УДК 51ББК 74.26+65Я721

В. П. Божко, Д. В. Божко,
О. Л. Омельченко

Использование методов решения экстремальных задач для моделирования производственно-экономических процессов

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ»

В статье рассмотрены методы решения экстремальных задач, часто встречающихся в производственно-экономической деятельности. При этом актуальными являются проблемы организации выпуска новой продукции, исследования различных видов материалов и сырья, выбора оборудования, разработки эффективных техпроцессов, оптимальной организации производства и ряд других.

В указанных случаях наряду с использованием компьютерных технологий могут эффективно применяться способы решения экстремальных задач, основанных на методах линейного программирования.

Ключевые слова: экстремальная задача, математическая модель, план выпуска, доход, бюджетная линия, точка безразличия

Введение

В производственно-экономической деятельности важное значение приобретает проблема выбора оптимальных решений.

Для большинства производственных задач характерным является наличие большого количества возможных вариантов решений. Например, при организации производства новой продукции могут использоваться различные виды материалов, сырья и заготовок, а также разные способы изготовления, которые отличаются видом оборудования, характером технологических процессов, методами организации производства и.т.п.

Практика показывает, что последовательное рассмотрение всех возможных вариантов и выбор лучшего из них не всегда эффективны. Объясняется это тем, что каждый вариант представляет собой сложное сочетание различных факторов, поэтому даже в случае простых задач перебор и сравнение всех возможных решений практически не всегда осуществимо даже при использовании компьютерной техники.

В данных случаях эффективным может быть применение методов решения экстремальных задач, когда ее условие записывается в виде уравнения или неравенства, т.е. представляется математической моделью.

Следует подчеркнуть, что математическая модель экстремальных задач имеет свою особенность: в ее состав всегда входит некая целевая функция, которую при заданных условиях необходимо минимизировать или максимизировать, т.е. найти ее оптимальное значение.

Те задачи, в которых целевая функция связана с переменными линейной зависимостью и область точек задана линейными ограничениями, являются задачами линейного программирования. К таким задачам обычно относят три их типа: транспортную задачу; задачу составления производственного плана; задачу составления смеси.

В данной статье рассматривается методика решения практических задач, преобразуемых к линейной целевой функции[1].

Далее на конкретных примерах рассматривается эта методика.

1. Взаимосвязь объема выпуска и дохода

Пусть на производственном участке изготавливают изделия двух видов «А» и «В», для которых в качестве материалов используются сталь и цветные сплавы, а в качестве технологического оборудования применяются токарные и фрезерные станки (табл.1)

Таблица 1

Исходные данные для примера 1

Виды изделий	Используемые материалы		Трудоемкость обработки, нормо-часы		Доход на 1 изделие, тыс. денежных единиц
	Сталь, расход на 1 изделие, кг	Цветные сплавы, расход на 1 изделие, кг	Токарная	Фрезерная	
«А» «В»	10 70	20 50	300 400	200 100	3,0 8,0
Общая планируемая трудоемкость на заказ, нормо-часы			6200	3400	
Общая масса заготовок на заказ, кг	320	420			

Целью задачи является определение плана выпуска продукции, когда достигается максимальный доход при условии, что время работы оборудования (например, фрезерных станков) используется полностью.

Процедура решения задачи будет следующей:

Вначале должна быть построена математическая модель, для чего обозначим через $\boldsymbol{x}$ количество изделий вида «А», а через $\boldsymbol{y}$ – число изделий вида «В». Тогда на изготовление всей продукции понадобится ($10x + 70y$) кг стали и ($20x + 50y$) кг цветных сплавов. Поскольку запасы стали не превышают 320 кг, а цветных сплавов – 420 кг, то можно записать следующие неравенства

$$10x + 70y \le 320, \qquad (1)$$
$$20x + 50y \le 420. \qquad (2)$$

Неравенство, характеризующее время обработки всех изделий на токарных станках запишем в виде:

$$300x + 400y \le 6200. \qquad (3)$$

По условию задачи фрезерные станки используются максимально, поэтому имеем:

$$200x + 100y = 3400, \qquad (4)$$

Система ограничений данной задачи может быть записана в виде:

$$\begin{cases} 10x + 70y \leq 320 \\ 20x + 50y \leq 420 \\ 300x + 400y \leq 6200 \\ 200x + 100y = 3400 \\ x \geq 0, \ y \geq 0 \end{cases} \qquad (5)$$

