УДК 004.932

Р. А. Воробель

ПОБУДОВА ОПЕРАТОРІВ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОГО МОРФОЛОГІЧНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

Method for definition of multiplicative morphological operators in analytical form by given function-generator is presented.

Keywords: *morphologic transformations, image enhancement, logarithmic morphology*.

Описано метод отримання мультиплікативних морфологічних операторів в аналітичному вигляді за заданою функцією-генератором.

Ключові слова: *морфологічні перетворення, покращання зображень, логарифмічна морфологія*.

Одним з оригінальних підходів опрацювання зображень, який був започаткований в 60-х роках минулого століття, є морфологічні перетворення. Творцями цього напрямку були Мазерон (G. Matheron) та Серра (J. Serra) [6, 9, 12]. Першопричиною його виникнення стали дослідження геологічних структур на макро- і мікрорівні. З того часу морфологічне опрацювання зображень невпинно розвивалося, і сьогодні вже відомі різні підходи до реалізації мультиплікативних логарифмічних морфологічних операторів, які зумовлені використанням алгебричних моделей логарифмічного типу. Ці моделі використовують математичну операцію множення на скаляр [5, 7, 13]. Однак не розв'язаною залишилася задача побудови узагальнених морфологічних операторів логарифмічного типу. Тому метою роботи є визначення узагальненого підходу до отримання в аналітичному вигляді виразів, які базуються на наперед заданих функціях-генераторах логарифмічного типу та забезпечують реалізацію морфологічних операцій, таких як розширення (dilation), ерозію (erosion), відмикання (opening), замикання (closing) та контрастування.

На початку розглянемо відомі мультиплікативні морфологічні оператори, а потім опишемо узагальнений метод визначення аналітичних виразів для таких операторів логарифмічного типу.

Для побудови операторів мультиплікативного морфологічного перетворення, які започаткував Захареску (E. Zaharescu) [13], необхідно знати аналітичний вираз для обчислення операцій множення на скаляр, бо саме ця операція є ключовою і забезпечує реалізацію морфологічного оператора мультиплікативним. У роботі [4] описано параметричну модель логарифмічного опрацювання зображень (ЛОЗ), яка узагальнює відомі її часткові моделі. Вона послужила базою для побудови параметризованих мультиплікативних морфологічних операторів [5]. В ній зображення та структурний елемент, який є неодмінним елементом морфологічних перетворень, розглядають як напівтонові функції: $F: D \to E$, $D \subset \mathbf{R}^2$, $E = (-M, M)$, $M > 0$. За $I(D,E)$ позначимо набір напівтонових функцій, визначених у $D \subset \mathbf{R}^2$, які набувають значення з інтервалу $E = (-M, M)$. Тоді операцію додавання $\langle + \rangle_p$ для $\forall u,\ v \in E$ означено так [4]:

$$u \langle + \rangle_p v = sign(u+v) \cdot \frac{|u+v| + (1-q) \cdot (p-2) \cdot u \cdot v / M}{1 + (p-1) \cdot u \cdot v / M^2 + q \cdot (p-2) \cdot \min(|u|, |v|) / M}, \tag{1}$$

де $$E = (-M, M)\,,\; M > 0\,,\; p > 0\,,$$

$$q = \begin{cases} 0, \text{ ÿêù î } sign(u) = sign(v), \\ 1, \text{ ÿêù î } sign(u) = -sign(v), \end{cases}$$

а операцію множення на скаляр для довільного $\alpha \in R$ і для довільного $u \in E$ представлено виразом

$$\alpha \langle \times \rangle_p u = sign(\alpha \cdot u) \cdot M \cdot \frac{(M + (p-1) \cdot |u|)^{|\alpha|} - (M - |u|)^{|\alpha|}}{(M + (p-1) \cdot |u|)^{|\alpha|} + (p-1)(M - |u|)^{|\alpha|}}. \qquad (2)$$

Описана узагальнена модель ЛОЗ через наявність параметра $p > 0$ дає змогу вибирати різні її модифікації. Зокрема, якщо $p = 1$, отримуємо базову модель ЛОЗ [2, 3], яка узагальнює модель Жорлін–Пінолі [8, 9], якщо $p = 2$, отримуємо модель Патраску [11]. Завдяки цьому відомі моделі ЛОЗ стали складовою цієї узагальненої моделі. Це дає можливість ефективно адаптувати її залежно від властивостей об'єкта сприйняття зображення, який моделюється.

