УДК 533.694.73

В.Г. Жила

Енергетичний смисл індуктивного опору несучої поверхні

Національний авіаційний університет

Побудована енергетична модель індуктивного аеродинамічного опору крила скінченого розмаху. Енергетичним сенсом моделі є рівність між добутком сили індуктивного опору крила скінченого розмаху і його швидкості відносно потоку та величиною приросту за одиницю часу кінетичної енергії вихрової системи крила. Приріст цієї кінетичної енергії викликається відповідним збільшенням довжин повздовжніх частин П – подібного вихра за одиницю часу. Збільшення швидкостей часток потоку, пов'язане з видовженням вихра, підраховується за формулою Біо-Савара. Аналітично отримано вираз для підрахунку коефіцієнта сили індуктивного аеродинамічного опору крила скінченого розмаху, який за своєю структурою співпадає з загальновідомою формулою для підрахунку цього коефіцієнта. Вказано на можливість застосування енергетичного тлумачення походження індуктивного опору під час визначення аеродинамічних характеристик об'єктів методами дискретних вихорів.

Ключові слова: несуча поверхня, індуктивний опір, енергетичний підхід

1. Постановка задачі

Важливість такої аеродинамічної характеристики несучої поверхні як індуктивний опір загальновідома. Традиційне трактування природи індуктивного опору базується на явищі скосу потоку, який характеризується величиною кута відхилення потоку. Це дуже вдала та продуктивна модель взаємодії несучої поверхні з потоком. Вона дозволяє встановити кількісні співвідношення між величиною підйомної сили, що створюється несучою поверхнею, та додатковою силою аеродинамічного опору, яка виникає при цьому. Модель дозволяє враховувати вплив на величину індуктивного опору геометричних характеристик несучої поверхні та аеродинамічних характеристик її перетинів. Аналіз логіки побудови вказаної моделі індуктивного аеродинамічного опору дозволяє зробити висновок про те, що вона за своєю суттю є кінематичною. Перехід до динамічних величин, згідно цієї моделі, виконується шляхом достатньо штучного прийому, який полягає в гіпотетичному відхиленні на величину кута відхилення потоку вектора підйомної сили та розгляду її проекції на напрямок незбуреного потоку в якості індуктивного аеродинамічного опору. Кінематична сутність індуктивного опору в розглянутому сенсі обмежує його універсальність.

2. Мета досліджень

Метою даної статті була спроба дати походженню індуктивного опору енергетичне трактування та запропонувати відповідний підхід для його визначення. При цьому обов'язковою умовою має бути узгодженість запропонованого підходу з існуючим, оскільки останній є широковживаним і добре узгоджується з експериментальними результатами.

3. Побудова енергетичної моделі індуктивного опору несучої поверхні

Для пояснення суті енергетичного підходу до проблеми індуктивного опору несучої поверхні використаємо найпростішу вихрову модель крила скінченого

розмаху [1], схема якої наведена на рис.1. Відповідно до цієї схеми відрізок *ab* П - подібного вихра *cabc* є приєднаним вихором несучої поверхні *S*, відрізки *ab* та *bc* – кінцеві вихори, що продовжуються до нескінченності вздовж потоку. Під час руху несучої поверхні відносно потоку з швидкістю V_∞, за нескінченно малий проміжок часу dt довжина кінцевих вихорів збільшиться на величину $\delta x = V_\infty \cdot dt$ (символ δx використовується з метою уникнення в наступних формальних перетвореннях дублювання під час описання процедури інтегрування). Маючи певну напруженість, відрізки δx кінцевих вихорів створять (індукують) в просторі, що зайнятий потоком, додаткове поле швидкостей. Частки газу (рідини), що знаходяться в цьому просторі набудуть додаткових швидкостей. З цими додатковими швидкостями часток пов'язана їхня додаткова кінетична енергія. Зростання кінетичної енергії часток за одиницю часу характеризується потужністю енергії, що підводиться до потоку.

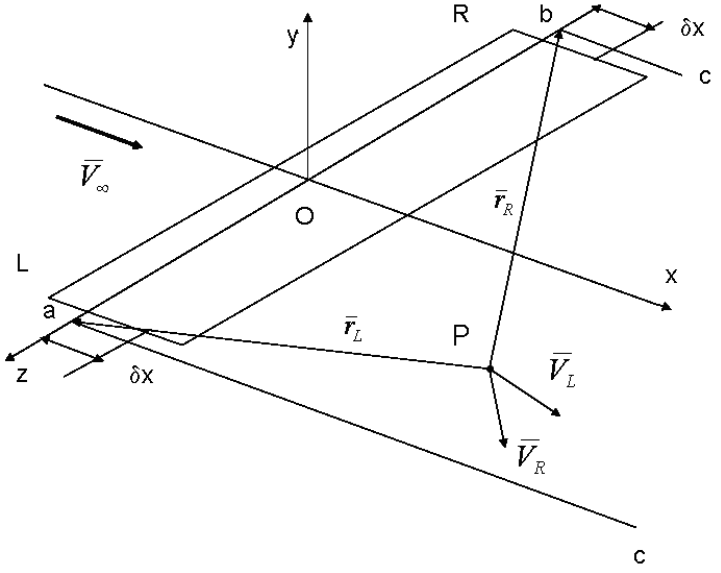

Рис. 1. Спрощена вихрова схема крила скінченого розмаху.