Общий доход производственного участка может быть выражен целевой функцией

$$F = 3x + 8y \qquad (6)$$

Выразив ***y*** через ***x*** из уравнения (4) и использовав это значение ***y*** в неравенствах (5) и в целевой функции (6), получим:

$$\begin{cases} x + 7(34 - 2x) \leq 32 \\ 2x + 5(34 - 2x) \leq 42 \\ 3x + 4(34 - 2x) \leq 62 \\ y = 34 - 2x \\ x \geq 0, \\ 34 - 2x \geq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

$$F = 3x + 8(34 - 2x) = -13x + 272 \qquad (8)$$

Преобразуем систему ограничений (7):

$$\begin{cases} 13x \geq 206 \\ 8x \geq 128 \\ 5x \geq 74 \\ 0 \leq x \leq 17 \\ y = 34 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 15{,}84 \\ x \geq 16 \\ x \geq 14{,}8 \\ 0 \leq x \leq 17 \\ y = 34 - 2x \end{cases} \quad \begin{cases} 16 \leq x \leq 17 \\ y = 34 - 2x \end{cases} \qquad (9)$$

Отсюда следует, что целевая функция (8) будет иметь максимум при $x = 16$, т.е.

F_{max}= 64 тыс. денежных единиц.

Таким образом, если выпускается 16 изделий вида «А» и два изделия вида «В» будет получен максимальный доход.

2. Оптимизация перевозок

Рассмотрим другой пример (Таблица 2). На предприятии имеется 2 цеха и 3 склада. Необходимо определить наиболее выгодную организацию перевозок из цехов на склады.

Таблица 2

Исходные данные для примера 2

Склады / Цехи	Стоимость доставки изделий, денежн. единиц			Всего изготовлено изделий
	на склад №1	на склад №2	на склад №3	
№1	3,0	3,0	2,0	10.000
№2	6,0	5,0	1,0	5000
Количество доставляемых изделий	4000	8000	3000	15000

При решении задачи составим уравнение целевой функции, для чего введем следующие обозначения.

Пусть из цеха 1 на склад 1 перевезено $\boldsymbol{x}$ штук изделий, на склад 2 – $\boldsymbol{y}$ штук изделий, тогда на склад 3 будет перевезено (10000 – x – y) штук изделий.

Из цеха 2 на склады 1, 2 и 3 будет перевезено соответственно (4000 – x), (8000 – y) и (x + y – 7000) штук изделий.

Общая стоимость перевозок F при указанных условиях будет равна

$$F = 77000 - x - 3\,(x + y) \tag{10}$$

Поскольку $x + y = 10000$, то $F = 47000$. При $x = 4000$ переменная $\boldsymbol{y}$ будет иметь максимальное значение, равное 6000, т.е. функция F достигнет минимального значения при $x = 4000$ и $y = 6000$. Отсюда следует оптимальный план перевозок, показанный в таблице 3

Таблица 3

Оптимальный план перевозок

Склады / Цехи	№ 1	№ 2	№ 3	Всего перевезено, шт.
№ 1 № 2	4000 шт. 0	6000 шт. 2000 шт.	0 3000 шт.	10000 5000
Итого, шт.	4000	8000	3000	15000

Величина минимальных затрат на перевозку всех 15000 штук изделий составит согласно уравнению (10) 43000 денежных единиц.

3. Оптимизация потребительского выбора

Рассмотрим еще одну из важных задач современного экономического планирования, заключающуюся в определении условий и эффективных путей использования ограниченных ресурсов. Такая задача является типовой при рассмотрении проблем удовлетворения потребностей человека [3].

При этом оптимизация заключается в отыскании координат точки пересечения, графика бюджетной линии и кривой безразличия, в которой возможности потребителя совпадают с его ожиданиями (Рис.1).

На рис.1 точка пересечения графиков бюджетной линии (1) и кривой безразличия(2) являются точкой потребительского равновесия (3).

Координаты $A_{опт}$ и $B_{опт}$ являются значениями количества товаров А и В, которые можно произвести при ограниченных ресурсах.

Бюджетная линия (1) является графиком целой рациональной функцией, т.е. простейшей линейной функцией

$$y = ax + b \ (a < 0,\ b > 0) \tag{11}$$

Для математического описания кривой безразличия был использован метод наименьших квадратов [2], с помощью которого были обработаны экспериментальные точки из графика кривой безразличия, построенной для заданных точек бюджетной линии (Рис.1).

