

## Друга основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами

*Харківський національний університет будівництва та архітектури, Харків*

Розраховано тривимірну задачу теорії пружності, коли в пружному півпросторі на межах паралельних циліндричних порожнин та на межі півпростору задано переміщення. Розв'язок отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних із циліндрами, та декартових координатах, пов'язаних з півпростором. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких зведено проблему, вирішено методом усічення. В результаті було знайдено переміщення, а потім напруження в пружному тілі. Числові результати наведено для випадку півпростору та двох циліндрів.

**Ключові слова:** циліндричні порожнини в півпросторі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є, друга основна задача.

### Вступ

При проектуванні на невеликій глибині різного роду комунікацій і тунелей потрібно знати напружено–деформований стан пружного тіла (простору або півпростору) з порожнинами, а також взаємний вплив їх один на одного. Таку інформацію можна отримати, розв'язавши відповідну задачу теорії пружності. Готових розрахунків подібних задач у просторовому варіанті немає, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною.

**Аналіз публікацій.** Просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (поверхні другого порядку: циліндр, конус, куля, еліпсоїд, параболоїд та ін.) вивчалися в роботах [1-4]. Точні рішення в цих роботах отримані виключно методом розділення змінних і методом Фур'є. Задачі для пружних тіл із декількома граничними поверхнями не можуть бути вирішені в рамках класичного підходу. Для таких задач необхідно було створювати узагальнений метод Фур'є [5-8]. На основі цього методу і був розроблений метод вирішення задачі, вказаної у заголовку. В роботах [9-12] також застосовано узагальнений метод Фур'є, для трансверсально-ізотропних тіл, обмежених координатними поверхнями в циліндричних і параболоїдальних координатах. У статті [13] розглянуто другу основну задачу теорії пружності для півпростору з однією циліндричною порожниною і умовами на межі півпростору:  $U_y = f(x) \cdot \cos \lambda z$ ,  $U_x = U_z = 0$ . Методу розрахунку півпростору з паралельними циліндричними порожнинами, на яких задані переміщення без аналізу напруженого стану, розглянуто в роботі [14].

**Мета статті.** Провести аналіз напружено–деформованого стану півпростору з декількома циліндричними порожнинами, паралельними між собою та межею півпростору, а також їх взаємного впливу. Для досягнення цієї мети використано узагальнений метод Фур'є.

### Основний матеріал

**Постановка задачі.** Пружний однорідний півпростір має  $N$  кругових циліндричних паралельних порожнин, непересічних між собою і межею півпростору. Введемо системи координат: порожнини будемо розглядати в циліндричній системі  $(\rho_p, \phi_p, z)$ , де  $p$  – номер циліндра, півпростір у декартовій системі  $(x, y, z)$ , яка од-

наково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра з номером  $p=1$ . Межа півпростору розташована на відстані  $y=h$ . Рівняння межі півпростору  $S_d$ :  $y=h$ , поверхні циліндрів:  $S_p$ :  $\rho_p = R_p$ . На межах півпростору та на межах порожнин задані переміщення, які будемо вважати швидко убутними до нуля на далеких відстанях від начала координат. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе

$$\Delta \vec{u} + (1 - 2\sigma)^{-1} \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

за умов, що на межах циліндричних порожнин задані переміщення  $\vec{U}_p^0(\phi_p, z)$ ,  $p=1, 2, \dots, N$ ;  $(\rho_p, \phi_p, z)$  – система локальних циліндричних координат, а на межі півпростору задано переміщення  $\vec{U}_d^0(x, z)$ .

У зазначених системах координат візьмемо базисні розв'язки рівняння Ламе:

$$\vec{u}_k^\pm(M_d; \lambda, \mu) = N_k^{(d)} u^\pm(M_d; \lambda, \mu); \quad (k=1, 2, 3); \quad (2)$$

$$N_1^{(d)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \vec{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(1)} \cdot);$$

$$u^\pm(M_d; \lambda, \mu) = e^{i\lambda z \pm \gamma y + i\mu x};$$

$$\vec{R}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho) e^{i(\lambda z + m\phi)}, \quad \vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = N_k^{(p)} \left[ s_m(\rho_p; \lambda) \cdot e^{i(\lambda z + m\phi)} \right], k=1, 2, 3; \quad (3)$$

$$N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \left[ \nabla \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left( \nabla - \vec{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right];$$

$$N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \operatorname{rot}(\vec{e}_3^{(2)} \cdot); \quad s_m(\rho_p; \lambda) = (\operatorname{sign} \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho_p);$$

$$\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}; \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,$$

де  $M_d = (x, y, z)$  – точка простору в декартовій системі координат, пов'язаної з півпростором;

$M_p = (\rho_p, \phi_p, z)$  – точка простору в циліндричній системі координат, пов'язаній з  $p$ -м циліндром;

$\vec{e}_j^{(k)}$ ,  $(j=1, 2, 3)$  – орти декартової ( $k=1$ ) і циліндричної ( $k=2$ ) систем координат;

$\sigma$  - коефіцієнт Пуассона;

$I_m(\lambda \rho)$ ,  $K_m(|\lambda| \rho)$  – модифіковані функції Бесселя;

$\vec{R}_{k,m}$ ,  $\vec{S}_{k,m}$ ,  $(k=1, 2, 3)$  – відповідно внутрішній та зовнішній розв'язки рівняння Ламе для циліндра;

$\vec{u}_k^{(-)}$ ,  $\vec{u}_k^{(+)}$  – розв’язки рівняння Ламе для півпростору.

