УДК 517.958: 539.4: 629.7.02 В. В. Копычко

# Деформирование открытой цилиндрической оболочки с неподвижными угловыми точками границы и произвольными перемещениями её сторон

*Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», Украина*

Поставлена и решена краевая задача для открытой цилиндрической оболочки с прямоугольным планом при полном закреплении угловых точек границы и произвольных перемещениях и углах поворота вдоль её сторон. Решение носит аналитико-численный характер. Исследованы основные свойства полученного решения: устойчивость, сходимость и точность в различных метриках. Показано, что все компоненты напряженно деформированного состояния могут быть получены с любой наперед заданной точностью, т.е. решение является практически точным. Полученные решения имеют непосредственное применение в анализе прочности, устойчивости и колебаний конструкций авиакосмической техники методом сопряжения конструктивных элементов.

***Ключевые слова:*** общая моментная теория оболочек; открытая оболочка, неподвижные угловые точки, произвольные смещения сторон; вспомогательная задача; базовая задача; корректирующая компонента.

## 1. Постановка и решение задачи

Общий подход к построению решения подобных краевых задач о деформировании произвольной открытой оболочки, на границе которой заданы кинематические воздействия (перемещения и углы поворота), конкретизирован в работе [1]. Этот подход применен к цилиндрической оболочке в работах [2, 3, 4]. Согласно предложенному подходу, решение строится в три этапа. Первый этап реализован в работе [2] – отыскивается специальное частное решение, учитывающее действующую силовую нагрузку путем решения базовой задачи (граница оболочки жестко защемлена). Второй этап – в работе [4] – ищется решение первой вспомогательной задачи, описывающей поведение оболочки при смещении углов и примыкающих сторон. Цель данной работы – решение второй вспомогательной задачи. Здесь, как и в предыдущих работах, основной вопрос – исследование устойчивости, сходимости и точности искомых аналитико-численных решений.

Согласно работе [3] проблема сводится к решению полуоднородной краевой задачи:

$$L\vec{u}(\alpha,\beta)=0 <=> \sum_{j=1}^{3} L_{ij}u_j = 0 \text{ в } \Omega,$$
$$\Omega=\{(\alpha,\beta): -1<\alpha,\beta<1\}, \qquad (1)$$
$$\mathrm{i}=1,2,3$$

при краевых условиях на $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_i$ :

$$
\begin{aligned}
&w=\varphi_1(\beta),\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\varphi_3(\beta),u=\varphi_1^*(\beta),v=\varphi_3^*(\beta); \qquad \alpha=-1;\\
&w=\varphi_2(\beta),\frac{\partial w}{\partial\alpha}=\varphi_4(\beta),u=\varphi_2^*(\beta),v=\varphi_4^*(\beta); \qquad \alpha=1;\\
&w=\psi_1(\alpha),\frac{\partial w}{\partial\beta}=\psi_3(\alpha),u=\psi_1^*(\alpha),v=\psi_3^*(\alpha); \quad \beta=-1;\\
&w=\psi_2(\alpha),\frac{\partial w}{\partial\beta}=\psi_4(\alpha),u=\psi_2^*(\alpha),v=\psi_4^*(\alpha); \quad \beta=1;
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$\vec{u}=(\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3)\equiv(\mathrm{u},\mathrm{v},\mathrm{w}),$$

где **L** – симметричный матричный дифференциальный оператор классической моментной теории оболочек, конкретизированный в работе [3];

$\varphi_k$, $\psi_k$, $\varphi_k^*$, $\psi_k^*$ – вторая часть краевых функций [3, формула (3)], причем

$$\varphi_k(\pm1)=\varphi_k'(\pm1)=\psi_k(\pm1)=\psi_k'(\pm1)=\varphi_k^*(\pm1)=\psi_k^*(\pm1)=0,\ (k=1,2,3,4). \tag{3}$$

Относительно правых частей краевых условий (2) следует отметить, что в отличие от работы [4], где решение выражалось через угловые кинематические параметры в явном виде, здесь, к сожалению, не представляется возможным выразить его в таком же явном виде через краевые функции $\varphi_k$, $\psi_k$, $\varphi_k^*$, $\psi_k^*$. Это было бы возможно, например, если бы была известна точная функция Грина для *базовой* задачи [2], однако она до сих пор не построена. Если заданные краевые функции $\varphi_k$, $\psi_k$, $\varphi_k^*$, $\psi_k^*$ обладают определенными свойствами гладкости, то, независимо от конкретного вида этих функций, их можно единообразно представить в виде рядов по некоторым линейно независимым и полным системам функций на соответствующем участке границы $\Gamma_i$.

