УДК 517.946

В.С. Проценко, Т.В. Денисова

Гибридные интегральные преобразования со смешанным спектром с приложением к новому классу задач математической физики

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»
Харьковский национальный экономический университет им. Семена Кузнеца

Предложено новое гибридное интегральное преобразование на основе собственных функций сингулярной задачи Штурма – Лиувилля со смешанным спектром. С его помощью получено точное решение одной задачи математической физики для системы соединенных между собой прямоугольных пластин. Отмечены частные случаи найденных формул и возможные обобщения.

Ключевые слова: неклассическая задача Штурма – Лиувилля, гибридное интегральное преобразование, смешанный спектр, многолистная пластина из прямоугольных компонент.

Введение

Классические интегральные преобразования [1] базируются на собственных функциях задач Штурма – Лиувилля с непрерывным спектром. К этому же классу интегральных преобразований относятся гибридные интегральные преобразования (ГИП) [2 – 4], которые появились в 80-е годы прошлого столетия в связи с решением краевых задач математической физики для неоднородных сред с кусочно-непрерывными материальными характеристиками. В настоящей статье получены новые ГИП, построенные на основе собственных функций неклассических спектральных задач Штурма – Лиувилля со смешанным спектром. К задачам такого типа относятся задачи математической физики для полубесконечных многозвенных стержней, многокомпонентных составных пластин, полубесконечных стержней с петлей на крае и др.

1. Гибридное интегральное преобразование

Рассмотрим спектральную задачу Штурма – Лиувилля на графе (рис. 1)

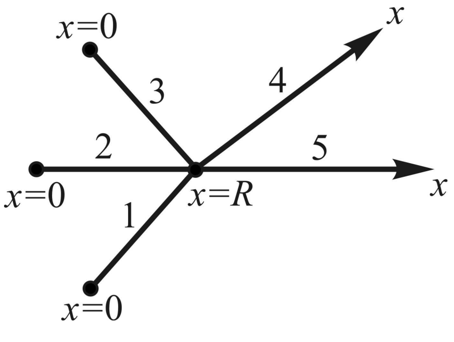

Рис. 1. Граф спектральной задачи

$$y_k'' + \lambda^2 \rho(x) y_k = 0, \tag{1.1}$$

где $\rho(x)=1$, когда $x\in(0,R)$, $\rho(x)=e^{2x}$, когда $x>R$.

Краевые условия на краях коротких звеньев $(k=1,2,3)$, т.е. в точках $x=0$, имеют вид

$$y_k'(0) - h y_k(0) = 0, \quad h>0 \tag{1.2}$$

на двух полубесконечных звеньях $(k=4,5)$ $y_k(x)\to 0$, когда $x\to\infty$.

В точке сопряжения звеньев $x=R$ принимаем условия:

$$y_{k+1}(R) = y_k(R), \quad k=\overline{1,4}, \qquad \sum_{k=1}^{3}\mu_k y_k'(R) = \sum_{k=4}^{5}\mu_k y_k'(R), \quad \mu_k>0. \tag{1.3}$$

Нетрудно показать, что спектр этой задачи – действительный и смешанный. Дискретная часть спектра определяется корнями уравнения

$$h\sin\lambda R + \lambda\cos\lambda R = 0\,. \tag{1.4}$$

Собственные функции $y = (y_1, y_2, \ldots, y_5)^T$ задачи для дискретной части спектра имеют вид

$$y_1(x,\lambda_n; A(n)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_1(n) \\ A_2(n) \\ A_3(n) \end{pmatrix} \cdot \varphi(x,\lambda), & x \in (0,R), \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & x > R, \end{cases} \tag{1.5}$$

где λ_n – положительные корни уравнения (1.4), $\mu_1 A_1(n) + \mu_2 A_2(n) + \mu_3 A_3(n) = 0$,

$$\varphi(x,\lambda) = h\sin\lambda x + \lambda\cos\lambda x\,. \tag{1.6}$$

Для непрерывной части спектра $\lambda \geq 0$ собственные функции будут такими:

$$y_2(x,\lambda; A(\lambda)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1(\lambda)\varphi(x,\lambda), & x \in (0,R), \\ \begin{pmatrix} A_2(\lambda) \\ A_3(\lambda) \end{pmatrix} \omega_1(x,\lambda) + A_1(\lambda)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\varphi(R,\lambda)\omega_2(x,\lambda), & x > R, \end{cases} \tag{1.7}$$

