

МЕТОД РОЗРАХУНКУ ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ІМОВІРНІСНОГО ТРИПАРАМЕТРИЧНОГО ГАММА-РОЗПОДІЛУ ВИТРАТ СТОКУ РІЧКИ В ЗАДАЧАХ ГІДРОЕНЕРГЕТИКИ

М.Р. Ібрагімова

Інститут відновлюваної енергетики НАН України,
02094, м. Київ, вул. Гната Хоткевича, 20А
тел./факс +38-044-206-28-09, e-mail: hydro@ive.org.ua

Очікуваний у найближчому майбутньому дефіцит вуглеводнів, зростаючий тиск на екологію та ресурсозабезпечення існування людства – основні тригери трансформації енергетичної галузі відповідно до ухвалених на Саміті ООН Цілей сталого розвитку. Розвиток малої гідроенергетики також повинен відповідати раціональному використанню водного ресурсу, збереженню та можливому відновленню річкової системи, мінімізації антропогенного впливу. Дана стаття спрямована на вирішення актуального питання створення малих гідроелектростанцій, технологічні режими роботи якої відповідають принципам раціонального гідроенергетичного водокористування з врахуванням природоохоронних обмежень на використання води для виробництва електроенергії. Автором приведено переваги використання функції диференційної щільності імовірнісного розподілу витрат стоку річки над традиційно застосовуваною інтегральною функцією розподілу при аналізі гідроенергетичних показників експлуатації малих ГЕС. Проведений аналіз попередніх досліджень диференційної щільності засвідчив відсутність узагальнених результатів з визначення даної функції у вигляді, необхідному для подальших практичних застосувань. Вперше розроблено прямий метод розрахунку функції диференційної щільності імовірнісного трипараметричного гамма-розподілу витрат стоку річки за довільних значень коефіцієнтів варіації та асиметрії на основі застосування інтерполяції кубічними сплайнами в околі полюсів гамма-функції. Матеріали статті містять результати проведеного дослідження у вигляді таблиць значень функції диференційної щільності імовірнісного гамма-розподілу витрат води. Зазначені таблиці рекомендуються до застосування інженерними та проектними службами при виконанні гідрологічних та гідротехнічних розрахунків в задачах гідроенергетики. Бібл. 18, табл. 3, рис. 3.

Ключові слова: витрати води, імовірність, інтерполяція, диференційна щільність, забезпеченість, розподіл.

METHOD FOR THE CALCULATION OF PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF THREE-PARAMETER GAMMA DISTRIBUTION OF RIVER FLOW DISCHARGE RELATED TO HYDROPOWER TASKS

M. Ibragimova

Institute for Renewable Energy of NASU,
Kyiv, 20A, Hnata Khotkevycha Str.,
Phone/fax: +38-044-206-28-09, e-mail: hydro@ive.org.ua

Hydrocarbon deficit, increasing pressure on the environment and problems of resource availability are the major triggers for the transformation of energy industry worldwide. The development of small hydropower also should conform to the principles of rational use of water resources, river conservation and restoration, reducing the human impact, etc. The article focuses on a pressing issue of construction of small hydroelectric power plant with operation modes that comply sustainable water use taking into account environmental constraints on the use of water for electricity generation. The author presents the advantages of density function of probability distribution of river flow discharge over its cumulative probability as a means of analyzing performance indicators of small hydroelectric power plants. The review of previous studies of probability density function showed the absence of summarized results required for further practical applications of this function. There have been developed, for the first time, a method for the calculation of the probability density function of three-parameter Gamma distribution of river flow discharge at random coefficients of variation and asymmetry by cubic spline interpolation in the vicinity of the poles of Gamma function. The article contains the results of a study of probability Gamma distribution of river flow discharge in tabular form of relevant density function values. These tables are recommended for hydropower engineering and design services when performing hydrological and hydrotechnical calculations. Ref. 18, tab. 3, fig. 3.

Keywords: flow discharge, probability, interpolation, probability density function, availability, distribution.



М.Р. Ібрагімова
M. Ibragimova

Відомості про автора: науковий співробітник відділу гідроенергетики, Інститут відновлюваної енергетики Національної академії наук України.

Освіта: НТУУ «Київський політехнічний інститут».

Спеціальність «Нетрадиційні і відновлювані джерела енергії».

Наукова сфера: альтернативна енергетика, перетворення відновлюваних видів енергії, мала гідроенергетика, енергозбереження та енергоефективність.

Публікації: 20.

ORCID: 0000-0003-1732-4477.

e-mail: mariaibragimovar@gmail.com

Author information: junior research fellow at Hydropower Department, Institute for Renewable Energy of National Academy of Sciences of Ukraine.

Education: National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»;

Specialty «Non-traditional and renewable energy sources».

Research area: alternative energy, conversion of renewable energy, small hydropower, energy conservation and efficiency.

Publications: 20.

ORCID: 0000-0003-1732-4477.

e-mail: mariaibragimovar@gmail.com

Перелік використаних позначень та скорочень:

ГЕС – гідроелектростанція;

P – забезпеченість (імовірність перевищення) заданої величини;

p – диференційна щільність імовірнісного розподілу;

γ, b – параметри ймовірнісного розподілу;

Q – витрата води;

Q_{cp} – середня багаторічна витрата води;

K_p – модульний коефіцієнт витрат води стоку річки;

C_v – коефіцієнт варіації витрат води;

C_s – коефіцієнт асиметрії витрат води;

Γ – гамма-функція.

Вступ. У довгостроковій перспективі розвитку енергетичної галузі відзначено необхідність скорочення частки викопного та ядерного палива і відповідно їх заміщення відновлюваними та альтернативними джерелами енергії. З одного боку, вже сьогодні створені певні механізми стимулювання державою виробництва електроенергії об'єктами відновлюваної енергетики: «зелений» тариф і надбавки за використання обладнання українського виробництва, пільги в оподаткуванні, пільговий режим приднання до електричної мережі тощо. Перед малою гідроенергетикою постає завдання створення малих гідроелектростанцій (ГЕС) із врахуванням природоохоронних вимог, що спрямовані на максимально можливе збереження природного середовища річки. У подальшому викладенні малу ГЕС, технологічні режими роботи якої відповідають принципам раціонального гідроенергетичного водокористування з врахуванням природоохоронних обмежень на використання води для виробництва електроенергії, будемо називати «зеленою» малою ГЕС. Створенню такої станції повинен передувати багатостадійний процес проектування з теоретичним обґрунтування технічних параметрів і експлуатаційних режимів функціонування на основі застосування імовірнісних

розподілів витрат води стоку річки [1–6].