Исходя из данного замечания представим эти функции в таком виде:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_k(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{kn}H_n(\beta),\ \psi_k(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{km}H_m(\alpha),\\
&\varphi_k^*(\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{kn}^*h_n(\beta),\ \psi_k^*(\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\Psi_{km}^*h_m(\alpha),
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $H_k(z)$, $h_k(z)$ – линейно независимые, полные, ортонормированные на (-1;1) функции, предложенные, изученные и успешно примененные в различных задачах теории пластин в ряде работ С. А. Халилова [5, 6 и др.]. Эти функции являются многочленами, и если функции $\varphi_k$, $\psi_k$, $\varphi_k^*$, $\psi_k^*$ также являются многочленами, чего всегда можно добиться на основании известной аппроксимационной теоремы К. Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной функции многочленами, то ряды (4) превращаются в конечные суммы. Краевые функции $\varphi_k$, $\psi_k$, $\varphi_k^*$, $\psi_k^*$ по своему физическому смыслу непрерывны, а функции $\varphi_k$ и $\psi_k$ еще и непрерывно дифференцируемы.

Отметим, что функции $H_k(z)$, $h_k(z)$ на концах интервала ортогональности удовлетворяют тем же условиям, что и функции $\varphi_k$, $\psi_k$, $\varphi_k^*$, $\psi_k^*$ соответственно.

Для сведения краевой задачи (1) – (2) к базовой искомое решение представим в виде суммы двух компонент:

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (\mathrm{u}_{21}, \mathrm{v}_{21}, \mathrm{w}_{21}) + (\mathrm{u}_{22}, \mathrm{v}_{22}, \mathrm{w}_{22}). \qquad (5)$$

Первую компоненту этого представления продолжим в область следующим образом:

$$u_{21} = \sum_{k=1}^{2} \{\varphi_k^*(\beta)\nu_k(\alpha) + \psi_k^*(\alpha)\nu_k(\beta)\},\; v_{21} = \sum_{k=1}^{2} \{\varphi_{k+2}^*(\beta)\nu_k(\alpha) + \psi_{k+2}^*(\alpha)\nu_k(\beta)\},$$
$$w_{21} = \sum_{k=1}^{4} \{\varphi_k(\beta) f_k(\alpha) + \psi_k(\alpha) f_k(\beta)\}, \qquad (6)$$

где $\nu_k$, $f_k(z)$ – некоторые многочлены [3, формула (7)]. При этом краевые условия выполнены.

Вторые компоненты будут решением краевой (базовой) задачи:

$$L_{i1}u_{22} + L_{i2}v_{22} + L_{i3}w_{22} = -L_{i1}u_{21} - L_{i2}v_{21} - L_{i3}w_{21} \equiv \mathrm{Q}_i(\alpha,\beta)\; (i = 1,2,3) \qquad (7)$$

при однородных краевых условиях, вытекающих из (2). Здесь правые части $Q_i(\alpha,\beta)$, $(i=1, 2, 3)$ в общем случае следует понимать в смысле обобщенных функций.

Решение этой краевой задачи ищем в виде

$$u_{22} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} U_{mn} h_m(x) h_n(y);\; v_{22} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} V_{mn} h_m(x) h_n(y);$$
$$w_{22} = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} W_{mn} H_m(x) \mathrm{H}_n(y), \qquad (8)$$

где $U_{mn}$, $V_{mn}$, $W_{mn}$ – искомые параметры, определяемые путем решения системы линейных алгебраических уравнений(СЛАУ).

В силу многочленного представления как краевых функции (4), так и решения (8) элементы матрицы и вектор правых частей вычисляются точно (все интегралы берутся в замкнутом виде).

## 2. Анализ решения

Предложенная конструкция решения предполагает постановку и решение шестнадцати независимых краевых задач: на каждой из четырех сторон могут быть заданы функции u, v, w, ∂w/∂n. В случае цилиндрической оболочки достаточно рассмотреть смещения края вдоль образующей и края вдоль направляющей. Ограничимся рассмотрением двух краевых задач: при отсутствии остальных перемещений на криволинейной части границы (x=1) задан прогиб $w = H_0(y)$ и на прямолинейной части (y=1) задан прогиб $w = H_0(x)$ (рис. 1 и 2 соответственно). Параметры рассматриваемой оболочки аналогичны параметрам оболочки, рассмотренной в работе [2].

