\ S_a \cdot S_z \\ C_z \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Для тех положений, когда центр панели оказывается под плоскостью небесного экватора, значение зенита должно браться с отрицательным знаком.

Для описания вращения солнечной панели относительно выбранной абсолютной системы координат можно использовать углы Эйлера φ, θ, Ψ. Существует много различных систем углов Эйлера, и все они описывают ориентацию твердого тела относительно некоторой заданной системы координат [4]. Для нашей задачи выберем систему, которая наилучшим образом соответствует механической конструкции экспериментального устройства, специально разработанного для данной работы (рис. 6). Устройство позволяет точно установить углы поворота относительно абсолютной оси OZ и двух локальных осей OU и OV.

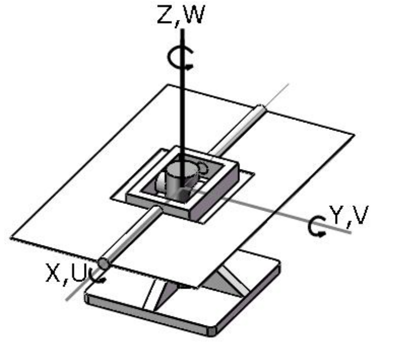

Рис. 6. Солнечная панель с тремя степенями свободы вращения.

 ISSN 1819-8058

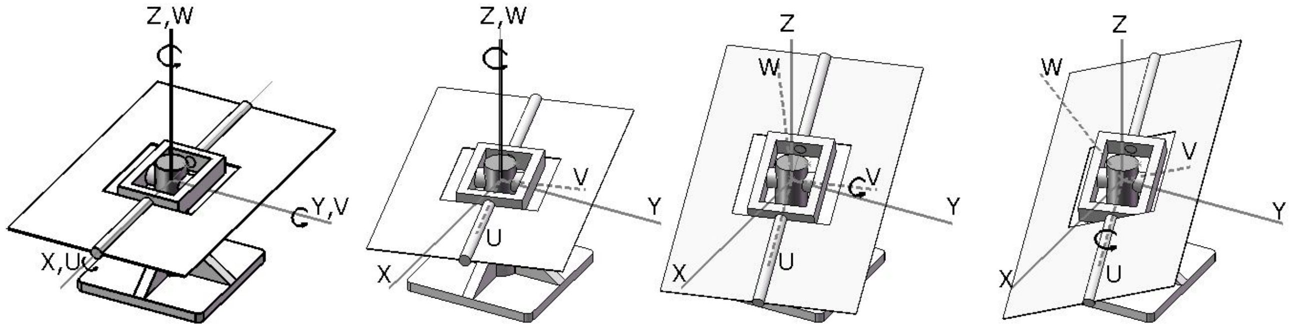

Рис. 7. Последовательность поворотов панели.

Реализуем в выбранной системе следующую (рис. 7) последовательность поворотов панели (в первоначальной позиции вектор нормали совпадает с абсолютной осью OZ, а направления осей локальной системы координат панели OUVW совпадают с направлениями осей абсолютной системы OXYZ):

1. Поворот на угол φ относительно абсолютной оси OZ (этот угол показывает отклонение локальной оси OU от северо-южного направления и определяется по показаниям компаса) (R_z, φ).
2. Поворот на угол θ относительно повернутой оси OV (R_v, θ).
3. Последний поворот произведем на угол Ψ вокруг повернутой оси OU (R_u, Ψ).

Косинусы и синус углов Эйлера обозначим соответственно C_φ, S_φ, C_θ, S_θ, C_Ψ, S_Ψ.

Результирующая матрица поворота имеет следующий вид:

$$R_{\varphi,\theta,\psi} = R_{z,\varphi} \cdot R_{v,\theta} \cdot R_{u,\Psi} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_\varphi & -S_\varphi & 0 \\ S_\varphi & C_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_\theta & 0 & S_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\theta & 0 & C_\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\psi & -S_\psi \\ 0 & S_\psi & C_\psi \end{bmatrix} = \tag{7}$$

$$= \begin{bmatrix} C_\varphi \cdot C_\theta & (C_\varphi \cdot S_\theta \cdot S_\psi - S_\varphi \cdot C_\psi) & (C_\varphi \cdot S_\theta \cdot C_\psi + S_\varphi \cdot S_\psi) \\ S_\varphi \cdot C_\theta & (S_\varphi \cdot S_\theta \cdot S_\psi + C_\varphi \cdot C_\psi) & (S_\varphi \cdot S_\theta \cdot C_\psi - C_\varphi \cdot S_\psi) \\ 0 & 0 & C_\theta \cdot C_\psi \end{bmatrix}$$