где $\mu_4 A_2(\lambda) + \mu_5 A_3(\lambda) = \dfrac{m}{\lambda} A_1(\lambda)\varphi'(R,\lambda)$, $m = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$, а $\omega_1(x,\lambda)$, $\omega_2(x,\lambda)$ – линейно независимые решения уравнения (1.1) на участке $x > R$, удовлетворяющие условиям:

$$\omega_1(R,\lambda) = 0\,,\ \ \omega_1'(R,\lambda) = \lambda\,;\ \ \ \omega_2(R,\lambda) = 1\,,\ \ \omega_2'(R,\lambda) = 0\,. \tag{1.8}$$

Явный вид функций $\omega_1(x,\lambda)$, $\omega_2(x,\lambda)$ определяют равенства:

$$\begin{gathered} \omega_1(x,\lambda) = \frac{\pi\lambda}{2}\left[Y_0\left(\lambda e^x\right)\cdot J_0(\lambda a) - J_0\left(\lambda e^x\right)\cdot Y_0(\lambda a)\right], \quad a = e^R, \\ \omega_2(x,\lambda) = \frac{\pi\lambda a}{2}\left[J_0\left(\lambda e^x\right)\cdot Y_0'(\lambda a) - Y_0\left(\lambda e^x\right)\cdot J_0'(\lambda a)\right], \end{gathered} \tag{1.9}$$

где $J_0(x)$, $Y_0(x)$ – функции Бесселя.

Особенностью собственных функций $y_1(x,\lambda_n; A(n))$, $y_2(x,\lambda; A(\lambda))$ задачи Штурма – Лиувилля (1.1 – 1.3) в отличие от классических является наличие в каждой из них двух произвольных констант.

Пусть задана функция $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x); f_4(x), f_5(x))^T$ на $l = (0,R) \cup (R,\infty)$. Надо обратить равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_1(x,\lambda_n; A(n)) + \int_0^{\infty} y_2(x,\lambda; A(\lambda))d\lambda\,, \quad x \in l\,, \tag{1.10}$$

т.е. найти неизвестные $A(n)$ и $A(\lambda)$.

Эту задачу можно решить обобщенным соответствующим образом методом Вейля – Титчмарша [1] или операционным методом [2 – 4]. Решение, полученное нами, имеет вид

$$A_1(n)=\frac{\beta_1(\mu_2+\mu_3)-\beta_2\mu_2-\beta_3\mu_3}{m},\quad A_2(n)=\frac{\beta_2(\mu_1+\mu_3)-\beta_1\mu_1-\beta_3\mu_3}{m},$$

$$A_3(n)=\frac{\beta_3(\mu_1+\mu_2)-\beta_1\mu_1-\beta_2\mu_2}{m},\quad \beta_k(n)=\frac{1}{\|\varphi(x,\lambda_n)\|^2}\int_0^R f_k(\xi)\varphi(\xi,\lambda_n)d\xi; \qquad (1.11)$$

$$A_1(\lambda)=\frac{\lambda}{A^2(\lambda)+B^2(\lambda)}\int_0^\infty F(\xi)\rho(\xi)z(\xi,\lambda)d\xi,\quad \rho(x)=\begin{cases}\dfrac{m}{\mu_4+\mu_5}, & x\in(0,R),\\ e^{2x}, & x>R,\end{cases} \qquad (1.12)$$

$$F(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\in(0,R),\\ F_2(x), & x>R,\end{cases}\quad F_1(x)=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{3}\mu_k f_k(x),\quad F_2(x)=\frac{1}{m_1}\sum_{k=4}^{5}\mu_k f_k(x),$$