Розв’язок задачі представимо у вигляді

$$\vec{U} = \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_k(\lambda, \mu) \cdot \vec{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu) d\mu d\lambda + \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) d\lambda, \quad (4)$$

де  $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$  і  $\vec{u}_k^{(+)}(M_d; \lambda, \mu)$  задані формулами (2), (3), а невідомі інтегральні щільності  $H_k(\lambda, \mu)$ ,  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$  необхідно знайти із крайових умов.

Якщо вираз (4) записати в системі координат півпростору  $(x, y, z)$  та підставити у ліву частину крайові умови  $\vec{U}_d^0(x, z)$ , ми отримаємо систему із трьох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $H_k(\lambda, \mu)$  (по одному на кожну проекцію на осі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Аналогічно записавши (4) в системі координат кожного циліндра з номером  $p$  з крайовими умовами в лівій частині  $\vec{U}_p^0(\phi_p, z)$ , ми отримаємо ще  $3 \cdot N$  нескінченних систем лінійних інтегро - алгебраїчних рівнянь для кожного циліндра  $p$  відносно коефіцієнтів  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ . У сукупності маємо  $3 \cdot (N+1)$  лінійних інтегро - алгебраїчних рівнянь відносно  $H_k(\lambda, \mu)$ ,  $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ .

Для переходу між системами координат (рис.1) застосовано формули:

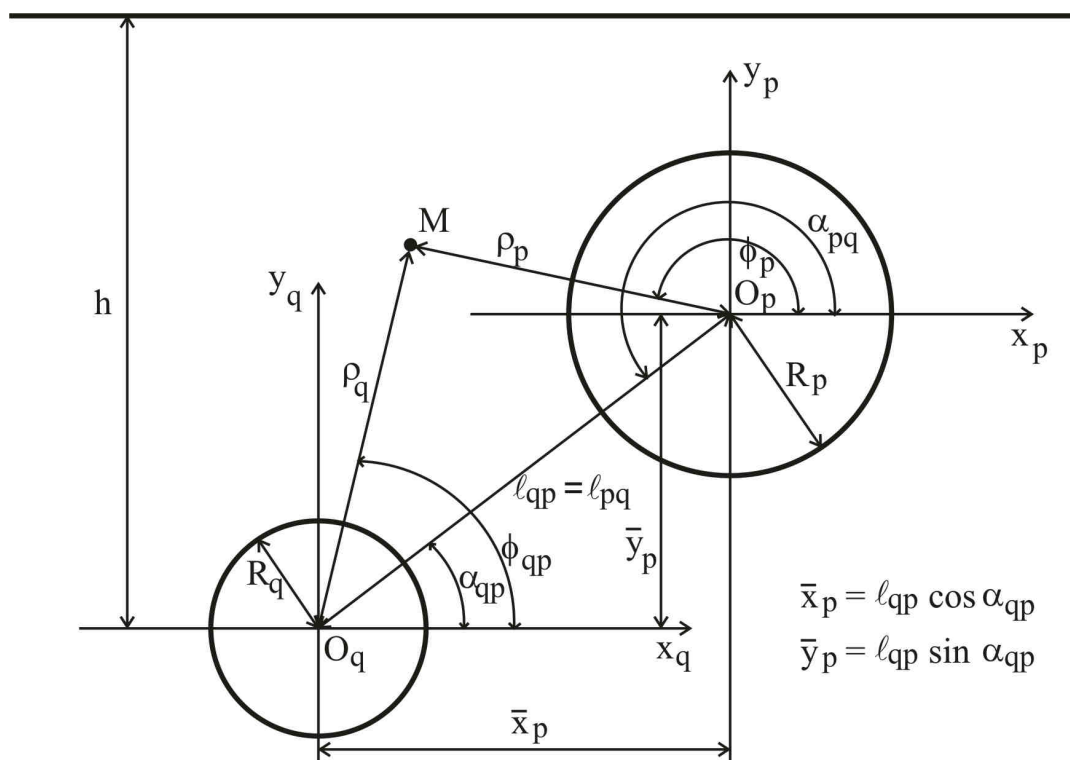


Рис. 1. Півпростір із циліндричними порожнинами

- від циліндра з номером  $p$  до півпростору

$$\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \frac{(-i \cdot \text{sign}(\lambda))^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \vec{u}_k^{(-)} \cdot e^{-i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} \frac{d\mu}{\gamma}, k=1, 3;$$

$$\vec{S}_{2,m}(M_p; \lambda) = \frac{(-i \cdot \text{sign}(\lambda))^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^m \cdot \left( \left( m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} + \lambda^2 \bar{y}_p \right) \vec{u}_1^{(-)} - \lambda^2 \vec{u}_2^{(-)} + \right. \quad (5)$$

$$\left. + 4\mu(1-\sigma) \vec{u}_3^{(-)} \right) \frac{e^{-i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},$$