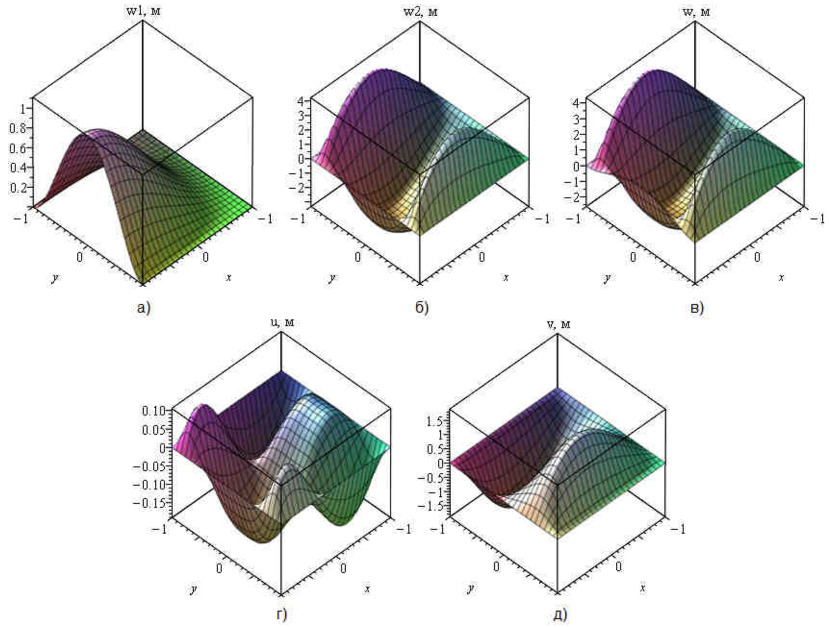



Рис. 1. Компоненты решения при $w(y)|_{x=1}=H_0(y)$:
а – продолжение граничной функции w в область; б – корректирующее решение w;
в – искомое решение w; г – искомое решение u; д – искомое решение v.

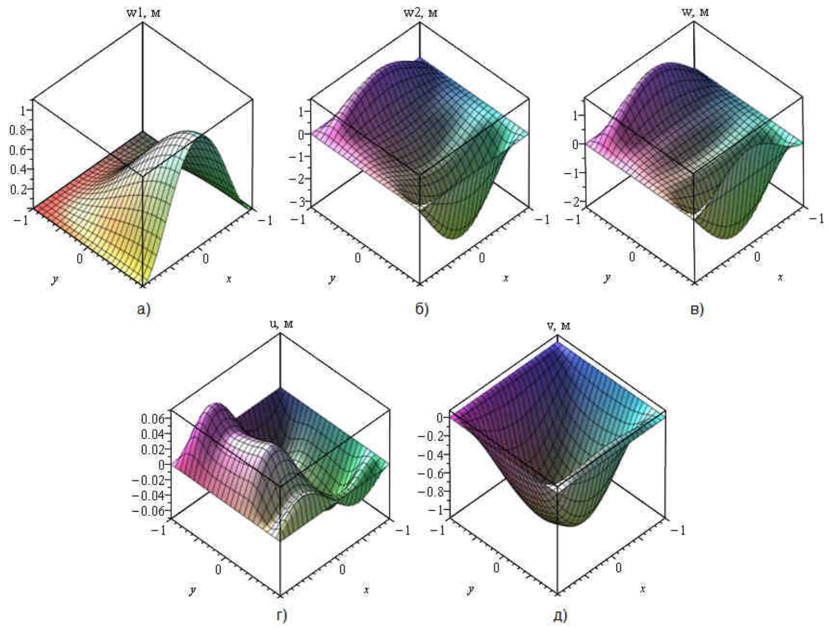



Рис. 2. Компоненты решения при $w(x)|_{y=1}=H_0(x)$:
а – продолжение граничной функции w в область; б – корректирующее решение w;
в – искомое решение w; г – искомое решение u; д – искомое решение v.

Как видно из рис. 1 и 2, корректирующая компонента преобладает по величине и суммарное решение практически совпадает по форме с ней. Кроме того, следует отметить, что v и w соизмеримы и значительно превосходят u.

Об устойчивости процедуры решения СЛАУ и устойчивости самих решений можно судить по скорости установления значений параметров $U_{mn}$, $V_{mn}$, $W_{mn}$ в зависимости от верхних пределов в равенствах (8). Представление об этом дают табл. 1 – 3, где приведены первые пять параметров решения по U, V и W соответственно в зависимости от верхних пределов сумм. Здесь и далее установившиеся значащие цифры выделены жирным шрифтом.