$$m_1=\mu_4+\mu_5,\quad z(x,\lambda)=\begin{cases}\varphi(x,\lambda), & x\in(0,R),\\ \dfrac{m}{\lambda m_1}\varphi'(R,\lambda)\omega_1(x,\lambda)+\varphi(R,\lambda)\omega_2(x,\lambda), & x>R,\end{cases}$$

$$A_2(\lambda)=\frac{m}{\lambda m_1}\varphi'(R,\lambda)A_1(\lambda)-\frac{\mu_5}{m_1}(\alpha_4-\alpha_5),\ A_3(\lambda)=\frac{m}{\lambda m_1}\varphi'(R,\lambda)A_1(\lambda)+\frac{\mu_4}{m_1}(\alpha_4-\alpha_5),$$

$$\alpha_k(\lambda)=\frac{2}{\pi\left[J_0^2(\lambda a)+Y_0^2(\lambda a)\right]}\int_R^\infty f_k(\xi)e^{\xi}\omega_0(\xi,\lambda)d\xi, \qquad (1.13)$$

$$A(\lambda)=\frac{\pi\lambda}{2}\left[a\varphi(R,\lambda)Y_0'(\lambda a)-\frac{m}{\lambda}\varphi'(R,\lambda)Y_0(\lambda a)\right],$$

$$\omega_0(x,\lambda)=J_0\left(\lambda e^x\right)\cdot Y_0(\lambda a)-Y_0\left(\lambda e^x\right)\cdot Y_0(\lambda a), \qquad (1.14)$$

$$B(\lambda)=\frac{\pi\lambda}{2}\left[\frac{m}{\lambda}\varphi'(R,\lambda)J_0(\lambda a)-a\varphi(R,\lambda)J_0'(\lambda a)\right].$$

Формулы (1.10) и (1.11) – (1.14) определяют обратное и прямое ГИП Фурье – (Вебера – Орра). Класс функций, для которых справедливы эти формулы, такой же, как и в классических рядах Фурье и ИП Вебера – Орра.

Отметим частные случаи:

1) $h=0$, $\varphi(x,\lambda)=\lambda\cos\lambda x$, $\lambda_n=\frac{\pi}{2R}(2n-1)$, в точке $x=0$ $y'(0)=0$;

2) $h=\infty$, $\varphi(x,\lambda)=\sin\lambda x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{R}$, в точке $x=0$ $y(0)=0$.

2. Краевая задача для многолистной составной пластины

Найдем решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (2.1)$$

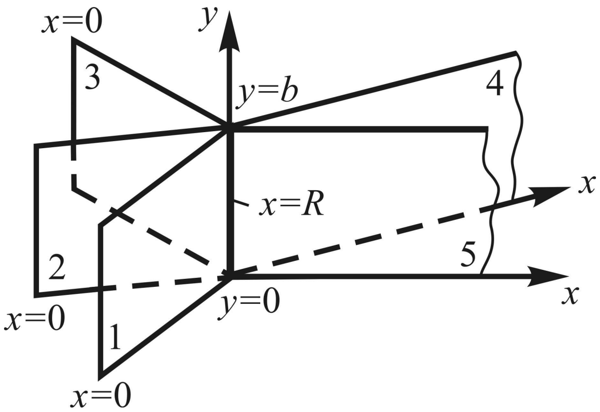

Рис. 2. Пятилистная пластина

в совокупности прямоугольных областей S_k, расположенных в пространстве (рис. 2), при однородных условиях $u'_x - hu = 0$ на ребрах $x = 0$ и условиях

$$u_k(x,0) = f_k(x),\ u'_y(x,b) = \varphi_k(x) \tag{2.2}$$

на горизонтальных прямых.

На бесконечности функция $u(x,y)$ ограничена, и ее составляющие u_k удовлетворяют условиям сопряжения вида (1.3).

