УДК 510.161

О.Б. Маций

Удосконалення угорського методу рішення задачі про призначення

Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Описано рекурентний метод вирішення задачі про призначення, який технічно спрощує найбільш поширений угорський метод. Алгоритм полягає в знаходженні зваженого парасполучення мінімальної сумарної ваги в двочастковому графі з 2n вершинами, використовуючи поняття найкоротшого збільшує шляху. Алгоритм полягає в знаходженні зваженого парасполучення мінімальної сумарної ваги в двочастковому графі з 2n вершинами. Розроблений метод дає можливість, порівняно з іншими, економити обчислювальні ресурси, завдяки чому досягається виграш на великих розмірностях вхідних даних.

Ключові слова: задача про призначення, матриця вартостей, перестановка, парасполучення, граф, насичена вершина.

Вступ

Задача про призначення є типовим прикладом оптимального прийняття управлінських рішень . Ця задача дозволяє розподілити об'єкти з деякої безлічі за групою суб'єктів з іншої множини, і розподіл має відповідати оптимальності одного або декількох підсумкових показників .

Широко відомі методи вирішення задачі про призначення, такі , як угорський метод , метод Кана- Мункреса і метод потенціалів, побудовані з використанням різних підходів, які застосовуються у комбінаторній оптимізації і характеризуються різною тимчасовою складністю, не меншою, ніж $O\left(n^3\right)$, де n – порядок матриці вартостей [1]. У даній роботі викладено алгоритм вирішення одного з варіантів задачі про призначення, вартість якого знижена до $O\left(n^2\right)$. Показано, що він виконує функції процедури, вбудованої у метод гілок і меж для швидкого обчислення більш точних нижніх оцінок вартості замкнутих маршрутів у задачі комівояжера. Алгоритм полягає в знаходженні зваженого парасполучення мінімальнї сумарної ваги в двочастковому графі з 2*n* вершинами, з використанням введеного в [2] поняття найкоротшого збільшення шляху.

Постановка задачі

Опишемо алгоритм вирішення задачі про призначення виходячи з її формулювання в такому вигляді.

Для матриці вартостей (ваг) $C=\left[c_{ij}\right]_n$, де $c_{ij}\in R_0^+$ або $c_{ij}=\infty$, R_0^+ – множина невід'ємних дійсних чисел знайти

$$C(\sigma)=min\sum_{i=1}^{n}c_{\pi[i]}\text{ -} \qquad (1)$$

Тут $\pi=\left(\pi[1],\pi[2],...,\pi[n]\right)$ – перестановка безлічі {1, 2, …, *n*} номерів стовпців матриці *C*, $\sigma=\left(\sigma[1],\sigma[2],...,\sigma[n]\right)$ – оптимальна перестановка вартістю

$C(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} c_{\sigma[i]}$, $c_{\sigma[i]} \neq \infty$, $i=\overline{1,n}$, або вирішення задачі про призначення. Перестановку $\pi=(\pi[1],\pi[2],...,\pi[n])$, в якій $c_{\sigma[i]} \neq \infty$, $i=\overline{1,n}$, назвемо допустимим вирішенням задачі про призначення. Зауважимо, що задача про призначення з матрицею вартостей, що містить елементи $c_{ij}=\infty$, може не мати рішення. У цьому випадку необхідно встановити, що безліч допустимих рішень задачі є порожньою. Будемо шукати σ, покроково збільшуючи на одиницю число елементів k, $k=\overline{1,n}$, послідовності, що утворює певну частину допустимого вирішення задачі про призначення. Розглянемо властивості цієї послідовності і спосіб її побудови.

Вирішення задачі

Матриці вартостей задачі про призначення *C* відповідає двочастковий граф (*X*, *Y*, *U*), де $|X|=|Y|=n$ і вершина $i \in X$ з'єднана з вершиною $j \in X$ хребтом $(i,j) \in U$ вагою $c_{ij} \neq \infty$.