Таблица 1

Стабилизация параметров решения $U_{mn}$, м

| $U_{ij}$ | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|
| **W(x=1, y)=H$_0$(y)** | | | |
| $U_{00}$ | **-0,12317**79528603978 | **-0,1231700**677468487 | -0,1231700507296973 |
| $U_{01}$ | **-0,21**41051248127875e-1 | **-0,213852**2959439636e-1 | -0,2138520698132376e-1 |
| $U_{02}$ | **-0,5**589177847381089e-2 | **-0,56089**85891121882e-2 | -0,5608979367856326e-2 |
| $U_{03}$ | **0,25**75044033071886e-2 | **0,2520971**22871265e-2 | 0,2520971071347144e-2 |
| $U_{04}$ | **0,89**1055584785886e-3 | **0,89900**13839295631e-3 | 0,8990027183224146e-3 |
| **W(x, y=1)=H$_0$(x)** | | | |
| $U_{00}$ | **0,688**2920928245995e-1 | **0,688**4310380565731e-1 | 0,6884310985197831e-1 |
| $U_{01}$ | **-0,9**098809439293981e-2 | **-0,911487**4672092448e-2 | -0,911487637144289e-2 |
| $U_{02}$ | **0,13**56865671348918e-1 | **0,136057**615737858e-1 | 0,1360578242310801e-1 |
| $U_{03}$ | **-0,109**3585877444341e-1 | **-0,1098795**480704491e-1 | -0,1098795737253983e-1 |
| $U_{04}$ | **0,25**79056632816048e-2 | **0,2596**377356468823e-2 | 0,259640132802464e-2 |

Таблица 2

Стабилизация параметров решения $V_{mn}$, м

| $V_{ij}$ | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|
| **W(x=1, y)=H$_0$(y)** | | | |
| $V_{00}$ | **1,615**046067761909 | **1,615790**821862561 | 1,61579099855198 |
| $V_{01}$ | **-0,30**51577829325887 | **-0,303624**5510618237 | -0,3036243739390457 |
| $V_{02}$ | **-0,212**6659326588088 | **-0,2125539**460270805 | -0,2125539822672748 |
| $V_{03}$ | **0,49**78291181253277e-1 | **0,492440**6650733378e-1 | 0,4924403212298719e- |
| $V_{04}$ | **0,198**0704605345507e-1 | **0,1986127**623623601e-1 | 0,1986129063959054e- |
| **W(x, y=1)=H$_0$(x)** | | | |
| $V_{00}$ | **-1,1097**44312182363 | **-1,10978509**4130138 | -1,10978509873727 |
| $V_{01}$ | **0,398**3438259982718e-2 | **0,39885**40133845208e-2 | 0,3988581198151999e- |
| $V_{02}$ | **0,78**59432632209765e-1 | **0,784953**052557486e-1 | 0,7849529405888785e- |
| $V_{03}$ | **0,22**9226537691795e-1 | **0,228536**3263874904e-1 | 0,2285367328584864e- |
| $V_{04}$ | **0,114**1190619498752 | **0,11425961**92631332 | 0,1142596153037293 |

Таблица 3

Стабилизация параметров решения $W_{mn}$, м

| $W_{ij}$ | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|
| **W(x=1, y)=H$_0$(y)** | | | |
| $W_{00}$ | **-2,3**09804414471247 | **-2,310585**946925524 | -2,310586131215522 |
| $W_{01}$ | **2,25**6903371865974 | **2,253247**456280132 | 2,253247132944388 |
| $W_{02}$ | **2,09**7608160769975 | **2,099312**393923456 | 2,099312872163261 |
| $W_{03}$ | **0,2**322950443880961 | **0,290168**3451951171 | 0,2901688818568242 |
| $W_{04}$ | **-0,0923**8600668211696 | **-0,0923897**8443304428 | -0,09238972254437225 |
| **W(x, y=1)=H$_0$(x)** | | | |
| $W_{00}$ | **-0,6292**485130955642 | **-0,6292502**413151555 | -0,6292502846258889 |
| $W_{01}$ | **-1,286**392389396218 | **-1,2862359**92144798 | -1,286235974976026 |
| $W_{02}$ | **-0,347**3283426310885 | **-0,347077**7999479423 | -0,3470778753596608 |
| $W_{03}$ | **-1,0**89303637282336 | **-1,09000786**06377 | -1,090007860402041 |
| $W_{04}$ | **-0,269**5198305130216 | **-0,269151**6772999067 | -0,2691515646835421 |