Решение задачи представим в виде разложения по собственным функциям (1.5), (1.7):

$$u(x,y) = (u_1,...,u_5)^T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh\lambda_n y}{\lambda_n \cdot ch\lambda_n b} y_1(x,\lambda_n; A(n)) + \int_0^{\infty} \frac{sh\lambda y}{\lambda \cdot ch\lambda b} y_2(x,\lambda; A(\lambda)) d\lambda +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\lambda_n (y-b)}{ch\lambda_n b} y_1(x,\lambda_n; B(n)) + \int_0^{\infty} \frac{ch\lambda (y-b)}{ch\lambda b} y_2(x,\lambda; B(\lambda)) d\lambda, \tag{2.3}$$

где функции $A(n)$, $B(n)$, $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ подлежат определению из краевых условий на линиях $y = 0$ и $y = b$.

Полагаем в (2.1) $y = 0$ и $y = b$, тогда с учетом граничных условий найдем:

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} y_1(x,\lambda_n; B(n)) + \int_0^{\infty} y_2(x,\lambda; B(\lambda)) d\lambda = (f_1(x),\ldots,f_5(x))^T, \\ \sum_{n=1}^{\infty} y_1(x,\lambda_n; A(n)) + \int_0^{\infty} y_2(x,\lambda; A(\lambda)) d\lambda = (\varphi_1(x),\ldots,\varphi_5(x))^T. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Обращаем эти равенства независимо друг от друга по формулам (1.11) – (1.14). В результате найдем все неизвестные функции, входящие в (2.1), и тем самым точное решение поставленной краевой задачи.

Замечание. Решение задачи при ненулевых краевых условиях на вертикальных ребрах и нулевых условиях на горизонталях находится элементарно.

Заключение и выводы

1. Получены формулы прямого и обратного гибридного интегрального преобразования Фурье – (Вебера – Орра) на основе собственных функций спектральной задачи со смешанным спектром.
2. Установлено, что система собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (1.1) – (1.3) является полной в $L(0,\infty)$ на множестве функций ограниченных вариаций, заданных на графе (рис. 1).
3. Дано приложение найденных формул к решению задачи теории потенциала в многолистной пластине.

4. Метод может быть обобщен на N коротких и M полубесконечных звеньев с краевыми условиями первого, второго или третьего рода в точках $x = 0$.

Список литературы

1. Титчмарш, Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка [Текст] / Э.Ч. Титчмарш. – М. : Изд-во иностр. лит., 1960. – 278 с.

2. Проценко, В.С. О гибридных интегральных преобразованиях [Текст] / В.С. Проценко // Математические методы анализа динамических систем : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н.Е. Жуковского. – Вып. 3. – Х., 1979. – С. 3 – 6.

3. Проценко, В.С. Некоторые гибридные интегральные преобразования и их приложения в теории упругости неоднородных сред [Текст] / В.С. Проценко, А.И. Соловьев // Прикладная механика. – 1982. – Т.18. – №1. – С. 62 – 67.

4. Проценко, В.С. Гибридные интегральные преобразования Фурье – Ханкеля и некоторые задачи кручения кусочно-однородных тел [Текст] / В.С. Проценко, П.Т. Кощавец // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н.Е. Жуковского. – Вып. 1. – Х., 1978. – С. 120 – 125.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, проф. В.А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 28.11.2013

Гібридні інтегральні перетворення з мішаним спектром зі застосуванням до нового класу задач математичної фізики

Запропоновано нове гібридне інтегральне перетворення на основі власних функцій сингулярної задачі Штурма – Ліувілля з мішаним спектром. За його допомогою отримано точний розв’язок однієї задачі математичної фізики для системи з’єднаних між собою прямокутних пластин. Відзначено окремі випадки знайдених формул і можливі узагальнення.

Ключові слова: некласична задача Штурма – Ліувілля, гібридне інтегральне перетворення, мішаний спектр, багатолиста пластинах з прямокутних компонент.

Hybrid integral transformation with mixed spectrum with an application for a new class of the problems of mathematical physics

A new hybrid integral transformation on the basis of eigenfunctions of a singular Sturm - Liouville problem with mixed spectrum is proposed. With its help exact solution of one problem of mathematical physics for a system of interconnected rectangular plates is obtained. Particular cases of the found formulas and possible generalizations are marked.

Keywords: non-classical Sturm – Liouville problem, hybrid integral transformation, mixed spectrum, multisheet plate of the rectangular components.