парасполучення графа утворює таку безліч ребер, що ніякі два з них не мають заальної вершини. Ребра, які не входять до парасполучення, називаються вільними. Максимальне парасполучення – це парасполучення з найбільшим числом ребер. Вершина, яка належить ребру парасполучення, називається насиченою, решта вершин графа – вільними. Ребро (i,j), включене в парасполучення, позначимо $[i,j]$. Вершина *j* ребра $[i,j]$ визначається як напарник і. Досконале парасполучення - це парасполучення, що насичує всі вершини графа. У двочастковому графі (*X*, *Y*, *U*) потужність досконалого парасполучення, якщо воно існує, дорівнює *n*. Рішення задачы про призначення полягає в побудові в двочастковому зваженому графі (*X*, *Y*, *U*) досконалого парасполучення з мінімальною сумарною вагою ребер [3].

Нехай у графі зафіксовано парасполучення *M*. Простий шлях називається переміжним щодо парасполучення *M*, якщо ребра шляху через одне присутні в *M*. Перміжний шлях, який починається і закінчується ребрами, що не належать паросполученню *M*, називається збільшучим відносно парасполучення *M*. Отже, якщо $(i_1,j_2,i_2,j_3,...,i_{k-1},j_k,i_k,i_{k+1})$ – збільшуючий шлях у двочастковому графі (*X*, *Y*, *U*), то в ньому вільні вершини (i_1,i_{k+1}) і *k* + 1 ребер $(i_1,j_2),(i_2,j_3),...,(i_{k-1},j_k),(i_k,j_{k+1})$. Решта *k* ребер шляху утворює парасполучення $\pi_k=([i_2,j_2],[i_3,j_3],...,[i_k,j_k])$. Довжиною шляху називається число ребер, які в ньому зустрічаються.

Припустимо, що у зваженому графі *(X, Y, U)*, відповідному матриці вартостей *C*, не зафіксовано парасполучення. Тоді кожне ребро в *(X, Y, U)* є збільшуючим шляхом довжини 1, а ребро з мінімальною вагою утворює парасполучення або вихідну послідовність.

Припустимо, що у зваженому графі (*X*, *Y*, *U*), відповідному матриці вартостей задачі про призначення *C*, не зафіксовано парасполучення. Тоді кожне ребро в *(X, Y, U)* є шляхом довжини 1, а ребро з мінімальною вагою утворює парасполучення або вихідну послідовність π_1.

Нехай у графі (*X*, *Y*, *U*) побудовано парасполучення $\pi_k = \left([i_1, j_1], [i_2, j_2], ..., [i_l, j_l], ..., [i_k, j_k]\right)$ з мінімальною сумою $C(\pi_k)$ ваг ребер серед усіх паросполучень потужності *k*. Перетворимо π_k в парасполучення $\pi_{k+1} = \left([i'_1, j'_1], [i'_2, j'_2], ..., [i'_l, j'_l], ..., [i'_k, j'_k], [i'_{r+1}, j'_{k+1}]\right)$, величина якого $C(\pi_{k+1})$ досягає мінімуму на безлічі $\prod k+1$ всіх паросполучень потужності *k* + 1.

парасполучення π_k розбиває безлічі *X, Y* відповідно на підмножини насичених вершин $I_k = \{i_1, i_2, ..., i_l, ..., i_k\}$, $J_k = \{j_1, j_2, ..., j_l, ..., j_k\}$ і на підмножини вільних вершин $X - I_k = \{i_{k+1}, i_{k+2}, ..., i_s, ..., i_n\}$, $Y - J_k = \{j_{k+1}, j_{k+2}, ..., j_q, ..., j_n\}$. Знайдемо вільне ребро вагою

$$c_{i_r j_p} = min\left\{c_{i_s j_q} \mid i_s \in X - I_k, j_q \in Y - J_k\right\} \qquad (2)$$