Постановка завдання. В задачах гідроенергетики найбільшого поширення набув імовірнісний трипараметричний розподіл витрат води стоку річки [5–9]. Відомо, що вичерпною оцінкою випадкової величини є її інтегральна або диференційна функції розподілу. Проте традиційно в гідроенергетичних розрахунках застосовується виключно інтегральна функція розподілу, яка надає можливості для визначення параметрів гідрологічного режиму через оцінку імовірності за рівнем забезпеченості витрат води стоку з метою наступного обґрунтування проектних рішень. Зокрема, гідротехнічні споруди з регулювання стоку річки розраховуються саме по водності року певної заданої забезпеченості (див. Таблицю 1), що гарантує надійність та очікувану безвідмовність роботи споруд. Для визначення гарантованої та встановленої потужностей ГЕС традиційної реалізації з акумулюванням водотоку у водосховищі також достатньо використання інтегральної характеристики функції розподілу, або забезпеченості, як основи гідроенергетичних розрахунків. Тому в спеціалізованих виданнях [9–11] наведені табульовані значення ординат кривих забезпеченостей відповідних розподілів за фіксованих значень коефіцієнтів варіації та асиметрії.

Таблиця 1. Повторюваність і забезпеченість витрати води стоку річки характерних років [12].

Table 1. Frequency and availability of river flow discharge of of indicative years [12].

| Характеристика водності року | Повторюваність, 1 раз в n років n , років | Забезпеченість, P , % |
|------------------------------|---|-------------------------|
| Дуже багатоводний | 100 | 1 |
| Середній багатоводний | 10 | 10 |
| Помірно багатоводний | 4 | 25 |
| Середньої водності | 2 | 50 |
| Помірно маловодний | 4 | 75 |
| Середній маловодний | 10 | 90 |
| Дуже маловодний | 33 | 97 |
| Катастрофічно маловодний | 100 | 100 |

Проте сучасні положення щодо будівництва та наступної експлуатації малих ГЕС із дотриманням природоохоронних критеріїв функціонування диктують потребу встановлення нових підходів у проведенні гідроенергетичних розрахунків, що враховуватимуть обмеження на використання води для виробництва електроенергії: обмеження на використання води у межень, повені та паводки; санітарний попуск; оперативні заходи з регулювання водного потоку через гідроспоруди; безперервне функціонування рибоходів; регулювання потужності по водотоку [13]. За даних умов, спрямованих на збереження первісного стану русла водотоку, визначальним фактором оцінки проектних параметрів малої ГЕС є значення витрат води стоку, або, іншими словами, надходження води до створу станції. Тому адекватна методика аналізу гідроенергетичних показників експлуатації «зелених» малих ГЕС повинна ґрунтуватись на застосуванні функції диференційної щільності імовірнісного розподілу витрат стоку річки.

В загальному випадку, функція диференційної щільності імовірнісного розподілу дає змогу визначити імовірність F попадання випадкової величини X у будь-яку задану область [10], наприклад обмежену інтервалом $[a_1, a_2]$:

$$p\{Q; Q_{cp}; \gamma, b\} = \left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\gamma/b} \frac{1}{\Gamma(\gamma)|b|Q_{cp}} \left(\frac{Q}{Q_{cp}} \right)^{\gamma/b-1} \times \exp \left\{ - \left[\frac{Q}{Q_{cp}} \cdot \frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)} \right]^{\gamma/b} \right\}, \quad Q > 0, \quad (3)$$

де Q – випадкова величина витрат води, м³/с; Q_{cp} – середня багаторічна витрата води, м³/с;

$Q/Q_{cp} = K_p$ – модульний коефіцієнт витрат води; γ, b – параметри, яким відповідають певні значення коефіцієнта варіації C_V та асиметрії C_S витрат води стоку річки.

Параметри розподілу γ і b можуть бути визначені з системи рівнянь, що встановлює зв'язок між параметрами γ і b та стандартними гідрологічними параметрами стоку витрат води C_V і C_S :

$$\begin{cases} C_V = \left[\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{\Gamma^2(\gamma+b)} - 1 \right]^{1/2}, \\ C_S = \frac{\frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\gamma+3b)}{\Gamma^3(\gamma+b)} - \frac{3\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{\Gamma^2(\gamma+b)} + 2}{\left[\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{\Gamma^2(\gamma+b)} - 1 \right]^{3/2}}, \end{cases} \quad (4)$$

де $\Gamma(\gamma), \Gamma(\gamma+2b)$ та ін. – гамма-функції відповідних аргументів.

$$F\{a_1 < X \leq a_2\} = \int_{a_1}^{a_2} p(x) dx, \quad (1)$$

де $p(x)$ – функція диференційної щільності імовірнісного розподілу.

При цьому обчислення ординат кривих забезпеченості розподілу виконується шляхом визначення інтеграла від функції диференційної щільності

$$P\{x > x_p\} = 1 - \int_0^{x_p} p(x; \gamma, b) dx, \quad (2)$$

де P – ймовірність перевищення (забезпеченість) значення шуканої ординати x_p ; $p(x; \gamma, b)$ – диференційна щільність ймовірностей за параметрів розподілу x, γ, b .

Проте варто зазначити, що в попередніх дослідженнях відсутні узагальнені результати з визначення функції диференційної щільності у вигляді, необхідному для подальших практичних застосувань, аналогічно інтегральним показникам розподілу.

Рівняння диференційної щільності трипараметричного гамма-розподілу у функції витрат води, рекомендованого нормативним документом [11], має наступний вид:

Після перетворень система (4) представляється у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{\Gamma^2(\gamma+b)} = K_1, \\ \frac{\Gamma(\gamma+b)\Gamma(\gamma+3b)}{\Gamma^2(\gamma+2b)} = K_2, \end{cases} \quad (5)$$

де $K_1 = 1 + C_V^2$, $K_2 = [C_S C_V^3 + 3(1 + C_V^2) - 2] / (1 + C_V^2)^2$ – відомі для заданих значень C_V і C_S .

В логарифмічній формі рівняння набувають остаточного виду, прийнятного для виконання практичних розрахунків:

$$\begin{cases} f_1 = \ln \Gamma(\gamma) + \ln \Gamma(\gamma+2b) - 2 \ln \Gamma(\gamma+b) - \ln K_1 = 0, \\ f_2 = \ln \Gamma(\gamma+b) + \ln \Gamma(\gamma+3b) - 2 \ln \Gamma(\gamma+2b) - \ln K_2 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Результати. Сучасні програмні продукти дають можливість виконувати складні та об'ємні розрахунки аналізу і обробки даних. Числове вирішення системи трансцендентних рівнянь (6) було реалізовано за допомогою нелінійної оптимізації методом довірчих областей у програмному пакеті MATLAB. Задача даного розрахунку зводиться до ітераційного пошуку параметрів γ і b , кожній комбінації яких відповідають задані значення коефіцієнта варіації C_V та асиметрії C_S . В якості першого наближення шуканих параметрів

рів були прийняті округлені до десятих значення величин γ і b , наведених у [9].