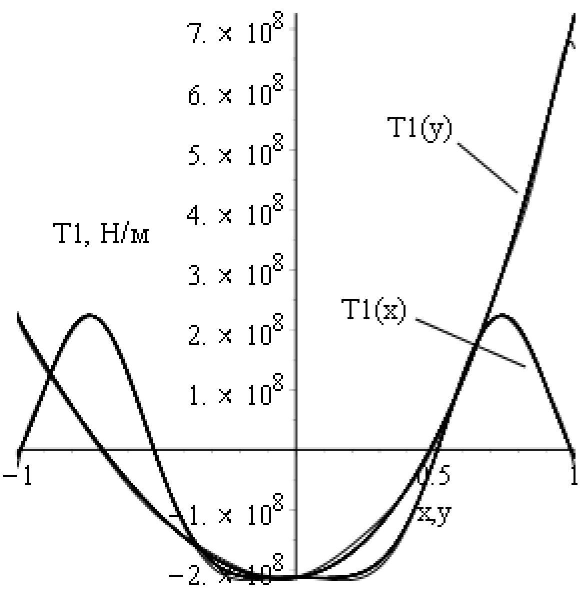
Кроме процесса установления параметров, наблюдается достаточно быстрое падение модулей их значений. Так, например, отношение $W_{3030}/W_{00}$ имеет порядок $10^{-9}$, что позволяет утверждать достаточно быструю поточечную (и даже равномерную) сходимость не только самих решений, но и их производных до определенного порядка, через которые выражаются напряжения.

Отсюда следует, что искомые функции (перемещения и напряжения) могут быть определены с любой наперед заданной точностью, т.е. получаемые решения являются практически точными.

За получение необходимой точности отвечают значения верхних пределов M и N в равенствах (8), которые выбираются программным путем.

Здесь, как и в работах [2, 4], наблюдается быстрая сходимость решений как в метрике пространства $L_2(\Omega)$, так и в энергетическом пространстве $H_L$ оператора L. Что же касается сходимости невязки к нулю в системе (7), то она имеет место в любой замкнутой области $\overline{\Omega}'$, целиком содержащейся в области Ω.

Чтобы проследить за устойчивостью, сходимостью и точностью напряжений, обратимся к рис. 3 – 10, на которых показаны графики усилий и моментов по линиям x=0 и y=0 при различных значениях M и N. Рис. 3 – 6 соответствуют заданию перемещения $W(y) = H_0(y)$ на линии x = 1, а рис. 7 – 10 – заданию перемещения $W(x) = H_0(x)$ на линии y = 1.



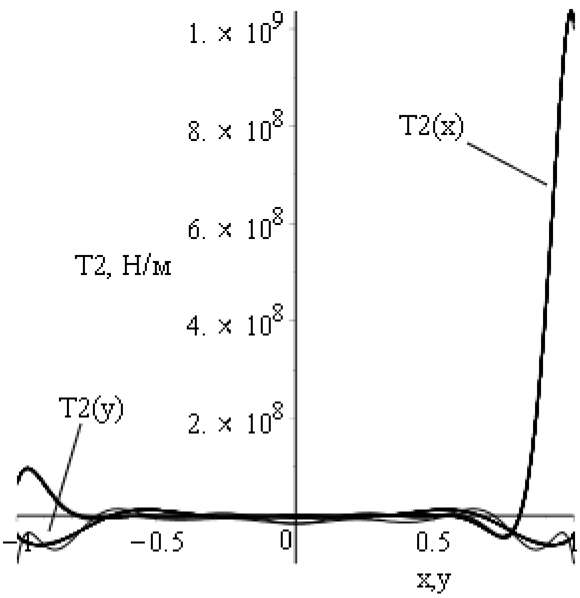
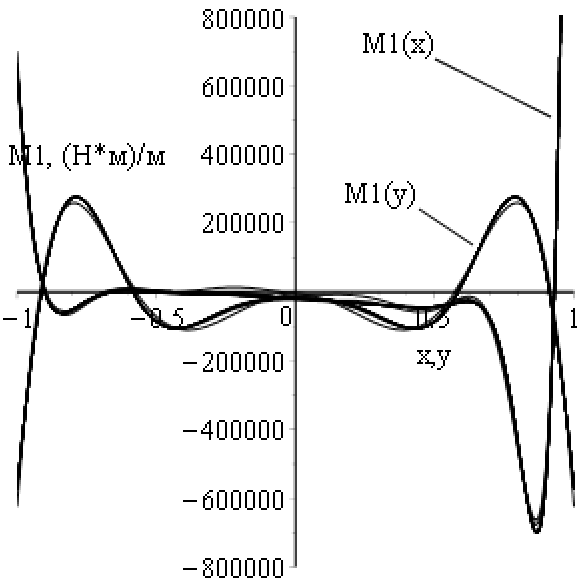