де  $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ ,  $\omega(\lambda, \mu) = \frac{\mu - \gamma}{\lambda}$ ,  $y > 0$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;

- від півпростору до циліндра  $p$

$$\vec{u}_k^{(+)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega)^m \vec{R}_{k,m} \cdot e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p}, (k=1, 3);$$

$$\vec{u}_2^{(+)} = e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ (i \cdot \omega)^m \cdot \lambda^{-2} \left( m \cdot \mu \cdot \vec{R}_{1,m} + \gamma \cdot \vec{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \vec{R}_{3,m} \right) + \right. \quad (6)$$

$$\left. + \bar{y}_p \cdot (i \cdot \omega)^m \vec{R}_{1,m} \right],$$

де  $\vec{R}_{k,m} = \vec{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(n\phi + \lambda z)}$ ;  $\bar{x}_p, \bar{y}_p$  – координати циліндра  $p$  відносно першого циліндру.

$$\vec{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda\rho) + i \cdot I_n(\lambda\rho) \cdot \left( \vec{e}_\phi \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_z \right);$$

$$\vec{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \vec{e}_\rho \cdot \left[ (4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda\rho) + \lambda\rho I''_n(\lambda\rho) \right] +$$

$$+ \vec{e}_\phi i \cdot m \left( I'_n(\lambda\rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} I_n(\lambda\rho) \right) + \vec{e}_z i \lambda \rho I'_n(\lambda\rho);$$

$$\vec{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[ \vec{e}_\rho \cdot I_n(\lambda\rho) \frac{n}{\lambda\rho} + \vec{e}_\phi \cdot i \cdot I'_n(\lambda\rho) \right],$$

- для переходу від координат циліндра із номером  $p$  до координат циліндра  $q$

$$\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\phi_q + \lambda z)}, k=1, 2, 3; \quad (7)$$

$$\vec{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\vec{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda);$$

$$\vec{b}_{2,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \left\{ \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot \vec{b}_{2,n}(\rho_q, \lambda) - \frac{\lambda}{2} \ell_{pq} \cdot \left[ \tilde{K}_{m-n+1}(\lambda \ell_{pq}) + \tilde{K}_{m-n-1}(\lambda \ell_{pq}) \right] \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda) \right\} \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}}.$$

де  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$ .

**Метод вирішення.** Для реалізації крайових умов на межі півпростору та на поверхні  $\rho$ -го циліндра відомі вектори  $\vec{U}_d^0(x, y, z)$  і  $\vec{U}_p^0(\phi, z)$  наведемо у вигляді розкладання

$$\begin{aligned} \vec{U}_p^0(\phi_p, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{h}_m^{(p)}(\lambda) \cdot e^{i(\lambda\phi_p + \lambda z)} d\lambda, \\ \vec{U}_d^0(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{c}(\lambda, \mu) \cdot e^{i(\mu x + \lambda z)} d\lambda d\mu, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} \vec{h}_m^{(p)}(\lambda) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_p^0(\phi_p, z) \cdot e^{-i(\lambda z + m\phi_p)} dz, \quad (p = 1, 2, \dots, N); \\ \vec{c}(\lambda, \mu) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_d^0(x, z) \cdot e^{-i(\mu x + \lambda z)} dx dz. \end{aligned}$$

Розв'язок (3) для циліндрів  $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$  (при  $\rho_p = R_p$ ) матиме такий вигляд:

$$\vec{S}_{k,m}(\rho, \phi, z; \lambda) = \vec{a}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\phi + \lambda z)}, \quad (k = 1, 2, 3), \tag{9}$$

де  $\vec{a}_{1,m}(\rho, \lambda) = \left[ \vec{e}_\rho \cdot K'_m(t) \cdot \text{sign}(\lambda) + i \cdot K_m(t) \left( \vec{e}_\phi \frac{m}{\lambda\rho} + \vec{e}_z \right) \right] \cdot (\text{sign}(\lambda))^m$ ;

$$\begin{aligned} \vec{a}_{2,m}(\rho, \lambda) &= (\text{sign}(\lambda))^m \left\{ \vec{e}_\rho \cdot \left[ (4\sigma - 3) \cdot K'_m(t) \cdot \text{sign}(\lambda) + \lambda\rho K''_m(t) \right] + \right. \\ &+ \left. \vec{e}_\phi i \cdot m \left( \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda\rho} K_m(t) + K'_m(t) \text{sign}(\lambda) \right) + \vec{e}_z \cdot i \cdot |\lambda| \cdot \rho \cdot K'_m(t) \right\}; \end{aligned}$$

$$\vec{a}_{3,m}(\rho, \lambda) = -(\text{sign}(\lambda))^m \left[ \vec{e}_\rho K_m(t) \frac{m}{\lambda\rho} + \vec{e}_\phi i \cdot \text{sign}(\lambda) \cdot K'_m(t) \right], \quad t = |\lambda| \cdot \rho.$$

