УДК 517.946

Т. В. Денисова, В. С. Проценко

Об одной краевой задаче в составной полуполосе со смешанным спектром

Харьковский национальный экономический университет им.Семена Кузнеца
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Предложен метод решения краевой задачи для составной полуполосы на основе обобщения классического метода Фурье, который сводит проблему к спектральной задаче Штурма – Лиувилля на полубесконечном интервале со смешанным спектром. Для такой задачи построено интегральное преобразование на смешанном спектре типа синус-преобразования Фурье и найдено точное решение краевой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, составная полуполоса, интегральное преобразование, смешанный спектр, точное решение.

1. Постановка задачи

В полуполосе $(x>0, 0<y<h)$, составленной из двух разных материалов, нужно найти ограниченное на бесконечности решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\gamma(x)u=0, \tag{1.1}$$

где $\gamma(x)=\gamma_1$, когда $x\in[0,R)$ и $\gamma(x)=\gamma_2$, когда $x>R$ $(\gamma_1,\gamma_2>0)$, при заданных краевых условиях

$$u(0,y)=0, \quad 0\le y\le h, \tag{1.2}$$

$$u(x,0)=f_0(x), \ u(x,h)=f_1(x), \ x>0 \tag{1.3}$$

и условиях сопряжения сред

$$u(R-0,y)=u(R+0,y), \qquad \mu_1\frac{\partial u}{\partial x}=\mu_2\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x=R \quad (\mu_1,\mu_2>0). \tag{1.4}$$

Одной из физических интерпретаций этой задачи может быть задача об установившихся вынужденных гармонических колебаниях составной упругой полуполосы с закрепленным торцом [1]. Такая задача, насколько известно авторам, раннее не рассматривалась.

Метод разделения переменных приводит уравнение (1.1) к двум уравнениям

$$Y''-rY=0, \ X''+(r+\gamma(x))X=0, \tag{1.5}$$

где r – спектральный параметр (параметр разделения переменных).

Для второго уравнения (1.5) имеем из (1.2), (1.4) краевые условия

$$X(0)=0, \qquad X(\infty)<\infty \tag{1.6}$$

и условия сопряжения

$$X(R-0)=X(R+0), \ \mu_1X'(R-0)=\mu_2X'(R+0). \tag{1.7}$$

Краевая задача (1.5) – (1.7) – неклассическая задача Штурма – Лиувилля о нахождении собственных значений и собственных функций.

2. Спектр задачи Штурма – Лиувилля, интегральное преобразование

Исследуем спектр задачи (1.5) – (1.7). Нетрудно показать, что он вещественный, т.е. собственные значения r этой задачи – действительные числа. Найдем собственные функции,
отвечающие этим собственным значениям. Отдельно рассмотрим случаи $\gamma_1 > \gamma_2$ и $\gamma_1 < \gamma_2$.

Первый случай: $\gamma_1 > \gamma_2$. Введем обозначения $r + \gamma_2 = s$, $\gamma_1 - \gamma_2 = q > 0$, тогда
$r + \gamma_1 = s + q$, и рассмотрим возможные варианты:

а) $s < -q$, т.е. $r < -\gamma_1$. В этом случае

$$X = \begin{cases} A\sin\sqrt{s+q}\cdot x, & x \in (0,R), \\ Be^{-\sqrt{-s}\cdot(x-r)}, & x > R. \end{cases} \tag{2.1}$$

Условия сопряжения приводят к равенству $A = B = 0$. Собственных функций нет.

б) $-q < s < 0$ или $-\gamma_1 < r < -\gamma_2$. Решение (2.1) вместе с условием сопряжения дает уравнение $\mu_{21}\cdot tg(R\sqrt{s+q}) = -\sqrt{\dfrac{s+q}{-s}}$, $\mu_{21} = \mu_2/\mu_1$ (2.2)

для собственных значений и равенство $B = A\sin(R\sqrt{s+q})$.

