УДК 517.946

Т.В. Денисова, В.С. Проценко

Об интегральном преобразовании Фурье на «вилке» и некоторых его приложениях

Харьковский национальный экономический университет
Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

Получено интегральное представление функции, заданной на двух равных отрезках и присоединенной к ним полупрямой, по собственным функциям некоторой неклассической спектральной задачи. Это представление является обобщением известного преобразования Фурье и находит применение при решении новых задач математической физики для составных тел (струн, стержней, пластин и др.).

Ключевые слова: обобщенное преобразование Фурье, неклассические задачи математической физики, трехзвенная струна, многолистная пластина, точные решения.

Введение

Общеизвестна роль классических интегральных преобразований (Фурье, Меллина, Лапласа, Ханкеля, Мелера – Фока, Конторовича – Лебедева и др.) в математической физике. В 80-х годах прошлого века появились работы [1, 2], в которых получены новые интегральные преобразования для решения задач математической физики составных тел. В настоящей статье приведено новое обобщение интегрального преобразования Фурье и даны его простейшие приложения.

1. Интегральное преобразование Фурье на полупрямой с разветвлением («вилке»)

Будем рассматривать задачу Штурма – Лиувилля на «вилке» L (рис. 1):

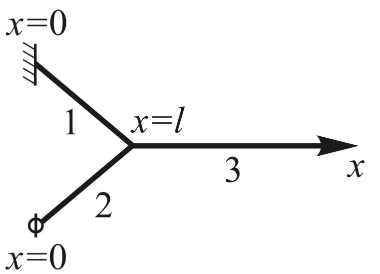

Рис. 1. «Вилка»

$$\begin{gathered} y'' + \lambda^2 y = 0, \quad x \in L = (l_1 \cup l_2 \cup l_3), \\ l_1 = l_2 = (0,l), \quad l_3 = (x > l), \\ y_1(0) = y_2'(0) = 0, \quad y_3(\infty) < \infty, \\ y_1(l) = y_2(l) = y_3(l), \\ \gamma_1 y_1'(l) + \gamma_2 y_2'(l) = y_3'(l), \end{gathered} \tag{1.1}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют участкам l_1, l_2, l_3.

Собственные функции этой задачи такие:

$$y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} \cos\lambda l \cdot \sin\lambda x, & x \in l_1, \\ \sin\lambda l \cdot \cos\lambda x, & x \in l_2, \\ \omega \sin\lambda(x-l) + 1/2 \sin 2\lambda l \cdot \cos\lambda(x-l), & x \in l_3, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\omega = \gamma_1 \cos^2 \lambda l - \gamma_2 \sin^2 \lambda l$, $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$.

Пусть на «вилке» L задана функция

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in l_1, \\ f_2(x), & x\in l_2, \\ f_3(x), & x\in l_3. \end{cases} \tag{1.3}$$

Тогда имеет место интегральное разложение функции $f(x)$ по собственным функциям (1.2) спектральной задачи (1.1):

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{y(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}d\lambda\int\limits_L f(\xi)y(\xi,\lambda)\rho(\xi)d\xi\,,\quad \rho(x)=\begin{cases} \gamma_1, & x\in l_1, \\ \gamma_2, & x\in l_2, \\ 1, & x\in l_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\Delta(\lambda)=4\omega^2+sin^2 2\lambda l\,,\quad x\in L\,.$$

Формула (1.4) получена операционным методом [1], класс функций, для которых она справедлива, совпадает с тем же классом, для которого развита теория классического преобразования Фурье [2].

2. Применение к задачам математической физики

2.1. Малые колебания трехзвенной струны со смешанными краевыми условиями

Полубесконечная однородная струна имеет вид «вилки», представленной на рис. 1, звенья расположены на плоскости так, что система находится в равновесии. Условия закрепления коротких звеньев струны смешанные: край звена 2 свободен, край звена 1 неподвижно закреплен. Рассматриваются свободные колебания струны.

Задача сводится к интегрированию уравнения колебания

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

с краевыми условиями:

$$u'_{2x}(0,t)=u_1(0,t)=0\,,\; u_3(\infty,t)<\infty\,,$$

и условиями сопряжения в узле $x=l$:

$$u_1=u_2=u_3\,,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}=\frac{\partial u_3}{\partial x}\,,$$

где u_k – смещение звена с номером k.

Начальные условия примем такими:

$$u_k(x,0) = f_k(x), \quad \left.\frac{\partial u_k}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{2.2}$$

Решение задачи будем искать в виде

$$u_k(x,t) = \int_0^\infty A(\lambda) y_k(x,\lambda) \cos \lambda t \, d\lambda, \tag{2.3}$$

где $y_k(x,\lambda)$ – решения (1.2) с $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Пусть $f(x)$ – вектор-функция вида (2.2), составленная из начальных функций (1.6). При $t = 0$ из (2.3) получим равенство

$$f(x) = \int_0^\infty A(\lambda) y(x,\lambda) d\lambda, \quad x \in L, \tag{2.4}$$

из которого надо найти $A(\lambda)$. Для этого воспользуемся разложением (1.4). В результате получим

$$A(\lambda) = \frac{8}{\pi \Delta(\lambda)} \int_L f(\xi) y(\xi,\lambda) \rho(\xi) d\xi, \tag{2.5}$$

где $y(x,\lambda)$ – собственная функция (1.2).

Поставленная задача решена. Исследование явления отражения и преломления бегущих волн в такой струне требует отдельного рассмотрения.