Координаты единичного вектора-нормали панели после проделанных разворотов панели будут равны скалярному произведению вектора в начальном положении (0,0,1) на результирующую матрицу поворота:

$$V_{plane} = R_{\varphi,\theta,\psi} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_\varphi \cdot S_\theta \cdot C_\psi + S_\varphi \cdot S_\psi) \\ (S_\varphi \cdot S_\theta \cdot C_\psi - C_\varphi \cdot S_\psi) \\ C_\theta \cdot C_\psi \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Подставив координаты единичных векторов V_{sun} и V_{plane} в формулу (2), получим искомую зависимость значения угла между солнечным лучом и нормалью к свободно ориентированной гелиоприемной поверхности как функцию от значений пяти углов: зенита z, азимута a, φ, θ, Ψ:

$$\cos\lambda = C_a \cdot S_z \cdot (C_\varphi \cdot S_\theta \cdot C_\psi + S_\varphi \cdot S_\psi) + \\ + S_a \cdot S_z \cdot (S_\varphi \cdot S_\theta \cdot C_\psi - C_\varphi \cdot S_\psi) + C_z \cdot C_\theta \cdot C_\psi \cdot \tag{9}$$

Для упрощения многочлена будем использовать формулы приведения, а именно:

$$\cos(a-\varphi) = \cos a \cdot \cos\varphi + \sin a \cdot \sin\varphi\,;$$

$$\sin(\varphi - a) = \sin\varphi \cdot \cos a - \cos\varphi \cdot \sin a\,.$$

Для использования этих формул перемножим составляющие многочлена и сгруппируем их следующим образом:

$$\cos\lambda = S_z \cdot S_\theta \cdot C_\psi \cdot (C_a \cdot C_\varphi + S_a \cdot S_\varphi) + \\ + S_z \cdot S_\psi \cdot (S_\varphi \cdot C_a - C_\varphi \cdot S_a) + C_z \cdot C_\theta \cdot C_\psi \cdot$$

После приведения окончательная формула примет вид:

$$\cos\lambda = S_z \cdot S_\theta \cdot C_\psi \cdot C_{(a-\varphi)} + \\ + S_z \cdot S_\psi \cdot S_{(\varphi - a)} + C_z \cdot C_\theta \cdot C_\psi \cdot \tag{10}$$

Для частного случая, когда исключен разворот панели вокруг оси OX (угол Ψ=0°, $C\Psi$=1, $S\Psi$=0), формула приобретает вид:

$$\cos\lambda = S_z \cdot S_\theta \cdot C_{(a-\varphi)} + C_z \cdot C_\theta\,.$$

Если исключить разворот панели вокруг оси OY (угол θ=0°, $C\theta$=1, $S\theta$=0), тогда получаем:

$$\cos\lambda = S_z \cdot S_\psi \cdot S_{(\varphi - a)} + C_z \cdot C_\psi\,.$$

Наиболее эффективным для приема излучения является вариант, когда панель зафиксирована по оси OX, т.е. исключен разворот вокруг оси OZ (угол φ=0°, $C\varphi$=1, $S\varphi$=0). В этом случае формула будет иметь вид:

$$\cos\lambda = S_z \cdot S_\theta \cdot C_\psi \cdot C_a - S_z \cdot S_\psi \cdot S_a + C_z \cdot C_\theta \cdot C_\psi \cdot$$

Выводы. Универсальная формула, полученная в данной работе, является базовой для расчета прихода прямого солнечного излучения на свободно ориентированную гелиоприемную панель. Ее использование позволит расширить область анализа работы следящих гелиоприемных устройств в различных точках земного шара.

1. *Даффи Д.А., Бекман У.А.* Тепловые процессы с использованием солнечной энергии. – М: Мир, 1981. – 420 с.
2. *Полак И.Ф.* Курс общей астрономии. – М.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1951. – 390 с.
3. *Жаров В.Е.* Сферическая астрономия. – Фрязино, 2006. – 480 с.
4. *Фу К., Гонсалес Р., Ли К.* Робототехника: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 624 с.