і, приєднавши його до парасполучення π_k, отримаємо парасполучення $\pi'_{k+1} = \pi_k \bigcup [i_r, j_r]$ вартістю $MIN1 = C(\pi_k) + c_{i_r j_p}$. Якщо π'_{k+1} не є парасполученням π'_{k+1} з мінімальною сумою вагів на множині $\prod k+1$, то $\pi_{k+1} \in \prod k+1 - \{\pi'_{k+1}\}$. Будь-яке парасполучення в $\prod k+1 - \{\pi'_{k+1}\}$ містить *l* ребер $\pi_k, l = \overline{0, k-1}$ і $k - l + 1$ ребер збільшуючого шляху щодо π_k.

Нехай вершина $j_l \in I_k$, $l \in \{1, 2, ..., k\}$ є кінцем вільного ребра (i_r, j_l) вагою

$$c_{i_r j_l} = min\left\{c_{i_s j_l} \mid i_s \in X - I_k\right\}, \qquad (3)$$

вершина $i_f \in I_k$, $i_f \in I_k$, $f \in \{1, 2, ..., k\}$ – началом вільного ребра (i_f, j_p) вагою

$$c_{i_f j_p} = min\left\{c_{i_f j_q} \mid i_q \in Y - J_k\right\}. \qquad (4)$$

Позначимо X_k безліч вільних вершин i_r, кожна з яких інцидентна ребру (i_r, j_l) вагою, визначеною із (3), $|X_k| \le k$. Відповідно Y_k – безліч вільних вершин j_p інцидентних ребрам (i_f, j_p) з вагами, зумовленими із (4), $|Y_k| \le k$ Ясно, що найкоротший шлях відносно парасполучення π_k починається у вершині безлічі X_k і закінчується у вершині безлічі Y_k.

Побудуємо допоміжний зважений орграф (*V*, *A*), який забезпечує пошук найкоротшого шляху P_{k+1} відносно парасполучення π_k. В орграфі (*V*, *A*) множина вершин $V = \{i_0\} \bigcup X_i \bigcup I_k \bigcup Y_k$.

Множина дуг *A* орграфа (*V*, *A*) подана розбиттям на підмножини A_0, A_1, A_2, A_3. Підмножина A_0 містить $|X_k|$ дуг (i_0, i_r) нульової ваги, $i_r \in X_k$. У підмножину A_1 входить дуга $\left(i_r, i_j\right), i_r \in X_k\ j_l \in I_k$, якщо в парасполученні π_k вершина j_r ребра $\left(i_r, i_l\right)$ – напарник вершини i_l. Дузі $\left(i_r, i_l\right)$ привласнена вага $c\left(i_r, i_l\right) = c_{i_r j_l} + c_{i_l j_l}$. Дуга $\left(i_{dr}, i_l\right) \in A_2, i_d, i_l \in I_k$ тоді, коли в паросполученні π_k вершина j_l ребра $\left[i_d, j_l\right], j_l \in J_k$ є напарником i_l. Дуга $\left(i_d, i_l\right)$ має вагу $c\left(i_d, i_l\right) = c_{i_d j_l} + c_{i_l j_l}$. Підмножина A_3 включає дугу $\left(i_f, i_p\right), i_f \in I_k, J_p \in Y_k$, якщо вершини i_f і j_p з'єднані в графі (*X*, *Y*, *U*) ребром $\left[i_f, i_p\right]$. Дузі $\left(i_f, j_p\right)$ приписана вага $c\left(i_f, j_p\right) = c_{i_f j_p}$.