Результати отримано для діапазону зміни коефіцієнта C_V від 0,1 до 2 включно, з кроком 0,1; а коефіцієнт C_S задано як відношення C_V/C_S , значення якого відповідає діапазону від 1 до 4, з кроком 0,5. Відомо, що в околі полюсів гамма-функції

($C_V = 0,30; C_S = 3 \cdot C_V$), ($C_V = 0,70; C_S = 3,5 \cdot C_V$) і ($C_V = 1,00; C_S = 4 \cdot C_V$) параметр γ необмежено зростає, що зумовлює значне зниження точності обчислень і тим самим унеможливує отримання достовірних результатів у цих областях. На рис.1 графічно зображено результат визначення параметра γ за довільних значень коефіцієнтів варіації та асиметрії.

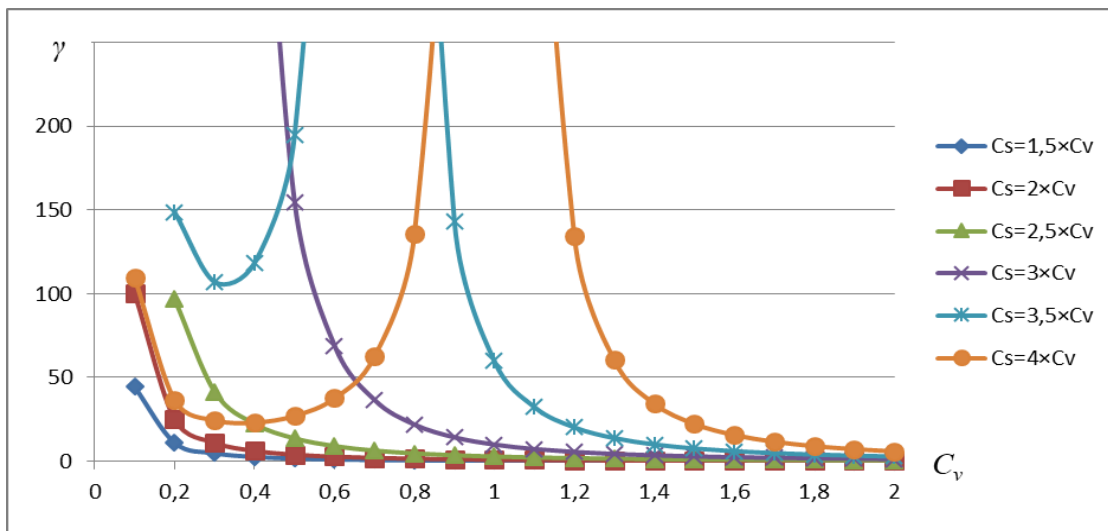


Рис. 1. Залежність параметра γ від C_V та C_V/C_S .

Fig. 1. Dependence of γ parameter on C_V and C_V/C_S .

З метою дослідження впливу зазначеної особливості гамма-функції на результат визначення функції диференційної щільності виконано відповідний розрахунок для одного з характерних випадків $C_S/C_V = 4$. На рис.2 графічно представ-

лено одержаний результат, а саме, множину значень функції диференційної щільності при $C_S/C_V = 4$. Встановлено, що за параметрів $C_V = 0,9 \div 1,1$ функція $p(x)$ невизначена.

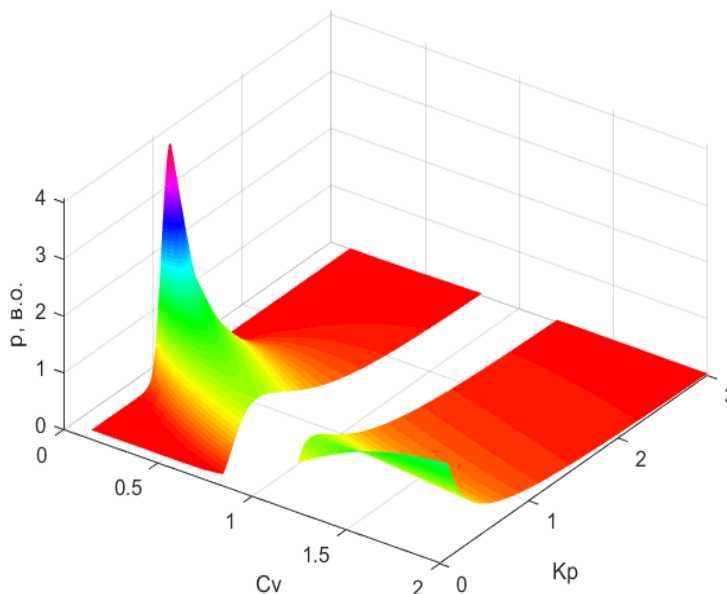


Рис. 2. Множина значень диференційної функції трипараметричного гамма-розподілу витрат води у модульних коефіцієнтах K_P при $C_S/C_V = 4$.

Fig. 2. Values of probability density function of three-parameter Gamma distribution of river flow discharge in coefficients K_P at $C_S/C_V = 4$.

Для розв'язання задачі визначення функції диференційної щільності у всьому діапазоні до- вільних значень її аргументів, у тому числі в око- лі полюсів гамма-функції, була застосована інте- рполяційна процедура з використанням кубічних сплайн-функцій двох змінних з неперервними похідними до другого порядку включно в точках інтерполяції. Наведемо найпростіший випадок визначення простору сплайнів.

Нехай в прямокутній області $\Omega = [c, d] \times [g, h]$ задана сітка ліній $\Delta = \Delta_{C_V} \times \Delta_{K_P}$, де

$$\begin{aligned} \Delta_{C_V} : c = C_{V_0} < C_{V_1} < \dots < C_{V_m} = d, \\ \Delta_{K_P} : g = K_{P_0} < K_{P_1} < \dots < K_{P_n} = h, \end{aligned} \quad (7)$$

що ділить область Ω на прямокутні комірки

$$\Omega_{ij} = \left\{ (C_V, K_P) \mid C_V \in [C_{V_i}, C_{V_{i+1}}], K_P \in [K_{P_j}, K_{P_{j+1}}] \right\}, \quad (8)$$

$$i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n.$$

В такому випадку шукана поверхня значень функції диференційної щільності $p(C_V, K_P)$ формується кубічним інтерполяційним сплайном двох змінних [14–16]:

$$S(C_V, K_P) = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 a_{\alpha\beta}^{ij} (C_V - C_{V_i})^\alpha (K_P - K_{P_j})^\beta, \quad (9)$$

де $a_{\alpha\beta}^{ij}$ – коефіцієнти сплайна.