Уравнение (2.2) имеет N действительных простых корней при условии $\pi(N - 1/2) < R\sqrt{q} \le \pi(N + 1/2)$, при $R\sqrt{q} \le \pi/2$ действительных корней нет. Значит,
совокупность значений $r_n = s_n - \gamma_2$ образуют дискретную часть спектра. Собственные
функции в этом случае таковы:

$$w(x,r_n) = \begin{cases} \sin(x\sqrt{r_n+\gamma_1}), & x \in (0,R), \\ \sin(R\sqrt{r_n+\gamma_1})\cdot e^{-\sqrt{-r_n-\gamma_2}\cdot(x-R)}, & x > R, \quad r_n \in (-\gamma_1, -\gamma_2). \end{cases} \tag{2.3}$$

в) $s > 0$ или $r > -\gamma_2$. В этом случае всякое r из указанного интервала есть собственное значение. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$z(x,r) = \begin{cases} \dfrac{\sin\omega_1 x}{\omega_1}, \quad x \in (0R), \qquad \omega_j = \sqrt{r+\gamma_j}, \\ (\mu_1/\mu_2)\dfrac{\cos\omega_1 R}{\omega_2}\sin\omega_2(x-R) + \dfrac{\sin\omega_1 R}{\omega_1}\cos\omega_2(x-R), \quad x > R. \end{cases} \tag{2.4}$$

Таким образом, рассматриваемая задача Штурма – Лиувилля на полубесконечном промежутке при $\gamma_1 > \gamma_2$ имеет смешанный спектр*.

* См. по этому поводу статьи [2, 5].

Второй случай: $\gamma_2 > \gamma_1$. В этом случае спектр задачи (Ш. – Л.) непрерывный и
$r \in (-\gamma_2, +\infty)$, соответствующее интегральное преобразование приведено в работе [3].

Интегральное разложение для смешанного спектра (случай первый) получим по методу
работы [4]. Оно имеет вид:

$$f(x) = \frac{\mu_{21}}{\pi} \int_{-\gamma_2}^{\infty} D(r) z(x,r) dr \int_0^{\infty} f(\xi)\rho(\xi) z(\xi,r) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(f) w(x,r_n), \quad x > 0, \quad (2.5)$$

где $D(r) = \omega_2 / \omega(r)$, $\quad \omega(r) = \mu_{21}^2 \omega_2 \left(\frac{\sin R\omega_1}{\omega_1} \right)^2 + \cos^2 \omega_1 R$,

$$e_n(f) = \frac{\tilde{f}(r_n)}{\sqrt{\gamma_1 - \lambda_n}\, k(\lambda_n) \sin\left(R\sqrt{\gamma_1 - \lambda_n}\right)}, \quad \tilde{f}(r_n) = \int_0^{\infty} f(\xi)\rho(\xi) \cdot w(\xi, r_n) d\xi, \quad (2.6)$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,R), \\ \mu_{21}, & x > R, \end{cases} \qquad \lambda_n = -r_n,$$

$$k(\lambda_n) = 1/2 \left\{ \frac{\sin\left(R\sqrt{\gamma_1 - \lambda_n}\right)}{\sqrt{\gamma_1 - \lambda_n}} \left(R + \frac{\mu_{21}}{\sqrt{\lambda_n - \gamma_2}} \right) + \mu_{21} \frac{R^3}{3} \sqrt{\lambda_n - \gamma_2} \right\}. \quad (2.7)$$

Класс функций, для которых справедливо разложение (2.5), тот же, что и в теории тригонометрических рядов Фурье. При $0 \le R\sqrt{q} \le \pi/2$ сумма в формуле (2.5) отсутствует, так
как дискретного спектра в этом случае нет.

3. Решение краевой задачи в полуполосе

Формула (2.5) позволяет записать интегральное преобразование на смешанном спектре для функции $f(x)$, заданной на $(0,\infty)$:

$$f(x) = \mu_{21}/\pi \int_{-\gamma_2}^{\infty} H(r) \cdot z(x,r) dr + \sum_{n=1}^{N} e_n(f), \quad (3.1)$$

$$H(r) = D(r) \int_0^{\infty} f(\xi)\rho(\xi) z(\xi,r) dr, \quad (3.2)$$

коэффициенты $e_n(f)$ определены формулами (2.6), (2.7).