Джерелом енергії, що підводиться до потоку є несуча поверхня, яка рухається відносно середовища з швидкістю V_∞. Опір, що виникає під час руху несучої поверхні в присутності П – подібного вихра, будемо розуміти як індуктивний опір X_i. Добуток індуктивного опору X_i і швидкості несучої поверхні V_∞ визначає потужність, яка характеризує передачу енергії від крила до потоку (середовища). Кількісно зазначене твердження можна записати як рівність (1)

$$X_i \cdot V_\infty \cdot dt = \Delta E \qquad (1)$$

де ΔE - приріст кінетичної енергії потоку, викликаний подовженням кінцевих вихорів на величину δx.

Для підрахунку величини ΔE використовується схема, що наведена на рис. 1.

$$\Delta E = \iiint_{\infty} e(x,y,z)\,dx\,dy\,dz; \qquad (2)$$

Підінтегральна функція $e(x,y,z) = 0.5 \cdot \rho \cdot V^2$, де ρ - масова густина потоку (середовища), V - модуль сумарної індукованої швидкості в точці з координатами x,y,z.

$$\overline{V} = \overline{V_L} + \overline{V_R} \quad . \tag{3}$$

де $\overline{V_L}, \overline{V_R}$ - швидкості, що індукуються у вказаній точці лівими і правими ділянками δx кінцевих вихорів. Величини $\overline{V_L}, \overline{V_R}$ можна підрахувати за допомогою формули Біо-Савара

$$\overline{V_L} = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overline{r_L} \times \delta \overline{x}}{r_L^3}, \qquad \overline{V_R} = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\overline{r_R} \times \delta \overline{x}}{r_R^3} \tag{4}$$

де Γ - напруженість П – подібного вихра.

Вектори, що входять в останні два вирази можна записати у вигляді:

$\overline{V_L} = V_{Lx} \cdot \overline{i} + V_{Ly} \cdot \overline{j} + V_{Lz} \cdot \overline{k}$, $\overline{V_R} = V_{Rx} \cdot \overline{i} + V_{Ry} \cdot \overline{j} + V_{Rz} \cdot \overline{k}$,

$\overline{r_L} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + (z - l) \cdot \overline{k}$, $\overline{r_R} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + (z + l) \cdot \overline{k}$, $\delta \overline{x} = \delta x \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + 0 \cdot \overline{k}$.

де $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ - одиничні направляючі вектори координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно,

r_L, r_R - модулі радіусів-векторів (у відповідності до схеми на рис.1).

Виконання перетворень (4), (3) з заміною векторів відповідними виразами, що містять їхні проекції, дозволяє отримати вираз для підрахунку підінтегральної функції $e(x,y,z)$:

$$e(x,y,z) = f(x,y,z) \times \frac{\Gamma^2 \cdot \delta^2 x \cdot \rho}{32 \cdot \pi^2},$$

$$f(x,y,z) = \left[\frac{(z-l)}{\left(x^2 + y^2 + (z-l)^2\right)^{3/2}} + \frac{(z+l)}{\left(x^2 + y^2 + (z+l)^2\right)^{3/2}} \right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{y}{\left(x^2 + y^2 + (z-l)^2\right)^{3/2}} + \frac{y}{\left(x^2 + y^2 + (z+l)^2\right)^{3/2}} \right]^2$$

З урахуванням останнього виразу та виразу (2) рівняння (1) можна записати у вигляді:

$$X_i \cdot \delta x = \frac{\Gamma^2 \cdot \delta^2 x \cdot \rho}{32 \cdot \pi^2} \cdot \iiint_{\infty} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \tag{5}$$

Із рівняння зв'язку:

$c_{ya} \cdot \frac{\rho \cdot V_\infty^2}{2} \cdot S = \rho \cdot V_\infty \cdot \Gamma \cdot 2 \cdot l$ випливає, що

$$\Gamma = c_{ya} \cdot V_{\infty \cdot} \frac{S}{4 \cdot l}. \tag{6}$$

Оскільки

$X_i = c_{xi} \cdot \frac{\rho \cdot V_\infty^2}{2} \cdot S$, то із (5), враховуючи (6), випливає

$$c_{xi} = \frac{c_{ya}^2}{\pi \cdot \lambda} \cdot \frac{I \cdot \delta x}{64 \cdot \pi} \tag{7}$$

$$I = \iiint_{\infty} f(x,y,z)dx\,dy\,dz \tag{8}$$

Структура формули для підрахунку величини коефіцієнта індуктивного опору крила скінченого розмаху співпадає з відомим виразом, отриманим з кінематичного аналізу походження індуктивного опору крила скінченого розмаху. Величина δx у формулі (7) є одиницею довжини, а величина I визначається геометричними параметрами крила скінченого розмаху та геометрією його вихрової схеми.