Зі способу побудови орграфа *(V, A)* випливає, що безліч шляхів, досяжних з вершини i_0 в усі вершини $i_p \in V_3$, збігається з безліччю парасполучення π_k і з'єднує в графі *(X, Y, U)* кожну вершину $i_r \in X - I$ з кожною вершиною $i_p \in X - J$. Крім того, будь-якому шляху орграфа (*V*, *A*), що починається у вершині $i_r \in X - I$ у вершину $i_p \in Y - J$ відносно парасполучення π_k. Якщо у графі (*V*, *A*) побудовано найкоротший шлях з вершини i_0 у вершину $i_p \in V_3$, то він містить одну з дуг $\left(i_r, i_l\right) \in A_1$ і одну із дуг $\left(i_f, i_p\right) \in A_3$. Нехай $i_t \in V_3$- кінцева вершина шляху, найкоротшого серед усіх шляхів з i_0 в інші вершини множини V_3. Очевидно, такий шлях у графі (*X*, *Y*, *U*) визначить найкоротший шлях P_{k+1} відносно π_k .

Таким чином, пошук у графі (*X*, *Y*, *U*) найкоротшого збільшуючого шляху P_{k+1} щодо парасполучення π_k виконується таким чином:

1. При насичених вершинах $j_l \in J, i_f \in I, l, f \in \{1, 2, ..., k\}$, $|I| = |J| = k$ знаходяться вільні ребра $\left(i_r, i_l\right)$ і $\left(i_f, j_p\right), r, p \in \{k+1, k+2, ..., n\}$, з вагами, зумовленими відповідно з (3) і (4).

2. Для безлічі всіх вільних ребер $\left(i_r, i_l\right)$ і $\left(i_f, j_p\right)$ і всіх ребер парасполучення π_k будується зважений орграф (*V*, *A*) пропонованим вище способом.

3. В орграфі (*V*, *A*) шукається шлях $\left(i_o, i_v, i_a, i_b, ..., i_в, i_d, i_t\right)$, найкоротший на безлічі шляхів з i_0 в кожну вершину i_p наведену в графі (*X*, *Y*, *U*) вільної вершиною i_p ребра $\left(i_f, j_p\right)$.

Якщо є такий шлях, то існує найкоротший збільшуючий шлях $P_{k+1} = \left(i_v, i_a, i_a, i_b, i_b, ..., i_в, i_d, i_d, i_t\right)$, $i_v \in X - I, j_a, j_b, ..., j_d \in J$, $i_a, i_b, ..., i_в, i_d \in I$, $j_t \in Y - J$, $i_d \in I,\ j_t \in Y - J,$ щодо парасполучення π_k. Вартість $C\left(\pi_{k+1}^2\right) = c_{i_v j_a} + c_{i_a j_b} + ... + c_{i_в j_d} + c_{i_d j_t}$. В іншому випадку не існує шляху P_{k+1} і парасполучення π_{k+1}^2

Очевидно, для пошуку в графі *(X, Y, U)* парасполучення π_{k+1}, вартість якого є мінімальною на множині π_{k+1} парасполучення потужності *k* +1, достатньо:

а) визначити парасполучення $\pi'_{k+1} = \pi_k \bigcup [i_r, j_k]$ і сумарну вагу її ребер. $MIN1 = C(\pi_k) + c_{i_r j_p}, \pi_k$ – парасполучення мінімальної вартості на множині всіх паросполучень π_k потужності k, $c_{i_r j_p}$ – вага ребра $\left[i_r, j_p\right]$, зумовлена з (2);

б) знайти парасполучення π_{k+1}^2 і $MIN2 = C\left(\pi_{k+1}^2\right)$, побудувавши найкоротший збільшуючий шлях P_{k+1} відносно парасполучення π_k;

в) покласти $\pi_{k+1} = \pi_{k+1}^1$, якщо $MIN1 \le MIN2$, і $\pi_{k+1} - \pi_{k+1}^2$ в протилежному випадку.

Наступний алгоритм виконує пошук рішення задачі про призначення, рекурсивно визначаючи в двочастковому графі з *2n* вершинами парасполучення π_k що містять *k* ребер мінімальної сумарної ваги.