Рис. 3. $T_1(x)$ и $T_1(y)$ при $W(y)|_{x=1} = H_0(y)$ Рис. 4. $T_2(x)$ и $T_2(y)$ при $W(y)|_{x=1} = H_0(y)$



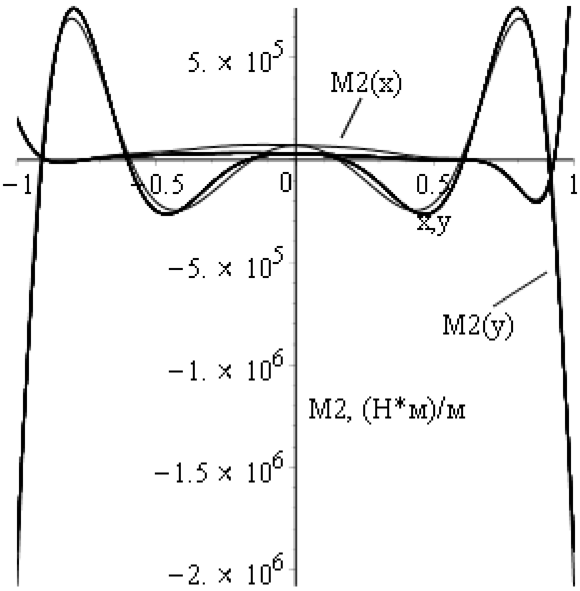
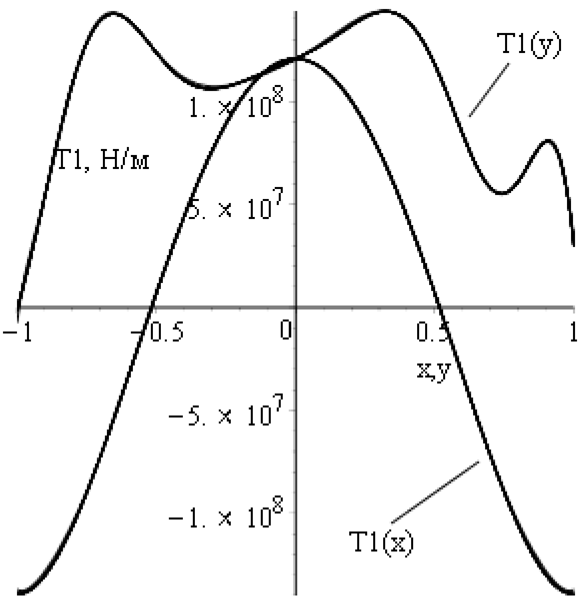




Рис. 5. $M_1(x)$ и $M_1(y)$ при $W(y)|_{x=1} = H_0(y)$ Рис. 6. $M_2(x)$ и $M_2(y)$ при $W(y)|_{x=1} = H_0(y)$



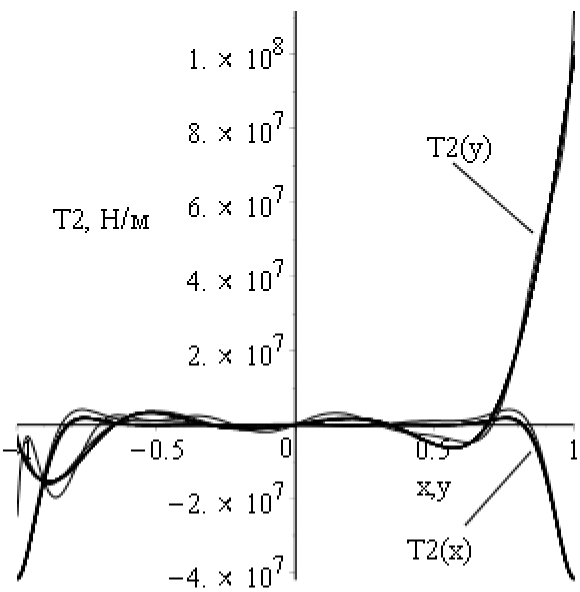
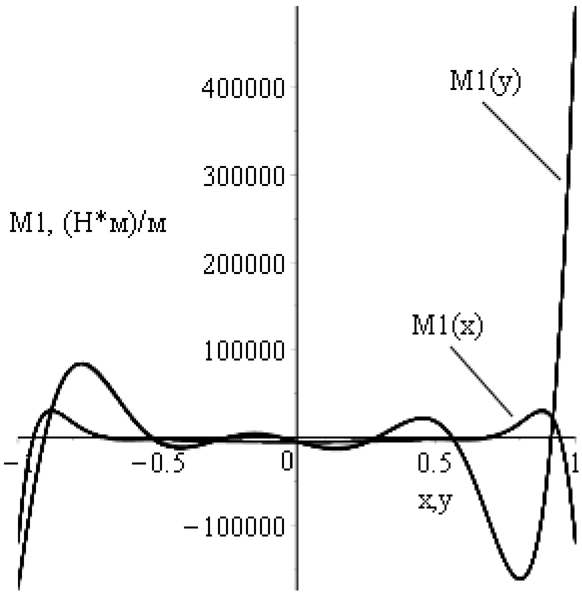