Функції (2) на межі півпростору (при  $y=h$ ) мають вигляд

$$\begin{aligned} \vec{u}_1^{(\pm)} &= \vec{d}_1^{(\pm)} \cdot e^{i(\lambda z + \mu x)}, \quad \vec{u}_2^{(\pm)} = \vec{d}_2^{(\pm)} \cdot e^{i(\lambda z + \mu x)}, \quad \vec{u}_3^{(\pm)} = \vec{d}_3^{(\pm)} \cdot e^{i(\lambda z + \mu x)}; \\ \vec{d}_1^{(+)} &= (\mu \vec{e}_x + \gamma \vec{e}_y + i\lambda \vec{e}_z) \frac{e^{\gamma h}}{\lambda}, \quad \vec{d}_2^{(+)} = (\mu h \vec{e}_x + (4\sigma - 3 + \gamma h) \vec{e}_y + ih\lambda \vec{e}_z) \frac{e^{\gamma h}}{\lambda}; \\ \vec{d}_3^{(+)} &= (i\gamma \vec{e}_x + \mu \vec{e}_y) \frac{e^{\gamma h}}{\lambda}, \quad \vec{d}_1^{(-)} = (\mu \vec{e}_x - \gamma \vec{e}_y + i\lambda \vec{e}_z) \frac{e^{-\gamma h}}{\lambda}; \\ \vec{d}_2^{(-)} &= (\mu h \vec{e}_x + (4\sigma - 3 - \gamma h) \vec{e}_y + ih\lambda \vec{e}_z) \frac{e^{-\gamma h}}{\lambda}, \quad \vec{d}_3^{(-)} = (-i\gamma \vec{e}_x + \mu \vec{e}_y) \frac{e^{-\gamma h}}{\lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$

Задовольняючи крайові умови на межі циліндра  $S_q$  у розв'язку (4) перепишемо  $\vec{u}_k^{(+)}(M_d)$  у системі координат циліндра  $\rho=q$  за формулами (6), для кожного циліндра  $\rho \neq q$  перепишемо  $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$  за формулами (7) і, враховуючи розв'язок (9) для циліндра  $\rho=q$ , прирівняємо векторні коефіцієнти при  $e^{i(\lambda z + m\phi)}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 \left( B_{s,m}^{(q)}(\lambda) \cdot \vec{a}_{s,m}(R_q, \lambda) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1, p \neq q}^N B_{s,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \vec{b}_{s,pq}^{mn}(R_q) \right) = \\ = \vec{h}_m^{(p)}(\lambda) - \sum_{s=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} H_s(\lambda, \mu) \cdot \sum_{n=1}^3 \vec{b}_{n,m}(\rho, \lambda) \cdot f_{s,n}^m(\lambda, \mu) d\mu, \end{aligned} \quad (11)$$

де матриця

$$f^m(\lambda, \mu) = \left[ f_{s,n}^m(\lambda, \mu) \right] = (i \cdot \omega(\lambda, \mu))^m \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{m\mu}{\lambda^2} + \bar{y}_p & \frac{\gamma}{\lambda^2} & \frac{4\mu(1-\sigma)}{\lambda^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot e^{i\mu \bar{x}_p + \gamma \bar{y}_p}.$$

Задовольняючи крайові умови на межі півпростору  $S_d$  у розв'язку (4) перепишемо для кожного циліндра  $\vec{S}_{k,m}(M_p; \lambda)$  у системі координат півпростору за допомогою формул (5) і, враховуючи розв'язок для півпростору (10), прирівняємо векторні коефіцієнти при  $e^{i(\lambda z + \mu x)}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^3 H_s(\lambda, \mu) \vec{d}_s^{(+)}(\lambda, \mu) = \vec{c}(\lambda, \mu) - \sum_{p=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{s,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \\ \cdot \sum_{n=1}^3 \frac{(-i\omega(\lambda, \mu) \text{sign}(\lambda))^m}{2\gamma} g_{p,n}^m(\lambda, \mu) \vec{d}_n^{(-)}(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (12)$$

де матриця

$$g^m(\lambda, \mu) = [g_{p,n}^m(\lambda, \mu)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{m\mu - \lambda^2/\gamma}{\gamma} + \bar{y}_p \frac{\lambda^2}{\gamma} & \frac{-\lambda^2}{\gamma} & \frac{4\mu(1-\sigma)}{\gamma} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i\mu\bar{x}_p + \gamma\bar{y}_p}.$$

Визначник системи (12) відносно  $H_s(\lambda, \mu)$  дорівнює  $\frac{\gamma}{\lambda^2}(3 - 4\sigma)e^{3\gamma h} > 0$ .

Якщо з рівняння (12) виразити  $H_s(\lambda, \mu)$ , отриманий вираз підставити у (11) та спроектувати ці векторні рівності на осі координат (прирівняти проекції при базисних векторах  $\vec{e}_\rho$ ,  $\vec{e}_\phi$ ,  $\vec{e}_z$  для циліндрів), то отримаємо сукупність 3-N нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$ . Для отриманих систем можна довести їх однозначну розв'язність. Більше того, ці системи можна вирішувати методом усічення і має місце збіжність наближених рішень до точного, як це доведено в [13] для однієї порожнини. Отримавши із системи рівнянь числові значення  $B_{s,m}^{(p)}(\lambda)$ , підставимо їх у знайдені вирази для  $H_s(\lambda, \mu)$ . Отже знайдені всі невідомі коефіцієнти і функції з виразу (4).