2.2. Задача стационарной теплопроводности в трехлистной пластине

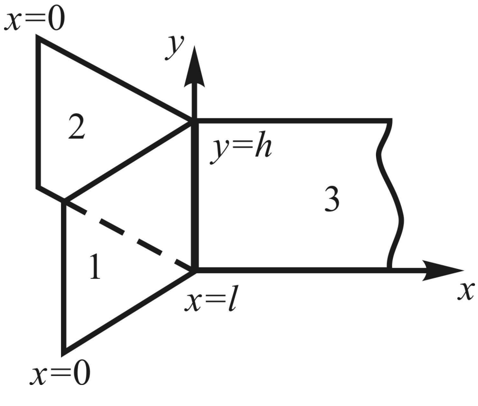

Рис. 2. Трехлистная пластина

Пластина составлена из трех листов (рис. 2) с разными коэффициентами теплопроводности. На линиях $x = 0$ краевые условия примем нулевыми, на линии $y = 0$ (верхняя «вилка») и $y = h$ (нижняя «вилка») краевые условия берем смешанными:

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \; u_1(0,y) = 0, \; u_3(\infty,y) < \infty, \tag{2.6}$$

$$\left.\frac{\partial u_k}{\partial y}\right|_{y=0} = f_k^0(x), \quad u_k(x,h) = f_k^h(x). \tag{2.7}$$

Задача состоит в нахождении решения в областях 1, 2, 3 уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

с краевыми условиями (2.6), (2.7) и условиями сопряжения температурных полей на линии $x = l$:

$$u_1(l,y)=u_2(l,y)=u_3(l,y), \quad \gamma_1 u_{1_x}'(l,y)+\gamma_2 u_{2_x}'(l,y)=u_{3_x}'(l,y), \quad 0\le y\le h,$$

где $\gamma_1=\mu_1/\mu_3$, $\gamma_2=\mu_2/\mu_3$, μ_k – коэффициент теплопроводности k-й пластины.

Искомую функцию $u(x,y)=(u_1,u_2,u_3)^T$ представим в виде

$$u(x,y)=\int_0^\infty [A(\lambda)sh\lambda y+B(\lambda)ch\lambda y]z(x,\lambda)d\lambda, \tag{2.8}$$

где $z(x,\lambda)$ – собственная функция (1.2) задачи (1.1), $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ – функции, подлежащие определению из граничных условий на границах $y=0$ и $y=h$.

Из этих граничных условий найдем

$$\int_0^\infty A(\lambda)\lambda\, z(x,\lambda)d\lambda = f^0(x),$$

$$\int_0^\infty [A(\lambda)sh\lambda h+B(\lambda)ch\lambda h]z(x,\lambda)d\lambda = f^h(x), \tag{2.9}$$

$$f^0(x)=\left(f_1^0, f_2^0, f_3^0\right)^T, \quad f^h(x)=\left(f_1^h, f_2^h, f_3^h\right)^T, \quad 0\le x\le h.$$

С помощью формулы (1.4) обращаем эти равенства. В результате получим

$$A(\lambda)\lambda=\frac{8}{\pi\Delta(\lambda)}\int_L f^0(\xi)z(\xi,\lambda)\rho(\xi)d\xi,$$

$$A(\lambda)sh\lambda h+B(\lambda)ch\lambda h=\frac{8}{\pi\Delta(\lambda)}\int_L f^h(\xi)z(\xi,\lambda)\rho(\xi)d\xi.$$

Неизвестные функции легко определяются из этой системы.

Замечание. Таким же методом могут быть решены нестационарная задача теплопроводности [3] и задача с ненулевыми граничными условиями (2.6).

Выводы

1. Найдено новое интегральное преобразование Фурье на разветвленной полупрямой, которое позволило расширить класс задач математической физики, решаемых в явном виде.

2. В качестве простейших примеров применения нового преобразования получены точные решения задачи о колебании полубесконечной трехзвенной струны и стационарной задачи теплопроводности для неоднородной трехлистной пластины.

Список литературы

1. Уфлянд, Я.С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] // Вопросы математической физики. – Л. : «Наука», 1976. – С. 93 – 106.

2. Ефимова, И.Т. Об одном классе сингулярных задач, разрешимых с помощью специальных интегральных преобразований по цилиндрическим функциям [Текст] / И.Т. Ефимова // Дифференциальные уравнения. – 1972. – №5. – т. VIII, – С. 817 –822.

3. Денисова, Т.В. Нестационарные температурные поля в тонких составных пластинах и оболочках [Текст] / Т.В. Денисова, В.С. Проценко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 56. – Х., 2012. – С. 98 – 106.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 09.09.2013

Про інтегральне перетворення Фур’є на «виделці» та деякі його застосування

Отримано інтегральне подання функції, заданої на двох рівних відрізках і приєднаної до них напівпрямої, за власними функціями деякої некласичної спектральної задачі. Це подання є узагальненням відомого перетворення Фур’є і застосовується при розв’язанні деяких нових задач математичної фізики для складених тіл (струн, стрижнів, платівок та ін.).

Ключові слова: узагальнене перетворення Фур’є, некласичні задачі математичної фізики, триланкова струна, багатолистна платівка, точні розв’язки.

On the integral Fourier transform on the «fork» and some of its applications

An integral representation of a function, given on the two equal segments and attached to them half-line, of the eigenfunctions of the non-classical spectral problem is obtained. This representation is a generalization of the known Fourier transform and is used to solve some new problems of the mathematical physics for composite objects (strings, bars, plates, etc.)

Keywords: generalized Fourier transform, non-classical problems of the mathematical physics, three-link string, multisheet plate, the exact solutions.