При цьому існування сплайна вимагає вико- нання наступної умови:

$$S(C_V, K_P) = p_{ij} \quad i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n. \quad (10)$$

а також граничних умов одного із чотирьох ти-

пів, наприклад умов I-го типу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial C_V}(C_V, K_P) &= p_{ij}^{(C_V)}, \quad i = 0, m, j = 0, 1, \dots, n, \\ \frac{\partial S}{\partial K_P}(C_V, K_P) &= p_{ij}^{(K_P)}, \quad i = 0, 1, \dots, m, j = 0, n, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial C_V^2}(C_V, K_P) &= p_{ij}^{(C_V, K_P)}, \quad i = 0, m, j = 0, n, \end{aligned} \quad (11)$$

тобто в граничних вузлах сітки Δ задаються зна- чення перших часткових похідних по C_V і по K_P шуканої функції, а в кутових вузлах – зна- чення 2-ої змішаної похідної [15].

З метою уникнення можливих спотворень в областях максимуму, де I-ша похідна досліджу- ваної функції змінює свій знак, апроксимація об- ластей виконувалась сплайном 1-го ступеня або лінійною інтерполяцією. Для апроксимації решти областей застосовано інтерполяцію кубічними сплайнами.

За результатом програмної реалізації процесу інтерполяції одержано множину значень дифере- нційної функції імовірнісного розподілу витрат води, заданих у модульних коефіцієнтах K_P , ві- дносно зміни коефіцієнта варіації C_V та заданого значення $C_S/C_V = 4$. Дана множина значень дос- ліджуваної функції візуалізована неперервною поверхнею на рис.3 як результат доповнюючих одне одну лінійної на сплайнової інтерполяції. В таблиці 2 окремо представлено числові значення функції диференційної щільності в області її не- визначеності, одержані завдяки застосуванню інтерполяції кубічними сплайнами в околі полю- сів гамма-функції.

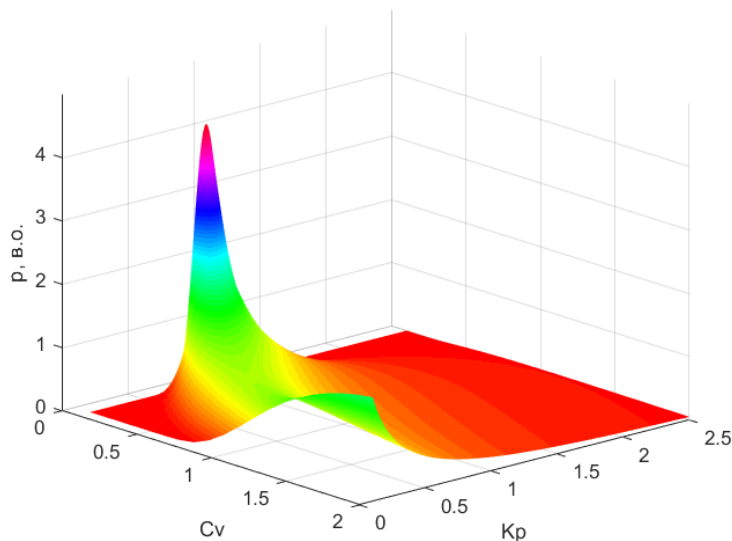


Рис. 3. Ординати диференційної функції імовірнісного розподілу витрат води у модульних коефіцієнтах K_P при $C_S/C_V = 4$.

Fig. 3. Ordinates of probability density function of river flow discharge in coefficients K_P at $C_S/C_V = 4$.

Таблиця 2. Числовий результат сплайнової інтерполяції функції диференційної щільності імовірнісного трипараметричного гамма-розподілу при $C_s/C_v = 4$.Table 2. Numerical result of spline interpolation of probability density function for three-parameter Gamma distribution at $C_s/C_v = 4$.

| K_p , в.о. | Коефіцієнт варіації, C_v | | | | |
|--------------|----------------------------|--------|--------|--------|--------|
| | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 |
| 0,1 | 0,0446 | 0,1489 | 0,3108 | 0,5088 | 0,7215 |
| 0,2 | 0,3736 | 0,5680 | 0,7450 | 0,8951 | 1,0084 |
| 0,3 | 0,7282 | 0,8590 | 0,9402 | 0,9827 | 0,9975 |
| 0,4 | 0,9169 | 0,9519 | 0,9530 | 0,9314 | 0,8989 |
| 0,5 | 0,9590 | 0,9265 | 0,8826 | 0,8330 | 0,7836 |
| 0,6 | 0,9144 | 0,8476 | 0,7847 | 0,7267 | 0,6747 |
| 0,7 | 0,8291 | 0,7508 | 0,6842 | 0,6275 | 0,5788 |
| 0,75 | 0,7803 | 0,7018 | 0,6366 | 0,5823 | 0,5361 |
| 0,8 | 0,7304 | 0,6540 | 0,5915 | 0,5401 | 0,4968 |
| 0,85 | 0,6809 | 0,6081 | 0,5491 | 0,5010 | 0,4606 |
| 0,9 | 0,6327 | 0,5644 | 0,5095 | 0,4648 | 0,4274 |
| 0,95 | 0,5865 | 0,5233 | 0,4726 | 0,4314 | 0,3970 |
| 1 | 0,5428 | 0,4849 | 0,4384 | 0,4006 | 0,3690 |
| 1,05 | 0,5016 | 0,4492 | 0,4068 | 0,3723 | 0,3433 |
| 1,1 | 0,4631 | 0,4160 | 0,3777 | 0,3462 | 0,3197 |
| 1,15 | 0,4274 | 0,3853 | 0,3508 | 0,3222 | 0,2980 |
| 1,2 | 0,3942 | 0,3569 | 0,3259 | 0,3001 | 0,2781 |
| 1,3 | 0,3353 | 0,3064 | 0,2819 | 0,2609 | 0,2428 |
| 1,4 | 0,2853 | 0,2635 | 0,2444 | 0,2276 | 0,2128 |
| 1,5 | 0,2431 | 0,2271 | 0,2125 | 0,1992 | 0,1872 |
| 1,6 | 0,2075 | 0,1962 | 0,1853 | 0,1749 | 0,1652 |
| 1,7 | 0,1775 | 0,1700 | 0,1620 | 0,1540 | 0,1463 |
| 1,8 | 0,1522 | 0,1476 | 0,1421 | 0,1360 | 0,1300 |
| 1,9 | 0,1308 | 0,1285 | 0,1249 | 0,1205 | 0,1158 |
| 2 | 0,1127 | 0,1122 | 0,1101 | 0,1070 | 0,1035 |
| 2,5 | 0,0557 | 0,0590 | 0,0608 | 0,0614 | 0,0612 |
| 3 | 0,0292 | 0,0328 | 0,0354 | 0,0371 | 0,0382 |