**Числові результати для двох циліндрів.** Маємо дві паралельні циліндричні порожнини у півпросторі (рис. 1), які розташовані на відстані  $\ell_{qp} = 40$  см. під кутом  $\alpha_{qp} = 3\pi/2$ ,  $h=30$  см. Радіуси порожнин  $R_p = R_q = 10$  см. Простір – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона  $\sigma = 0,35$ , модуль пружності  $E = 2кН / см^2$ . На межах циліндрів задано вектор переміщення у вигляді  $U_\rho^{(q)} = 10^{-4} \cdot (z^2 + 10^2)^2$ ;  $U_\rho^{(p)} = 0$ ;  $U_z^{(q)} = U_z^{(p)} = 0$ ;  $U_\phi^{(q)} = U_\phi^{(p)} = 0$ ; на межі півпростору  $U_x^{(d)} = U_y^{(d)} = U_z^{(d)} = 0$ .

Отримана нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої:  $m=-4, \dots, 4$ , межі інтеграції за  $\lambda$  були взяті від  $-3, \dots, 3$ , за  $\mu$  від  $-1, \dots, 1$ . Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона та Сімпсона. Це є достатнім при заданих геометричних умовах, точність виконання граничних умов у цьому випадку досягає  $10^{-4}$ .

У результаті розв'язання цієї системи рівнянь були знайдені невідомі функції, перевірено виконання граничних умов на межі півпростору та на межах циліндричних порожнин, побудовані графіки нормальних напружень відносно навантаженого циліндра  $q$  (рис.2). На рис. 2 видно, що екстремальні напруження виникають у місцях, наближених до півпростору та іншого циліндра. Більше того, півпростір має більший вплив на  $\sigma_\rho$ , а циліндрична порожнина більше впливає на  $\sigma_\phi$  і  $\sigma_z$ .