Решение исходной краевой задачи (1.1) – (1.4) ищем в виде разложения

$$u(x,y) = \mu_{21}/\pi \int_{-\gamma_2}^{\infty} \left[A(r) sh\sqrt{r}\, y + B(r) sh\sqrt{r}(h-y) \right] z(x,r) dr +$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\left[a_n \cdot sh\sqrt{r_n}\,y + b_n \cdot sh\sqrt{r_n}(h-y)\right]w(x,r_n). \tag{3.3}$$

Для определения неизвестных функций $A(r), B(r)$ и неизвестных коэффициентов a_n, b_n используем краевые условия задачи при $y=0$ и $y=h$. Имеем

$$\begin{gathered}\frac{\mu_{21}}{\pi}\int_{-\gamma_2}^{\infty} B(r)sh\sqrt{r}h\cdot z(x,r)dr + \sum_{n=1}^{N} b_n \cdot sh\sqrt{r_n}h\cdot w(x,r_n) = f_0(x)\\ \frac{\mu_{21}}{\pi}\int_{-\gamma_2}^{\infty} A(r)sh\sqrt{r}h\cdot z(x,r)dr + \sum_{n=1}^{N} a_n \cdot sh\sqrt{r_n}h\cdot w(x,r_n) = f_1(x),\, x\in(0,\infty).\end{gathered} \tag{3.4}$$

Каждое из этих равенств обращаем по формулам интегрального преобразования (3.1), (3.2). В результате получаем

$$B(r)\cdot sh\sqrt{r}h = D(r)\int_0^{\infty} f_0(\xi)\rho(\xi)z(\xi,r)dr,\quad A(r)\cdot sh\sqrt{r}h = D(r)\int_0^{\infty} f_0(\xi)\rho(\xi)z(\xi,r)dr, \tag{3.5}$$

$$b_n \cdot sh\sqrt{r_n}h = e_n(f_0),\quad a_n \cdot sh\sqrt{r_n}h = e_n(f_1). \tag{3.6}$$

Неизвестные в разложении (3.3) найдены, этим самым построено точное решение рассматриваемой краевой задачи.

Замечание. Задача имеет решение не при всех h. Действительно, если $\sqrt{r_n}h = in\pi$, то коэффициенты a_n и b_n становятся бесконечно большими. В теории колебаний этот факт относится к резонансу [1]. Если же $\sqrt{r_n}h \neq in\pi$, то интегралы в (3.3) следует понимать в смысле главных значений по Коши.

Заключение и выводы

1.В найденном решении параметр r принимает значения разных знаков, поэтому для однозначности надо определиться с выбором ветви $\sqrt{r}$. Обычно для этого привлекают те или другие физические соображения, например, условие излучения Зоммерфельда.

2.Для получения вещественного решения нужно от найденного взять реальную часть.

3.Смешанный спектр имеют также и другие задачи математической физики: свободные колебания полубесконечной струны, частично лежащей на упругом основании; теплопроводность составной полуполосы с учетом теплообмена с окружающей средой и др.

Список литературы

1. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей [Текст] / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

2. Ленюк, М. П. Один класс гибридных интегральных преобразований (Ле-

жандра-Бесселя-Фурье) [Текст] / М. П. Ленюк //Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.– мат. и техн. науки. – 1990. – № 5, – С. 12 – 16.

3. Проценко, В. С. Обобщенное интегральное преобразование Фурье на смешанном спектре и некоторые его приложения [Текст] / В. С. Проценко, Т. В. Денисова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Вып. 63. – Х., 2014. – С. 170 – 175.

4. Уфлянд, Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] // Вопросы математической физики. – Л.: Наука, 1976. – С. 93 – 106.

5. Конет, І. М. Узагальнене інтегральне перетворення типу Мелера – Фока на полярній осі з n точками спряження [Текст] / І. М. Конет, М. П. Лен юк // Доп. НАН України. – 2006. – № 9, – С. 22 – 27.

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 11.12.2014

Про одну граничну задачу у складеній півсмузі з мішаним спектром

Запропоновано метод розв'язання граничної задачі з мішаним спектром у складеній півсмузі на основі нового інтегрального перетворення на мішаному спектрі.

Ключові слова: гранична задача, складена півсмуга, інтегральне перетворення,мішаний спектр, точний розв'язок.

On a boundary value problem for a composite half-strip with mixed spectrum

Method for solving the boundary value problem for a composite half-strip with a new integral transform on a mixed spectrum is proposed.

Keywords: boundary value problem, composite half-strip, integral transform, mixed spectrum, the exact solution.