Рис. 7. $T_1(x)$ и $T_1(y)$ при $W(x)|_{y=1} = H_0(x)$ Рис. 8. $T_2(x)$ и $T_2(y)$ при $W(x)|_{y=1} = H_0(x)$



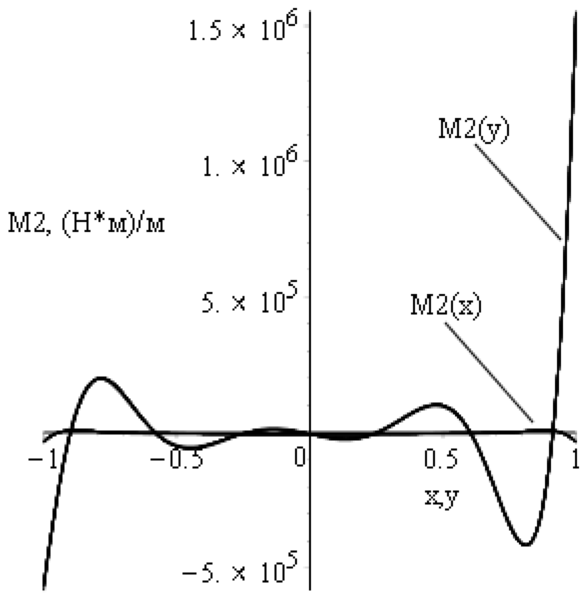




Рис. 9. $M_1(x)$ и $M_1(y)$ при $W(x)|_{y=1} = H_0(x)$ Рис. 10. $M_2(x)$ и $M_2(y)$ при $W(x)|_{y=1} = H_0(x)$

Общим для рис. 3, 4, 7, 8 является то, что мембранные усилия $T_1$ и $T_2$ на центральной образующей и центральной направляющей имеют одни и те же порядки, однако характер изменения этих функций вдоль указанных линий совершенно различен: если $T_1$ на обеих линиях не имеет явно выраженного краевого эффекта, то $T_2$ на этих же линиях носит характер краевого эффекта. В то же время оба момента $M_1$ и $M_2$ носят характер краевого эффекта.

Здесь следует сделать замечание. Наряду с наблюдающимися краевыми эффектами может иметь место кинематический аналог принципа Сен-Венана, наличие которого четко продемонстрировано для пластин в работах С. А. Халилова и др. [7 и др.]. Как известно, в теории оболочек принцип Сен-Венана не имеет абсолютного характера [8], поэтому явно выраженные всплески $T_2$, $M_1$ и $M_2$ на смещенных частях границы могут быть связаны как с краевыми эффектами, так и с кинематическим аналогом принципа Сен-Венана, в то время, как на частях границы, противоположных смещенным, могут наблюдаться только краевые эффекты, хотя и не явно выраженные, что и видно на приведенных рисунках. Этот вопрос по сей день не изучен, поэтому остается открытым.

Что касается вопроса о сходимости и точности, то здесь достаточно отметить, что, начиная с M = N = 18 все графики сливаются, т.е. совпадают с точностью до толщины линии.

И наконец, имеет смысл сопоставить максимальные нормальные и касательные напряжения, вызываемые усилиями и моментами без «привязки» к конкретной точке срединной поверхности оболочки

$$\sigma(T_1) = \frac{7 \cdot 10^8}{0,01} = 7 \cdot 10^{10}\,Па,\ \sigma(M_1) = \frac{4 \cdot 10^6}{0,01^2} = 4 \cdot 10^{10}\,Па,$$

$$\sigma(T_2) = \frac{1 \cdot 10^9}{0,01} = 10^{11}\,Па,\ \sigma(M_2) = \frac{1,5 \cdot 10^6}{0,01^2} = 1,5 \cdot 10^{10}\,Па.$$

Как видно, моментные напряжения здесь соизмеримы с безмоментными, что свидетельствует о неприменимости приближенных теорий расчета оболочек (безмоментной, полубезмоментной и др.) к расчету открытых оболочек при заданных на границе смещениях.