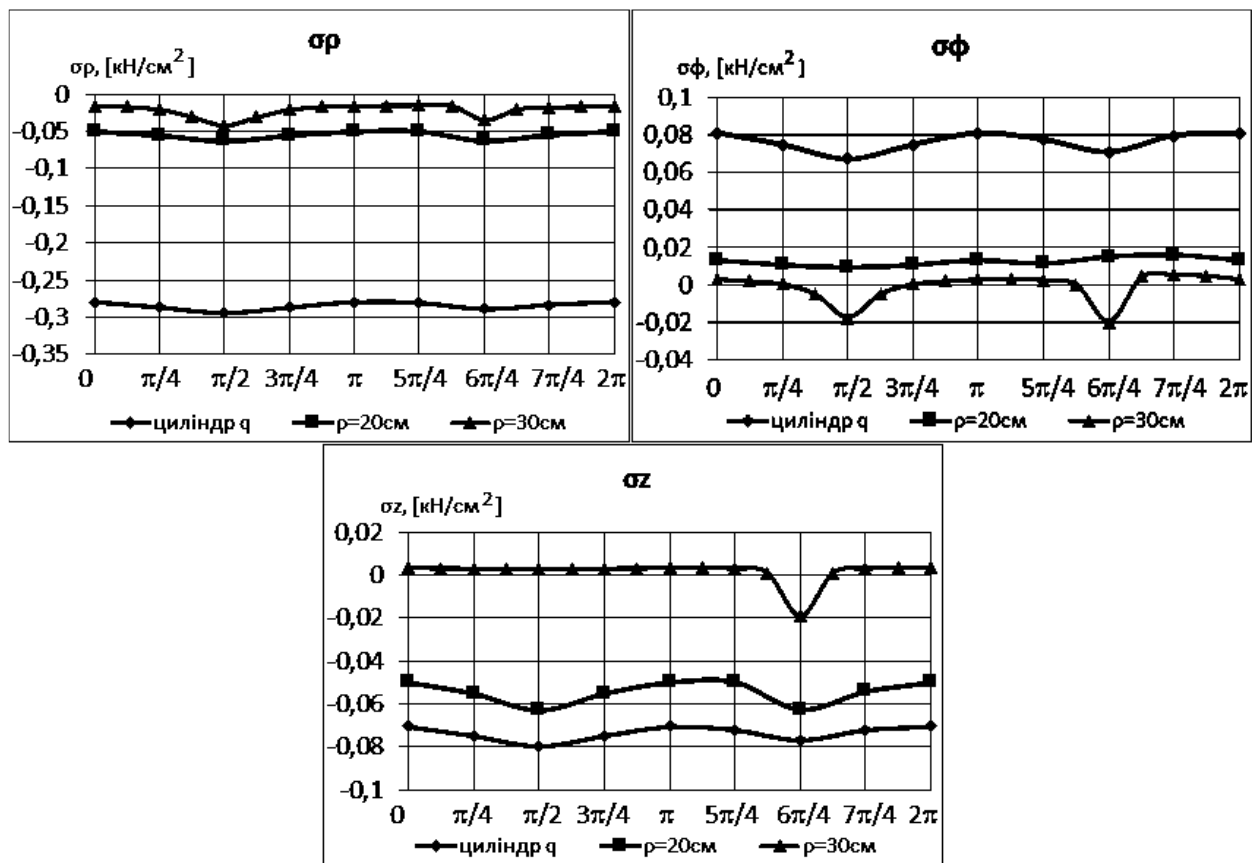


Рис. 2. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$

Найбільш напружений стан знаходиться на перешийку між циліндром  $q$  та площиною  $y=h$  (вздовж  $Y_q$  від циліндра  $q$  до межі півпростору, рис.3, ліворуч) і між циліндричними порожнинами по лінії  $\ell_{qp}$  (вздовж  $Y_q$  від циліндра  $q$  до циліндра  $p$ , рис. 3, праворуч).

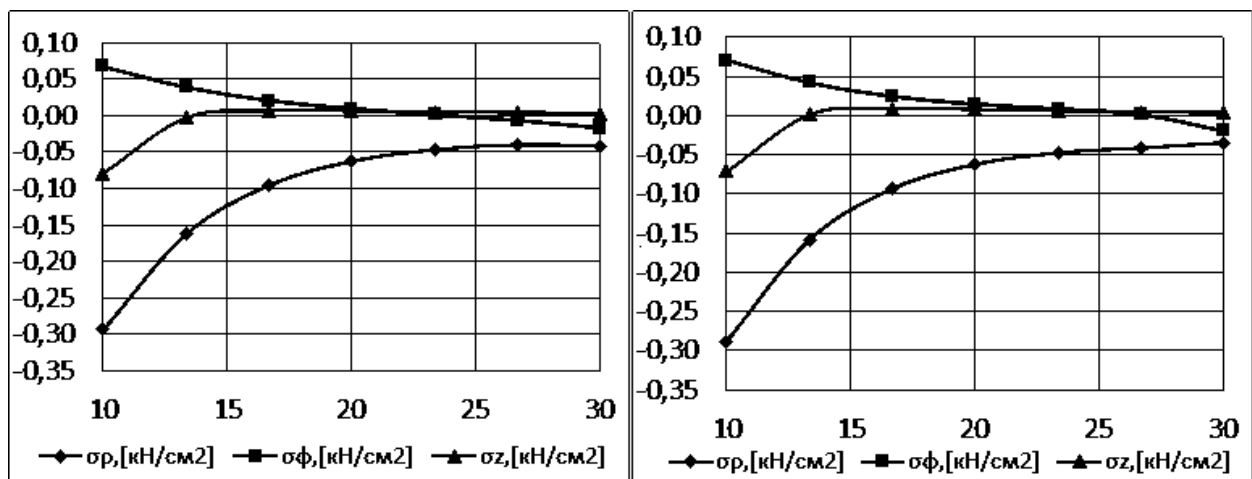


Рис. 3. Нормальні напруження на перешийках

Якщо зменшити відстані між порожнинами та межею півпростору, залишимо всі інші параметри незмінними, тобто прийmemo  $\ell_{qp} = 25$  см (відношення



$\frac{R_p + R_q}{l_{qp}} = 0,8$ ),  $h=15$  см. Для забезпечення виконання граничних умов з точністю  $10^{-4}$  кількість членів ряду Фур'є необхідно збільшити до  $m = -10, \dots, 10$ .

На рис. 4 порівняно з рис.2 можна побачити, як вплинула зміна відстані на нормальні напруження. Напруження  $\sigma_r$  та  $\sigma_z$  значно збільшилися і мають більш виражений характер. Напруження  $\sigma_\phi$  на поверхні циліндра  $p$  в областях, наближених до циліндра  $q$  та півпростору, змінили знак на протилежний і тепер мають стискаючі значення.