Вищевикладені результати відповідають дослідженню функції диференційної щільності імовірнісного трипараметричного гамма-розподілу витрат води у випадку необмеженого зростання параметра γ в околі полюса гамма-функції при $C_v = 1,0$; $C_s = 4 \cdot C_v$. Аналогічно було досліджено диференційну щільність в передбачуваних областях невизначеності функції, а саме в околі полюсів гамма-функції за комбінацій: $(C_v = 0,3; C_s = 3 \cdot C_v)$, $(C_v = 0,7; C_s = 3,5 \cdot C_v)$. У кінцевому результаті, з використанням засобів інженерної геометрії програмно реалізовано визначення функції диференційної щільності імовірнісного гамма-розподілу витрат води, заданих модульними коефіцієнтами K_p у повному діапазоні зміни коефіцієнта варіації C_v та співвідношення C_s/C_v . Для практичного використання отриманих результатів дослідження сформовано таблиці значень функції диференційної щільності імовірнісного гамма-розподілу витрат

води, заданих модульними коефіцієнтами K_p , за зміни коефіцієнта варіації C_v в діапазоні $0,1 \div 2$ з кроком $0,1$ та $C_s/C_v = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4$. Ці таблиці можуть безпосередньо застосовуватись інженерними та проектними службами при виконанні гідрологічних та гідротехнічних розрахунків річок з будь-якими гідрологічними параметрами стоку. Необхідність отримання даних за гідрологічних параметрів стоку, що не представлені в таблицях, наприклад за $C_v = 0,42$ і $C_s/C_v = 1,95$ (відповідають параметрам р. Південний Буг) [17,18], передбачає виконання інтерполяції табличних значень. Нижче, як варіант, представлено таблицю 3 значень функції диференційної щільності імовірнісного гамма-розподілу витрат води у модульних коефіцієнтах K_p за зміни коефіцієнта варіації C_v в діапазоні $0,1 \div 2$ з кроком $0,1$ при $C_s/C_v = 2$ (значення, найбільш характерне для території України).

Таблиця 3. Значення функції диференційної щільності імовірнісного трипараметричного гамма-розподілу $Cs/Cv = 2$.Table 3. Values of probability density function for three-parameter Gamma distribution at $Cs/Cv = 2$.