## Заключение

Вывод, которые можно сделать по работе, аналогичны выводам работы [4]. Это означает, что не существует различий при рассмотрении первой и второй вспомогательных задач, так как подход единообразен.

Автор выражает глубокую признательность С. А. Халилову за постановку задачу, постоянные обсуждения и конструктивную и доброжелательную критику.

## Список литературы

1. Новые методы исследования линейно и нелинейно деформируемых тел из композиционных материалов. Математические модели, методы их анализа и численная реализация нелинейного деформирования тонкостенных пространственных систем [Текст] : отчет о НИР (заключ.) т. 2 ; рук. С. А. Халилов; исполн. В. Б. Минтюк [и др.]. – Х., 2014. – 160 с. – №ГР 0112U002135. – Инв. № 0215U006163.

2. Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Решение базовой задачи [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, В.В. Копычко, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 3(120). – С. 24-32.

3. Основная краевая задача общей классической теории открытой цилиндрической оболочки. Конструкция решения [Текст] / В. С. Кривцов, В. Н. Павленко, В. В. Копычко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2015. – № 6(123). – С. 16-22.

4. Копычко, В. В. Деформирование открытой цилиндрической оболочки при согласованных обобщенных перемещениях угловых точек границы [Текст] / В. В. Копычко // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2015. – Вып. 70. – С. 184 –193.

5. Халилов, С. А. Новые системы ортонормированных многочленов, некоторые их свойства и приложения [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов: темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 5. – Х., 1978. – С. 46 – 56.

6. Халилов, С. А. Вычисление некоторых определенных интегралов, содержащих присоединенные функции Лежандра второго и четвертого порядков [Текст] / С. А. Халилов // Прочность конструкций летательных аппаратов : темат. сб. науч. тр. Харьк. авиац. ин-та им. Н. Е. Жуковского. – Вып. 7. – Х., 1984. – С. 158 – 165.

7. Халилов, С. А. Приближённое аналитическое решение бигармонической проблемы в прямоугольнике при однородных главных краевых условиях на двух противоположных сторонах и произвольных – на двух других [Текст] / С. А. Халилов, В. Б. Минтюк, Д. А. Ткаченко // Авиационно-космическая техника и технология. – 2013. – № 5 (102). – С. 40 – 49.

8. Гольденвейзер, А. Л. Теория тонких упругих оболочек [Текст] / А. Л. Гольденвейзер. – изд. 2-е. – М. : Наука, 1976. – 512 с.

Поступила в редакцию 11.03.2016

# Деформування відкритої циліндричної оболонки з нерухомими кутовими точками границі і довільними переміщеннями її сторін

Поставлено і вирішено крайову задачу для відкритої циліндричної оболонки з прямокутним планом при повному закріпленні кутових точок границі та довільних переміщеннях і кутах повороту уздовж її сторін. Рішення має аналітико-числовий характер. Досліджено основні властивості отриманого рішення: стійкість, збіжність і точність у різних метриках. Показано, що всі компоненти НДС можуть бути отримані з будь-якою наперед заданою точністю, тобто рішення є практично точним. Результати даної роботи разом із результатами трьох попередніх робіт автора мають важливе значення при аналізі оболонково-пластинчастих систем, якими є несучі конструкції авіакосмічної техніки.

***Ключові слова*:** загальна моментна теорія оболонок; відкрита оболонка, нерухомі кутові точки, довільні зміщення сторін; допоміжна задача; базова задача; коригувальна компонента.

# Deformation of Open Cylindrical Shell with Fixed Border Corner Points and Arbitrary Displacements of its Sides

Given and solved the boundary value problem for an open cylindrical shell with a rectangular plan with the full fixation of the boundary corner points and the arbitrary displacement and rotation angles along its sides. The solution has analytical-numerical character. The basic properties of the solutions: stability, convergence and accuracy were examined in various metrics. It is shown that all the components of the stress strain behavior could be obtained with any prescribed accuracy: i.e. the solution is practically exact. The results of this work, together with the results of the three previous works of the author are important when analyzing the shell-plate systems, which are the supporting structures of aerospace constructions.

***Keywords:*** general moment theory of shells, open shell, fixed angle points, arbitrary displacement of sides; auxiliary task; basic task; correction component.