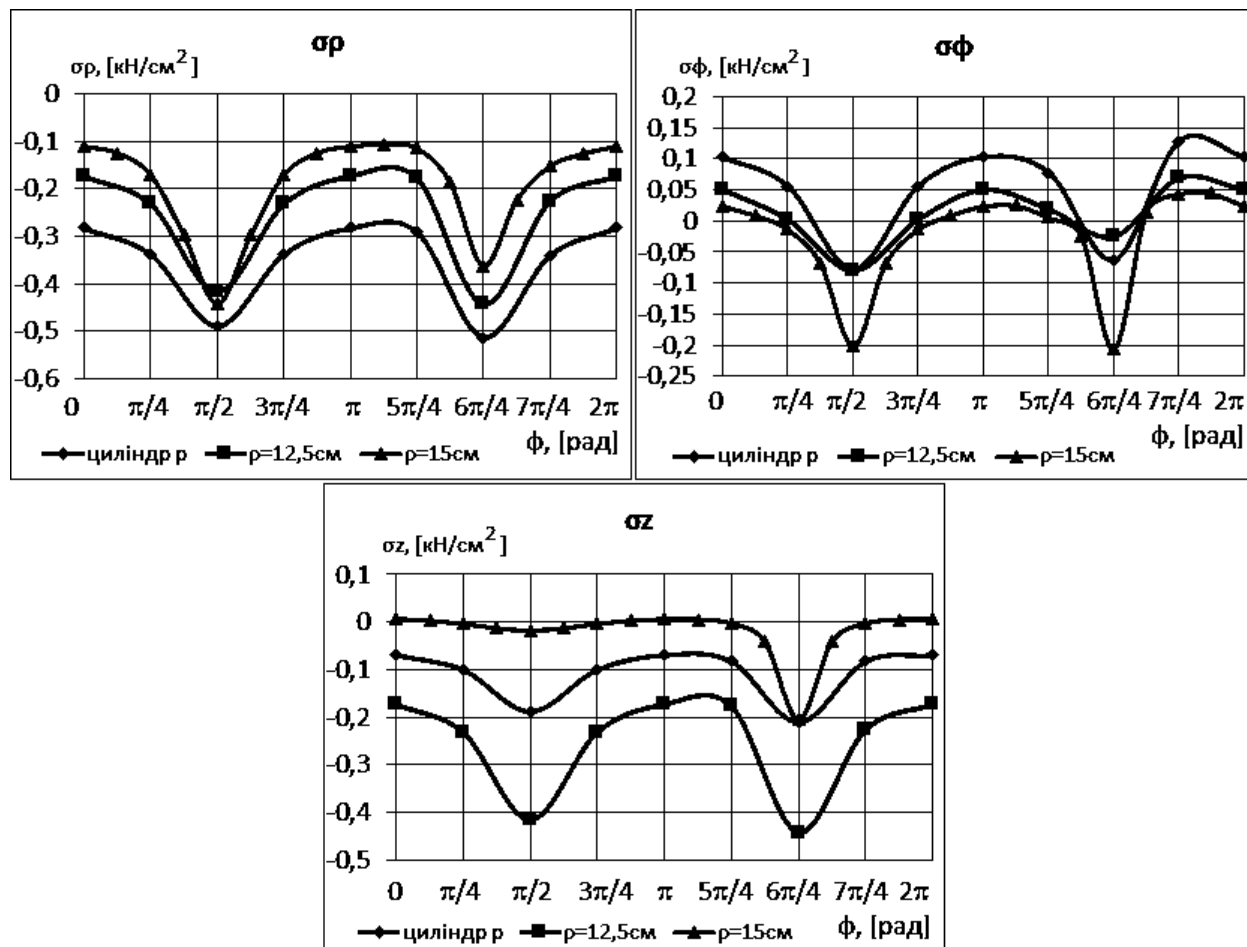


Рис. 4. Нормальні напруження в координатах циліндра  $q$

На рис. 5 порівняно з рис. 3 можна побачити, що напруження на перешийках не тільки зросли, але й мають іншу форму, наприклад,  $\sigma_\phi$  у попередній задачі зменшувалась, прямуючи до нуля та лише на межі півпростору, або циліндра  $p$  мала невеликий ріст. У цьому випадку  $\sigma_\phi$  при наближенні до межі півпростору або циліндра  $p$  має впевнений зріст зі значеннями, значно вищими, ніж на циліндрі  $q$ , який має ненульове переміщення.

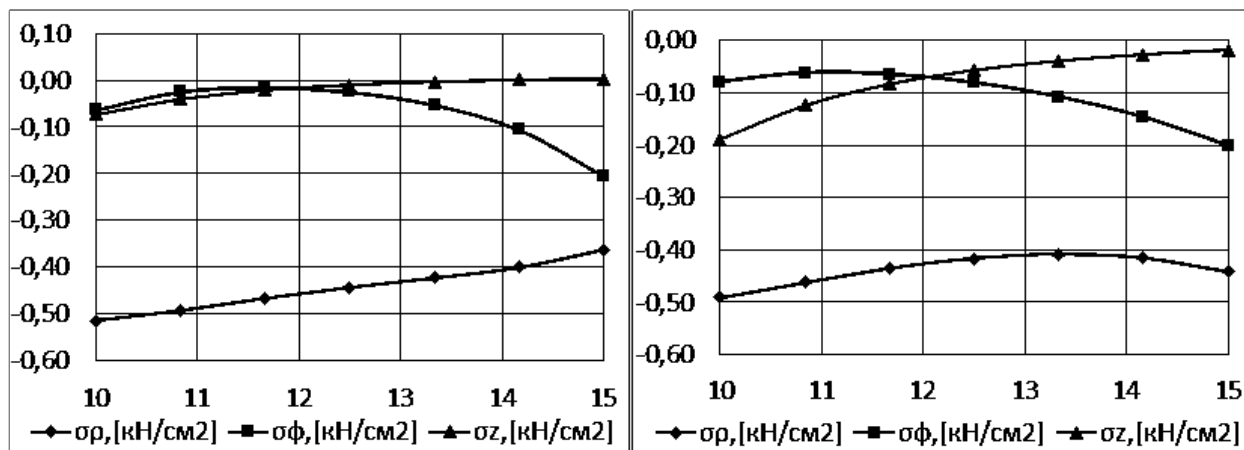


Рис. 5. Нормальні напруження на перешийках

### Висновки

Запропоновано метод розв'язання задачі теорії пружності, коли на межі півпростору та на межах декількох паралельних циліндричних кругових порожнин задані переміщення.