Пропонований алгоритм складається з такого ж числа етапів і має таку ж тимчасову складність, що і найкращий з відомих методів оптимального призначення - угорський метод.

Теорема. Рішення задачі про призначення π коректно знаходиться за час $O\left(n^3\right)$ побудовою в двочастковому графі з 2*n* вершинами послідовностей паросполучень π_k, $k = \overline{1, n}$, де π_k – парасполучення, що містить *k* ребер мінімальної ваги, $\pi = \pi_k$.

Доказ. Нехай побудовано парасполучення $\pi_{k-1}, k = \overline{2, n}.$ Алгоритм зупиняється у таких випадках: 1) не знаходиться ребра, об'єднання якого з π_{k-1} давало б π_k^1; 2) у допоміжному графі коли немає шляху з будь-якої вершини в будь-яку вершину, отже, не існує збільшуючого шляху щодо поточного парасполучення π_{k-1}.

Щоб оцінити трудомісткість вирішення задачі про призначення, зауважимо, що воно будується в результаті виконання *n* етапів, кожен з яких збільшує парасполучення на одне ребро.

На першому етапі знаходиться π_1 за час, що оцінюється величиною $O\left(n^2\right)$. На кожному наступному етапі будуються парасполучення π_k^1 і π_k^2, $k = \overline{2, n}.$ Час побудови π_k^1 оцінюється величиною $O\left((n-k+1)^2\right)$. Знаходження π_k^2 потребує $2(n-k+1)$ операцій на пошук вершин множин, *k* + 1 операцій на побудову допоміжного орграфа, $O\left(k^2\right)$ дій на побудову в ньому алгоритмом Дейкстри найкоротшого шляху і $O(k)$ операцій з множинами для визначення π_k^2. Тому час кожного *k*-го етапу обмежено величиною $O(n^2)$.

Список літератури

1. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х.Пападимитриу, К. Стайглиц. – М.: Мир, 1985. – 510 с.

2. Панишев, А. В. Быстрый алгоритм решения задачи о назначениях для нахождения нижней границы стоимости маршрута коммивояжера / А. Ю. Левченко, А. В. Морозов, А. В. Панишев // Искусственный интеллект. – Донецк: Институт проблем искусственного интеллекта, 2011. – С. 406-416.

3. Левченко, А. Ю. Механизм ускорения вычислений в методе Литтла для решения задач класса коммивояжера / А. Ю. Левченко, А. В. Морозов, А. В. Панишев // Исскуственный интеллект. – Донецк: Институт проблем искусственного интеллекта, 2012. – С. 95-110.

Рецензент: д.т.н., професор О. Я. Ніконов, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків.

Поступила в редакцию 08.12.2014

Усовершенствование венгерского метода решения задачи о назначениях

Предложен новый метод решения задачи о назначениях, основанный на рекурсивном получении оптимального решения задачи. Задача о назначениях формулируется в перестановочно-матричной форме, что даёт возможность использовать матричный подход к построению оптимального решения. Алгоритм заключается в нахождении взвешенного паросочетания минимального суммарного веса в двудольном графе с 2*n* вершинами. Разработанный метод дает возможность, по сравнению с другими, экономить вычислительные ресурсы, благодаря чему достигается выигрыш на больших размерностях входных данных.

Ключевые слова: задача о назначении, матрица стоимостей, перестановка, паросочетания, граф, насыщенная вершина.

Improving Hungarian method for solving assignment problem

The paper proposes a new method for solving the assignment problem based on recursive obtaining an optimal solution. The assignment problem is formulated in the rearrangement matrix form that allows the use of a matrix approach to an optimal solution. The algorithm consists in finding a minimum total weight matching in the bipartite graph with 2*n* vertices. Of the theory of matching for bipartite graphs presented in the rearrangement matrix form. The developed method, in comparison with others, gives the opportunity to save computational resources, making a gain on large dimension of the input data.

Keywords: assignment problem, the matrix values permutation, matching, graph, intense peak.