З математичної точки зору I є значенням невласного потрійного інтеграла першого роду [2]. Ця обставина вимагає аналізу його збіжності, та ,вразі його збіжності, відповіді на питання щодо процедури його підрахунку. Інтеграл (8) збігається, оскільки підінтегральна функція

$f(x,y,z) \langle \varphi(x.y.z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, а, як відомо [2], невласний потрійний інтеграл першого роду з підінтегральною функцією $\varphi(x.y.z)$ збігається.

Знаходження числового значення інтеграла (8) з використанням числових методів не є принциповою проблемою.

Описану вище процедуру можна розглядати як алгоритм для розрахунку коефіцієнта індуктивного опору крила скінченого розмаху. Вказана процедура базується виключно на енергетичних уявленнях про природу індуктивного опору крила.

Пропозиція альтернативного нового підходу для розв'язку задач, які вже мають своє рішення завжди породжує питання про переваги та доцільність запропонованого підходу. Для відповіді на подібні питання у випадку енергетичної моделі індуктивного опору несучої поверхні найбільш доцільним є проведення ґрунтовного порівняльного аналізу процедури застосування енергетичної моделі та традиційних підходів і відповідно отриманих величин аеродинамічних коефіцієнтів. Проведення вказаного аналізу передбачається в подальшому. Але, заздалегідь, без будь-якого аналізу, безспірною перевагою запропонованого підходу можна вважати його фізичну універсальність – енергетичну основу.

4. Висновки щодо енергетичної моделі індуктивного опору несучої поверхні

1. Застосування енергетичної моделі індуктивного опору крила скінченого розмаху узгоджується з результатами визначення індуктивного опору відомими методами.

2. Енергетична модель індуктивного опору крила скінченого розмаху дозволяє підраховувати індуктивний опір безпосередньо, уникаючи розрахунку поля течії навколо крила.

3. Підхід, що лежить в основі енергетичної моделі індуктивного опору крила скінченого розмаху, зможе суттєво підвищити інформативність метода дискретних вихорів [3], дозволяючи одночасно з находженням напруженості окремих вихорів підраховувати їхній внесок в створення індуктивного опору несучої поверхні.

Список літератури

1. Аржаников Н,С., Мальцев В.Н. Аэродинамика. М.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1956, 484 стр.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984, 832 стр.
3. Белоцерковский С.М., Скрипач В.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971, 768 стр.

Рецензент: проф., д.т.н. Є. П. Ударцев, НАУ, Київ

Поступила в редакцию 13.12.2013

Энергетический смысл индуктивного сопротивления несущей поверхности

Построена энергетическая модель индуктивного аэродинамического сопротивления крыла конечного размаха. Энергетическим смыслом модели является равенство между произведением силы индуктивного сопротивления крыла конечного размаха и его скоростью относительно потока и величиной прироста в единицу времени кинетической энергии вихревой системы крыла. Прирост этой кинетической энергии вызывается соответствующим увеличением длин продольных частей П - образного вихря за единицу времени. Увеличение скоростей частиц потока, связанное с удлинением вихря, подсчитывается по формуле Био-Савара. Аналитически получено выражение для подсчета коэффициента силы индуктивного аэродинамического сопротивления крыла конечного размаха, которое по своей структуре совпадает с общеизвестной формулой для подсчета этого коэффициента. Указано на возможность применения энергетической трактовки происхождения индуктивного сопротивления при определении аэродинамических характеристик объектов методами дискретных вихрей.

Ключевые слова: несущая поверхность, индуктивное сопротивление, энергетический подход.

Energetic sense of induced drug of lift surface

Energetic model of the induced drag of the wing of finite span is created. The equilibrium between product of the induced drag of the wing and its relative velocity with respect to the flow and amount of the increasing of the kinetic energy of the vortexes system of the wing per time unit is energetic sense of the model. Increment of this kinetic energy is caused by the correspondent increasing of the length of trailing vortexes of the horseshoe vortex per time unit. Increment of flow particles velocities, caused by the increasing of the length of the horseshoe vortex is calculated using Biot-Savart law. Expression for calculation of the coefficient of induced drag of the wing was obtained mathematically; its structure coincides with well known formula for calculation of the coefficient of induced drag. It is noticed that there is possibility of application of the energetic sense of the induced drag when the vortex lattice method is used for calculation of aerodynamic performances.

Keywords: aerofoil of the finite span, induced drag, energetic approach.