Проведені числові дослідження алгебраїчної системи для двох циліндрів ( $N=2$ ) дозволяють стверджувати, що її рішення може бути з будь-яким ступенем точності знайдено методом редукції.

Наведені графіки дають уявлення про розподіл напружень у тілі у найбільш цікавих зонах, про взаємний вплив циліндричних порожнин одна на одну та взаємний вплив межі півпростору і циліндричних порожнин.

### Список літератури

1. Подильчук, Ю.Н. Пространственные задачи теории упругости/ Ю.Н. Подильчук. – Київ: Наук.думка, 1979. –240 с.
2. Гринченко, В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы/ В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко. – Київ: Наук.думка, 1985. –280 с.
3. Улитко, А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости/ А.Ф. Улитко.- Київ: Наук.думка, 1979. –265 с.
4. Уфлянд, Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости/ Я.С. Уфлянд. – Ленинград:Наука, 1967. –402 с.
5. Гузь, А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями/ А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко. – Київ: Наук.думка, 1970. –323 с.
6. Гузь, А.Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах/ А.Н. Гузь, В.Т. Головчан. – Київ: Наук.думка, 1972. –254 с.
7. Николаев, О.Г. Узагальнений метод Фур'є в просторових задачах теорії пружності для канонічних багатозв'язкових тіл/ О.Г. Николаев. – Дніпропетровськ: автореф. дис. д-ра физ-мат. наук, 1997. –36 с.
8. Николаев, А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости/ А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. –344 с.

9. Щербакова, Ю. А. Сравнительный анализ НДС многосвязных трансверсально-изотропных тел с различными упругими характеристиками / Ю. А. Щербакова, Е. М. Шехватова // Вісник Запорізького національного університету. – Запоріжжя, 2015. – Вып. 2. – С. 253-261.

10. Николаев, А. Г. Аппарат и приложения обобщенного метода Фурье для трансверсально-изотропных тел, ограниченных плоскостью и параболоидом вращения / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 160-169.

11. Николаев, А. Г. Обоснование метода Фурье в осесимметричных задачах теории упругости для трансверсально-изотропных тел, ограниченных поверхностью параболоида / А.Г. Николаев, Ю.А. Щербакова // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии : сб. науч. тр. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «ХАИ», 2010. – Вып. 48. – С. 180-190.

12. Николаев, А. Г. Действие сосредоточенной силы на трансверсально-изотропное полупространство с параболоидальным включением / А.Г. Николаев, А.Ю. Щербакова, А.И. Южно // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. Сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н. Е. Жуковского «ХАИ». – Харьков: НАКУ, 2006. – Вып. 2(45). – С. 47-51.

13. Проценко, В.С. Вторая основная краевая задача теории упругости для полупространства с круговой цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Попова. – Київ: Доп. НАН України, – 2004. – №12. – С. 52-58.

14. Визначення НДС в пружному полупросторі з циліндровими порожнинами / В.Ю. Мірошніков, А.В. Медведєва, С.О. Ворончіхіна, С.В. Олешкевич. // Науковий вісник будівництва. – Вип. 68. – Харків: ХОТВАБУ ХНУБА. – 2012. – С. 156-162.

15. Николаев, А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей / А.Г. Николаев. – Київ: Доп. НАН України, – 1998. – №2. – С.78-83.

Надійшла до редакції 20.02.2018

## **Вторая основная задача теории упругости в полупространстве с несколькими параллельными круговыми цилиндрическими полостями**

Решена трехмерная задача теории упругости, когда в упругом полупространстве на границах параллельных цилиндрических полостей и на границе полупространства задано перемещение. Решение получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндрами и декартовых координатах, связанных с полупространством. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, к которым сведена проблема, решены методом усечения. В результате были найдены перемещения, а затем напряжения в упругом теле. Числовые результаты приведены для случая полупространства и двух цилиндров.

**Ключевые слова:** цилиндрические полости в полупространстве, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье, вторая основная задача.

## **The Second Basic Problem of the Theory of Elasticity in a Half-Space with Several Parallel Circular Cylindrical Cavities**

A three-dimensional problem of the theory of elasticity is solved, when a displacement is prescribed in an elastic half-space at the boundaries of parallel cylindrical cavities and on the boundary of a half-space. The solution is obtained by the generalized Fourier method with respect to the system of Lamé equations in cylindrical coordinates connected with cylinders and Cartesian coordinates connected with a half-space. Infinite systems of linear algebraic equations, to which the problem is reduced, are solved by the truncation method. As a result, displacements were found, followed by stresses in the elastic body. Numerical results are given for the case of a half-space and two cylinders.

**Keywords:** cylindrical cavities in a half-space, Lamé equations, generalized Fourier method, second main problem.

### **Відомості про автора:**

**Мирошников Виталий Юрьевич** – канд. техн. наук, доцент кафедры Строительной механики, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Украина.