| $Kp, \text{в.о.}$ | Коефіцієнт варіації, Cv | | | | | | | | | |
|-------------------|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
| 0,1 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0063 | 0,0505 | 0,1682 | 0,3527 | 0,5674 | 0,7765 |
| 0,2 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0117 | 0,0894 | 0,2521 | 0,4483 | 0,6268 | 0,7651 | 0,8603 |
| 0,3 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0070 | 0,0951 | 0,2905 | 0,4988 | 0,6584 | 0,7594 | 0,8127 | 0,8323 |
| 0,4 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0694 | 0,3013 | 0,5415 | 0,6977 | 0,7750 | 0,7996 | 0,7931 | 0,7695 |
| 0,5 | 0,0000 | 0,0226 | 0,2776 | 0,5888 | 0,7599 | 0,8185 | 0,8164 | 0,7857 | 0,7433 | 0,6973 |
| 0,6 | 0,0001 | 0,1870 | 0,6444 | 0,8636 | 0,9015 | 0,8657 | 0,8061 | 0,7422 | 0,6812 | 0,6255 |
| 0,7 | 0,0197 | 0,6870 | 1,0493 | 1,0510 | 0,9593 | 0,8568 | 0,7639 | 0,6840 | 0,6160 | 0,5582 |
| 0,75 | 0,1227 | 1,0530 | 1,2151 | 1,1019 | 0,9607 | 0,8372 | 0,7355 | 0,6524 | 0,5839 | 0,5267 |
| 0,8 | 0,4924 | 1,4323 | 1,3364 | 1,1245 | 0,9473 | 0,8103 | 0,7042 | 0,6202 | 0,5525 | 0,4967 |
| 0,85 | 1,3410 | 1,7581 | 1,4065 | 1,1214 | 0,9217 | 0,7781 | 0,6709 | 0,5880 | 0,5220 | 0,4683 |
| 0,9 | 2,5912 | 1,9745 | 1,4250 | 1,0964 | 0,8866 | 0,7421 | 0,6366 | 0,5562 | 0,4928 | 0,4414 |
| 0,95 | 3,6869 | 2,0522 | 1,3969 | 1,0537 | 0,8445 | 0,7035 | 0,6019 | 0,5251 | 0,4648 | 0,4161 |
| 1 | 3,9861 | 1,9928 | 1,3304 | 0,9976 | 0,7975 | 0,6636 | 0,5675 | 0,4949 | 0,4380 | 0,3922 |
| 1,05 | 3,3637 | 1,8224 | 1,2355 | 0,9322 | 0,7475 | 0,6232 | 0,5336 | 0,4658 | 0,4126 | 0,3697 |
| 1,1 | 2,2671 | 1,5802 | 1,1219 | 0,8610 | 0,6961 | 0,5830 | 0,5006 | 0,4379 | 0,3885 | 0,3485 |
| 1,15 | 1,2451 | 1,3067 | 0,9988 | 0,7872 | 0,6444 | 0,5435 | 0,4688 | 0,4113 | 0,3657 | 0,3285 |
| 1,2 | 0,5670 | 1,0357 | 0,8737 | 0,7132 | 0,5935 | 0,5052 | 0,4383 | 0,3860 | 0,3441 | 0,3098 |
| 1,25 | 0,2174 | 0,7903 | 0,7523 | 0,6409 | 0,5442 | 0,4684 | 0,4091 | 0,3620 | 0,3238 | 0,2922 |
| 1,3 | 0,071139 | 0,5827 | 0,6387 | 0,5718 | 0,4969 | 0,4332 | 0,3814 | 0,3392 | 0,3046 | 0,2756 |
| 1,4 | 0,0050 | 0,2895 | 0,4437 | 0,4466 | 0,4100 | 0,3684 | 0,3304 | 0,2975 | 0,2695 | 0,2454 |
| 1,5 | 0,0002 | 0,1298 | 0,2957 | 0,3415 | 0,3343 | 0,3112 | 0,2852 | 0,2606 | 0,2384 | 0,2187 |
| 1,6 | 0,0000 | 0,0535 | 0,1904 | 0,2567 | 0,2700 | 0,2615 | 0,2456 | 0,2280 | 0,2109 | 0,1951 |
| 1,7 | 0,0000 | 0,0205 | 0,1192 | 0,1902 | 0,2164 | 0,2189 | 0,2110 | 0,1994 | 0,1867 | 0,1743 |
| 1,8 | 0,0000 | 0,0074 | 0,0729 | 0,1393 | 0,1724 | 0,1826 | 0,1811 | 0,1743 | 0,1653 | 0,1558 |
| 1,9 | 0,0000 | 0,0025 | 0,0437 | 0,1010 | 0,1366 | 0,1519 | 0,1552 | 0,1523 | 0,1465 | 0,1394 |
| 2 | 0,0000 | 0,0008 | 0,0258 | 0,0727 | 0,1078 | 0,1261 | 0,1329 | 0,1331 | 0,1299 | 0,1249 |
| 2,5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0016 | 0,0129 | 0,0317 | 0,0488 | 0,0609 | 0,0682 | 0,0719 | 0,0732 |
| 3 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0021 | 0,0090 | 0,0187 | 0,0280 | 0,0354 | 0,0406 | 0,0439 |
| $Kp, \text{в.о.}$ | Коефіцієнт варіації, Cv | | | | | | | | | |
| | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 | 1,6 | 1,7 | 1,8 | 1,9 | 2,0 |
| 0,1 | 0,9581 | 1,1032 | 1,2115 | 1,2865 | 1,3334 | 1,3576 | 1,3641 | 1,3570 | 1,3396 | 1,3147 |
| 0,2 | 0,9187 | 0,9485 | 0,9570 | 0,9506 | 0,9339 | 0,9103 | 0,8823 | 0,8517 | 0,8199 | 0,7875 |
| 0,3 | 0,8296 | 0,8130 | 0,7880 | 0,7582 | 0,7261 | 0,6932 | 0,6605 | 0,6286 | 0,5979 | 0,5685 |
| 0,4 | 0,7371 | 0,7010 | 0,6638 | 0,6271 | 0,5918 | 0,5583 | 0,5268 | 0,4973 | 0,4698 | 0,4441 |
| 0,5 | 0,6516 | 0,6082 | 0,5677 | 0,5303 | 0,4960 | 0,4645 | 0,4357 | 0,4092 | 0,3850 | 0,3627 |
| 0,6 | 0,5755 | 0,5308 | 0,4910 | 0,4554 | 0,4235 | 0,3949 | 0,3690 | 0,3455 | 0,3242 | 0,3048 |
| 0,7 | 0,5086 | 0,4657 | 0,4284 | 0,3956 | 0,3667 | 0,3409 | 0,3179 | 0,2972 | 0,2784 | 0,2615 |
| 0,75 | 0,4783 | 0,4370 | 0,4012 | 0,3700 | 0,3426 | 0,3182 | 0,2965 | 0,2770 | 0,2595 | 0,2436 |
| 0,8 | 0,4500 | 0,4104 | 0,3764 | 0,3468 | 0,3208 | 0,2978 | 0,2774 | 0,2591 | 0,2426 | 0,2277 |
| 0,85 | 0,4236 | 0,3859 | 0,3536 | 0,3256 | 0,3010 | 0,2794 | 0,2601 | 0,2429 | 0,2274 | 0,2134 |
| 0,9 | 0,3990 | 0,3632 | 0,3326 | 0,3061 | 0,2830 | 0,2626 | 0,2445 | 0,2283 | 0,2138 | 0,2006 |
| 0,95 | 0,3759 | 0,3421 | 0,3133 | 0,2883 | 0,2666 | 0,2474 | 0,2303 | 0,2151 | 0,2014 | 0,1890 |
| 1 | 0,3543 | 0,3225 | 0,2954 | 0,2719 | 0,2514 | 0,2334 | 0,2173 | 0,2030 | 0,1901 | 0,1784 |
| 1,05 | 0,3342 | 0,3043 | 0,2788 | 0,2568 | 0,2375 | 0,2205 | 0,2054 | 0,1919 | 0,1798 | 0,1688 |
| 1,1 | 0,3153 | 0,2874 | 0,2635 | 0,2428 | 0,2247 | 0,2087 | 0,1945 | 0,1817 | 0,1703 | 0,1599 |
| 1,15 | 0,2977 | 0,2716 | 0,2492 | 0,2298 | 0,2128 | 0,1977 | 0,1844 | 0,1724 | 0,1616 | 0,1518 |
| 1,2 | 0,2811 | 0,2568 | 0,2359 | 0,2177 | 0,2017 | 0,1876 | 0,1750 | 0,1637 | 0,1535 | 0,1443 |
| 1,25 | 0,2656 | 0,2430 | 0,2235 | 0,2065 | 0,1915 | 0,1782 | 0,1664 | 0,1557 | 0,1461 | 0,1374 |
| 1,3 | 0,2511 | 0,2301 | 0,2119 | 0,1960 | 0,1819 | 0,1695 | 0,1583 | 0,1482 | 0,1392 | 0,1309 |
| 1,4 | 0,2247 | 0,2067 | 0,1909 | 0,1770 | 0,1647 | 0,1537 | 0,1438 | 0,1348 | 0,1267 | 0,1193 |
| 1,5 | 0,2014 | 0,1861 | 0,1725 | 0,1604 | 0,1496 | 0,1399 | 0,1311 | 0,1231 | 0,1159 | 0,1093 |
| 1,6 | 0,1808 | 0,1679 | 0,1562 | 0,1458 | 0,1363 | 0,1277 | 0,1199 | 0,1128 | 0,1063 | 0,1004 |
| 1,7 | 0,1626 | 0,1517 | 0,1418 | 0,1328 | 0,1245 | 0,1170 | 0,1100 | 0,1037 | 0,0979 | 0,0925 |
| 1,8 | 0,1464 | 0,1374 | 0,1290 | 0,1212 | 0,1140 | 0,1074 | 0,1012 | 0,0956 | 0,0904 | 0,0856 |
| 1,9 | 0,1320 | 0,1247 | 0,1176 | 0,1109 | 0,1046 | 0,0988 | 0,0934 | 0,0883 | 0,0837 | 0,0793 |
| 2 | 0,1192 | 0,1133 | 0,1074 | 0,1017 | 0,0962 | 0,0911 | 0,0863 | 0,0818 | 0,0776 | 0,0737 |
| 2,5 | 0,0729 | 0,0716 | 0,0697 | 0,0674 | 0,0650 | 0,0624 | 0,0599 | 0,0574 | 0,0550 | 0,0526 |
| 3 | 0,0458 | 0,0466 | 0,0467 | 0,0462 | 0,0454 | 0,0443 | 0,0431 | 0,0418 | 0,0404 | 0,0390 |