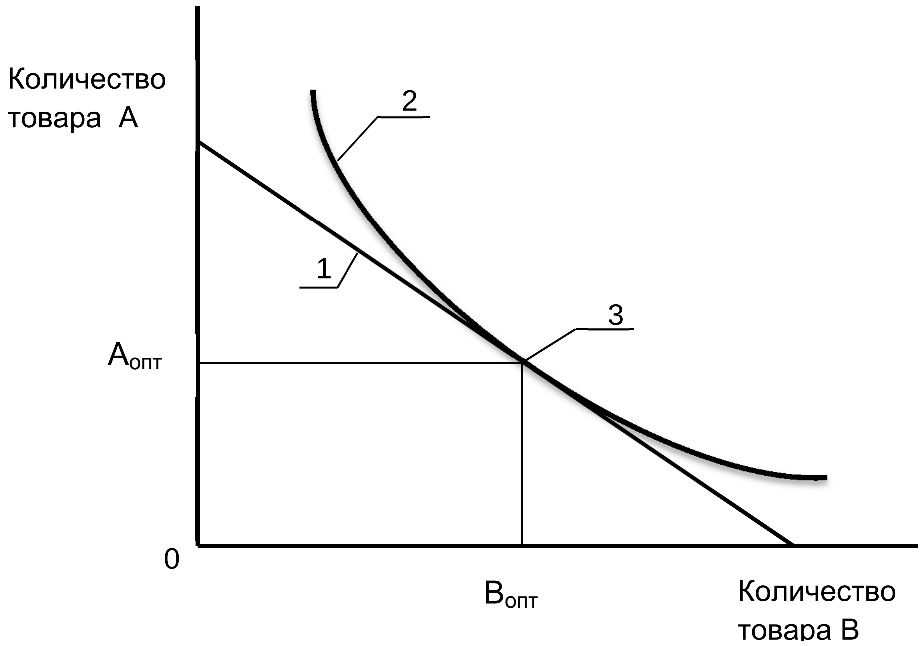

Рис. 1 График бюджетной линии (1) и кривой безразличия (2)

В качестве модели кривой безразличия наиболее подходящей является гиперболическая зависимость вида:

$$y = a + \frac{b}{x} \tag{12}$$

Для этой зависимости система нормальных уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} na + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i\,, \\ a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + b\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}\,, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

С учетом эмпирических данных и выполненных вычислений по уравнениям (13), были получены искомые значения коэффициентов (a = 0,23; b = 10). При этом кривая безразличия с достаточной точностью может быть описана уравнением

$$y = 0{,}23 + \frac{10}{x}\,. \tag{14}$$

Очевидно, что координаты точки потребительского равновесия можно определить, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = \dfrac{10}{x} + 0{,}23 \end{cases} \tag{15}$$

Выводы

Таким образом, используя методы решения экстремальных задач, можно достаточно просто определить параметры производства, обеспечивающие максимальные значения доходов.

В описанных примерах изложена методика оценки величины целевой функции как фактора эффективности производства.

Приведена модель кривой безразличия, позволяющая оптимизировать объемы производимых товаров при ограниченных средствах.

Список литературы

1. Беляева Э.С., Монахов В.П. Экстремальные задачи. М., «Просвещение», 1977, - 64 с.

2. Справочник по математике для экономистов / В.Е. Барбаумов, В.Е. Ермаков, Кривенцова Н.И. и др.; под ред. В.И. Ермакова. – М.: Высш. шк., 1987, – 336 с.

3. Дахнова О.Є. Основи економіки. Х.: ФОП Співак В.Л., 2013, – 464 с.

Поступила в редакцию 22.03.2016

Використання методів вирішення екстремальних задач для моделювання виробниче-економічних процесів

Розглянуто методи вирішення екстремальних задач, які часто зустрічаються в виробниче-економічній діяльності. При цьому актуальними є проблеми організації виробництва нової продукції, використання різних видів матеріалів та сировини, оптимізація методів організації виробництва та інші.

В багатьох аналогічних випадках поряд з використанням комп'ютерних технологій можуть бути використані методи вирішення екстремальних задач.

Ключові слова: екстремальна задача, математична модель, дохід, бюджетна лінія, крива байдужості.

Use of Solving Extreme Problems for Modeling Industrial and Economic Processes

The methods of solution of extreme problems, which are often found in industrial and economic activity. This topical problems of new products, the use of different types of materials and raw materials, optimization of production techniques and others.

In many similar cases, along with the use of computer technology can be used extreme methods of solving problems.

Keywords: extreme problems, mathematical model, revenue, the budget line indifference curve.