Висновки. Розроблено метод розрахунку функції диференційної щільності трипараметричного імовірнісного розподілу витрат води стоку річки на основі застосування інтерполяційної процедури з використанням сплайнів в околі полюсів гамма-функції, який дозволяє виконувати розрахунки за довільних значень коефіцієнтів варіації та асиметрії для врахування природоохоронних обмежень на використання води для виробництва електроенергії.

З метою забезпечення можливості використання результатів проведеного дослідження інженерними та проектними службами при виконанні гідрологічних та гідротехнічних розрахунків річок з будь-якими гідрологічними параметрами стоку, сформовано таблиці значень функції диференційної щільності імовірнісного трипараметричного гамма-розподілу витрат води, заданих модульними коефіцієнтами K_p , за зміни коефіцієнта варіації C_v в діапазоні $0,1 \div 2$ з кроком $0,1$ і $C_s/C_v = 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4$. За необхідності отримання даних при гідрологічних параметрів стоку, що не представлені в таблицях, можливе виконання інтерполяції табличних значень.

1. *Васько П.Ф., Мороз А.В.* Законодательные стимулы и природоохранные ограничения использования гидроэнергетических ресурсов малых рек Украины. Альтернативная энергетика и экология (ISJAEE). 2014. № 15(155). С. 82-92. ISSN 1608-8298.

2. *Васько П.Ф.* Сучасний стан, потенційні можливості та передумови подальшого розвитку малої гідроенергетики в Україні. Відновлювана енергетика. 2006. №1. С. 60-65.

3. *Васько П.Ф., Мороз А.В.* Потенціал використання гідроенергетичних ресурсів основних малих річок України. Відновлювана енергетика. 2016. № 3. С. 50-56.

4. *Васько П.Ф., Ібрагімова М.Р.* Основні положення створення «зелених» малих ГЕС. Тези IV міжнар. наук.-практ. конф. «Оптимальне керування електроустановками – ОКЕУ'2017». Вінниця. 2017. [Електронний ресурс]. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/okeu/okeu/paper/viewFile/3520/2979> (дата звернення: 06.05.2019).

5. *Васько П.Ф., Ібрагімова М.Р.* Энергетическая эффективность малой гидроэлектростанции при экологических ограничениях на использование стока воды реки для производства электроэнергии. Альтернативная энергетика и экология (ISJAEE). 2017. № 04-06(216-218). С.103-115. ISSN 1608-8298.

6. *Ібрагімова М.Р.* Визначення проектних параметрів малої ГЕС за регулювання потужності по водотоку. Відновлювана енергетика. 2016. № 1. С. 55-60. ISSN 1819-8058.

7. *Малинин Н.К.* Теоретические основы гидроэнергетики. Москва. Энергоатомиздат. 1985. 312 с.

8. *Васько П.Ф., Бриль А.А., Мороз А.В., Озорин Д.Ф.* Расчет теоретического значения гидроэнергетического потенциала малых рек с учетом обеспеченности стока воды. Альтернативная энергетика и экология (ISJAEE). 2012. № 07(111). С. 124-132. ISSN 1608-8298.

9. *Блохинов Е.Г.* Распределение вероятностей величин речного стока. Москва. Наука. 1974. 169 с.

10. *Дружинин В.С., Сикан А.В.* Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. Учебное пособие. Направление «Гидрометеорология». Специальность «Гидрология». Санкт-Петербург. изд. РГГМУ. 2001. 170 с.

11. ДБН В.2.4-8:2014 Визначення розрахункових гідрологічних характеристик. Київ: Мінрегіон України. 2015. 107 с.

12. Речной сток и его характеристики. Ремонт Строительство Интерьер. 2015. [Електронний ресурс].

URL: <http://industrial-wood.ru/transport-lesa/6199-rechnoy-stok-i-ego-harakteristiki.html> (дата звернення: 06.05.2019).

13. Guiding Principles. Sustainable Hydropower Development in the Danube Basin. International Commission for the Protection of the Danube River. 2013. [Електронний ресурс]. URL: <http://www.icpdr.org/main/activities-projects/hydropower> (дата звернення: 24.04.2019).

14. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. Москва. Главная редакция физико-математической литературы. 1980. 352 с.

15. *Шикин Е.В., Плис Л.И.* Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. Мшсква: ДИАЛОГ-МИФИ. 1996. 240 с.

16. *Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов Б.А.* Сплайны в инженерной геометрии. Москва. Машиностроение. 1985. 224 с.

17. *Яцик А.В., Бишовець Л.Б., Богатов С.О. та ін.* Малі річки України: Довідник За ред. А.В. Яцика. Київ. Урожай. 1991. 296 с.

18. Справочник по водным ресурсам Под ред. Б.И. Стрельца. Киев. Урожай. 1987. 304 с.

REFERENCES

1. *Vasko P.F., Moroz A.V.* Zakonodatelnye stimuly i prirodookhrannye ogranicheniya ispolzovaniya gidroenergeticheskikh resursov malykh rek Ukrainy. [Legislative Incentives and Environmental Restrictions on the Use of Hydropower Resources of Small Rivers of Ukraine]. International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology (ISJAEE). 2014. No. 15. Pp.82-92. [in Russian].

2. *Vasko P.F.* Suchasnyi stan, potentsiini mozhlyvosti ta peredumovy podalshoho rozvytku maloї hidroenerhetyky v Ukraini. [Current state, potential opportunities and prerequisites for the further development to small hydropower in Ukraine]. Vidnovlyvana energetika. 2006. No. 1. Pp. 60-66. [in Ukrainian].

3. *Vasko P.F., Moroz A.V.* Potencial vykorystannja ghidroenerghetychnykh resursiv osnovnykh malykh richok Ukrainy. [The potential use of hydropower resources of main small rivers of Ukraine]. Vidnovlyvana energetika. 2016. No. 3. Pp. 50-56. [in Ukrainian].

4. *Vasko P.F., Ibragimova M.R.* Osnovni polozhennja stvorennja «zelenykh» malykh GhES. [Basic regulations for construction of "green" small hydropower plants]. Abstracts of IV Scientific-practical Conf. "Optimal Control of Electrical Installations - OKEU'2017". Vinnytsia. 2017. [Electronic resource]. URL: <https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/okeu/okeu/paper/viewFile/3520/2979> (Applying date: 06.05.2019). [in Ukrainian].

5. *Vasko P.F., Ibragimova M.R.* Jenergeticheskaja jeffektivnost maloї gidrojelektrostantsii pri jekologicheskikh ogranichenijah na ispolzovanie stoka vody reki dlja proizvodstva jelektrojenerгии. [Energy efficiency of small hydropower plant through environmental restrictions on water use for power generation]. International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology (ISJAEE). 2017. No. 04-06(216-218). Pp. 103-115.

ISSN 1608 – 8298. [in Russian].

6. *Ibragimova M.R.* Vyznachennja proektnykh parametriv maloji GhES za reghuljuvannja potuzhnosti po vodotoku. [Determination of design parameters of a small hydroelectric power plant for capacity regulation by water flow]. Vidnovlujana energetika. 2016. No. 1. Pp. 55-60. [in Ukrainian].

7. *Malynyn N.K.* Teoretycheskye osnovy ghydroenerghetyky. [Theoretical basics of hydropower]. Moscow. Energhoatomyzdat. 1985. 312 p. [in Russian].

8. *Vasko P.F., Bril A.O., Moroz A.V., Ozorin D.F.* Raschet teoreticheskogo znacheniya gidroenergeticheskogo potentsiala malyx rek s uchedom obespechennosti stoka vody. [Calculation of the theoretical value of the hydropower potential of small rivers, taking into account the availability of water flow]. International Scientific Journal for Alternative Energy and Ecology (ISJAE). 2012. No. 7. Pp.126-132. [in Russian].

9. *Blokhinov E.G.* Raspredelelye verojatnostej velychyn rechnogho stoka. [Probability distribution of river runoff values]. Moscow. Science. 1974. 169 p. [in Russian].

10. *Druzhynyn V.S., Sykan A.V.* Metody statystycheskoj obrabotky ghydrometeorologhycheskoj ynformacyy. [Methods of statistical processing of hydrometeorological information]. St. Petersburg. RGGMU ed. 2001. 170 p. [in Russian].

11. DBN B.2.4-8:2014 Vyznachennja rozrakhunkovykh ghydrologhychnykh kharakterystyk. [DBN B.2.4-8: 2014 Determination of calculated hydrological characteristics]. Kyiv. Ministry of Regional Development of Ukraine. 2015. 107 p. [in Ukrainian].

12. Rechnoj stok y eghe kharakterystyky. [The river flow and its characteristics]. Repair Construction Interior. 2015. [Electronic resource]. URL: <http://industrial-wood.ru/transport-lesa/6199-rechnoy-stok-i-ego-harakteristiki.html> (Applying date: 06.05.2019). [in Russian].

13. Guiding Principles. Sustainable Hydropower Development in the Danube Basin. International Commission for the Protection of the Danube River, 2013. [Electronic resource]. URL: <http://www.icpdr.org/main/activities-projects/hydropower> (Applying date: 24.04.2018). [in English].

14. *Zavyalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.* Metody splajn-funkcyj. [Methods of spline functions]. Moscow. The main edition of the physical and mathematical literature. 1980. 352 p. [in Russian].

15. *Shikin E.V., Plis L.I.* Kryvye y poverkhnosty na ekrane kompjutera. Rukovodstvo po splajnam dlja polzovatelej. [Curves and surfaces on a computer screen. Spline guide for users]. Moscow. DIALOGUE-MIFI. 1996. 240 p. [in Russian].

16. *Zavyalov Yu.S., Leus V.A., Skorospelov B.A.* Splajny v ynzhennerghoj gheometryy. [Splines in engineering geometry]. Moscow. Engineering. 1985. 222 p. [in Russian].

17. *Yatsik A.V., Byshovets L.B., Rich E.O. and others.* Mali richky Ukrajinu: Dovidnyk. [Small Rivers of Ukraine: Handbook]. Kyiv. Urozhaj. 1991. 296 p. [in Ukrainian].

18. *Streljc B.Y.* Spravochnyk po vodnym resursam. [Handbook of Water Resources]. Kyiv. Urozhaj. 1987. 304 p. [in Russian].

МЕТОД РАСЧЕТА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТНОГО ТРИПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАСХОДОВ СТОКА РЕКИ В ЗАДАЧАХ ГИДРОЭНЕРГЕТИКИ

М.Р. Ибрагимов

Институт возобновляемой энергетики НАН Украины,
02094, г. Киев, ул. Гната Хоткевича, 20А
тел./факс: +38-044-206-28-09, e-mail: hydro@ive.org.ua

Ожидаемый в ближайшем будущем дефицит углеводородов, растущее давление на экологию и ресурсообеспечение существования человечества – основные триггеры трансформации энергетической отрасли. Развитие малой гидроэнергетики также должно соответствовать рациональному использованию водного ресурса, сохранению и возможному восстановлению речной системы, минимизации антропогенного воздействия. Данная статья направлена на решение актуального вопроса создания малых гидроэлектростанций, технологические режимы работы которых соответствуют принципам рационального гидроэнергетического водопользования с учетом природоохранных ограничений на использование воды для производства электроэнергии. Автором приведены преимущества использования функции дифференциальной плотности вероятностного распределения расходов стока реки над традиционно применяемой интегральной функцией распределения при анализе гидроэнергетических показателей эксплуатации малых ГЭС. Проведенный анализ предыдущих исследований дифференциальной плотности показал отсутствие обобщенных результатов по определению данной функции в виде, необходимом для дальнейших практических применений. Впервые разработан метод расчета функции дифференциальной плотности вероятностного трехпараметрического гамма-распределения расходов стока реки при произвольных значениях коэффициентов вариации и асимметрии на основе применения интерполяции кубическими сплайнами в окрестности полюсов гамма-функции. Материалы статьи содержат результаты проведенного исследования в виде таблиц значений функции дифференциальной плотности вероятностного гамма-распределения расходов воды. Указанные таблицы рекомендуются к применению инженерами и проектными службами при выполнении гидрологических и гидротехнических расчетов в задачах гидроэнергетики. Библ. 18, табл. 3, рис. 3.

Ключевые слова: расходы воды, вероятность, интерполяция, дифференциальная плотность, обеспеченность, распределение.

Стаття надійшла до редакції 18.09.19

Остаточна версія 23.09.19