У роботі [5] подано аналітичні вирази, які використовують операцію множення на скаляр (2), для побудови базових операторів параметризованої мультиплікативної логарифмічної ерозії та розширення відповідно:

$$(f \underset{p}{\langle - \rangle}_{ML} \breve{g})(x) = \inf_y \{ sign(k \cdot (f(y) - g(y-x))) \cdot M \times$$

$$\times \frac{(M + (p-1) \cdot |f(y) - g(y-x)|)^{|k|} - (M - |f(y) - g(y-x)|)^{|k|}}{(M + (p-1) \cdot |f(y) - g(y-x)|)^{|k|} + (p-1)(M - |f(y) - g(y-x)|)^{|k|}} \mid y \in D\} \qquad (3)$$

та

$$(f \underset{p}{\langle + \rangle}_{ML} \breve{g})(x) = \sup_y \{ sign(k \cdot (f(y) + g(y-x))) \cdot M \times$$

$$\times \frac{(M + (p-1) \cdot |f(y) + g(y-x)|)^{|k|} - (M - |f(y) + g(y-x)|)^{|k|}}{(M + (p-1) \cdot |f(y) + g(y-x)|)^{|k|} + (p-1)(M - |f(y) + g(y-x)|)^{|k|}} \mid y \in D\}, \qquad (4)$$

де g є функцією, яка описує структурний елемент, за який вибирають квадратний, прямокутний чи хрестоподібний окіл невеликих розмірів, а функцію $\breve{g}$ визначають так: $\forall x \in D, \breve{g}(x) = g(-x)$. За скаляр k зазвичай вибирають значення функції $k(x) = f(x)/M$ [13]. При цьому основою отриманих виразів (3) і (4) були запропоновані у роботі [13] підходи до обчислення мультиплікативних логарифмічних морфологічних операторів як взаємодії зображення f із структурним елементом g:

– мультиплікативна логарифмічна морфологічна ерозія

$$(f \langle - \rangle_{ML} \breve{g})(x) = \inf_y \{ k \langle \times \rangle (f(y) - g(y-x)) \mid y \in D\}, \qquad (5)$$

де символ $\langle \times \rangle$ означає добуток функції, що описує напівтонове зображення, на дійсний скаляр у цій моделі ЛОЗ;

– мультиплікативне логарифмічне морфологічне розширення

$$(f \langle + \rangle_{ML} \breve{g})(x) = \sup_y \{ k \langle \times \rangle (f(y) + g(y-x)) \mid y \in D\}; \qquad (6)$$

– мультиплікативне логарифмічне морфологічне відмикання

$$\psi_g^{ML} = (f\langle - \rangle_{ML} \breve{g})\langle + \rangle_{ML} g\ , \tag{7}$$

де $\langle - \rangle_{ML}$ і $\langle + \rangle_{ML}$ означають мультиплікативну логарифмічну морфологічну ерозію та розширення відповідно;

– мультиплікативне логарифмічне морфологічне замикання

$$\varphi_g^{ML} = (f\langle + \rangle_{ML} \breve{g})\langle - \rangle_{ML} g\ . \tag{8}$$

Як зазначено у роботі [13], базові оператори (5)–(8) зробили можливим її автору розвинути дослідження Жорліна (M. Jourlin) та Монтарда (N. Montard) [7]. Він використав їх під час реалізації таких операторів логарифмічних циліндричних перетворень:

– мультиплікативного логарифмічного білого циліндричного (англ. White Top Hat, WTH) перетворення – як логарифмічної різниці між функцією інтенсивності зображення f та її мультиплікативним логарифмічним відмиканням

$$WTH_{ML}(f)(x,y) = f\langle - \rangle((f\langle - \rangle_{ML} \breve{g})\langle + \rangle_{ML} g)\ ; \tag{9}$$

– мультиплікативного логарифмічного чорного циліндричного (англ. Black Top Hat, BTH) перетворення – як логарифмічної різниці між мультиплікативним логарифмічним замиканням та функцією інтенсивності зображення f

$$BTH_{ML}(f)(x,y) = ((f\langle + \rangle_{ML} \breve{g})\langle - \rangle_{ML} g)\langle - \rangle f\ ; \tag{10}$$

– мультиплікативного логарифмічного контрастування зображення f для поліпшення його якості

$$ContEnh_{ML}(f) = f\langle + \rangle WTH_{ML}(f)\langle - \rangle BTH_{ML}(f)\ . \tag{11}$$

На основі виразів (3) і (4) будуємо оператори $WTH_{ML}(f)$, $BTH_{ML}(f)$ та $ContEnh_{ML}(f)$ (9)–(11). Їх застосування сприяє поліпшенню якості зображень. Зазначимо, що за значення $p = 2$ з виразів (3)–(11) отримуємо відомі оператори мультиплікативних морфологічних перетворень [13].

У роботі [1] доведено теорему про те, що коли задані поле дійсних чисел $(R;+,\cdot)$ та адитивна абелева група $G = (E;\langle + \rangle_{\tilde{f}})$ з $E = (-M, M)$, $M > 0$ і операцією додавання $\langle + \rangle_{\tilde{f}}$:

$$u\langle + \rangle_{\tilde{f}}\, v = \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(u) + \tilde{f}(v))\ ,$$

то тоді операція відображення $R\langle \times \rangle_{\tilde{f}} E \to E$ для довільного $\alpha \in R$ і для довільного $u \in E$, яка описується виразом

$$\alpha\langle \times \rangle_{\tilde{f}}\, u = \tilde{f}^{-1}(\alpha \cdot \tilde{f}(u)) \tag{12}$$

(де $\tilde{f}(u) = sign(u) \cdot f(|u|/M)$, є строго зростаючою неперервною бієкцією, а $\tilde{f}^{-1}$ – обернена до $\tilde{f}$ функція, причому $f[0,1] \to [0,+\infty]$ з $f(0) = 0$), є операцією множення вектора на скаляр, а множина E безпосередньо є векторним простором над полем дійсних чисел R з ізоморфізмом

$$\varphi_{\tilde{f}}(u) = M \cdot \tilde{f}(u)\ .$$

Це означає, що отримані в такий спосіб аналітичні вирази для реалізації операції множення вектора на скаляр можна використати як базові для побудови нових мультиплікативних морфологічних операторів логарифмічного типу. Індивідуальні властивості таких операторів визначатимуться властивостями функції-генератора $f(|u|/M)$, оскільки функція $\tilde{f}(u)$ є непарною функцією, отриманою з використанням $f(|u|/M)$ [2]. Тому застосування за функцію-генератор параметричної функції означатиме отримання параметризованих мультиплікативних морфологічних операторів. Тобто використання формули (12) для отримання аналітичного виразу операції множення вектора на скаляр є способом отримання нових мультиплікативних морфологічних операторів, які використовують за базові визначення ерозії $(f\langle-\rangle_{ML}\breve{g})(x)$ і розширення $(f\langle+\rangle_{ML}\breve{g})(x)$ та за їх допомогою – операції замикання, відмикання та контрастування. При цьому для визначення ерозії за змінну u в отриманому виразі за формулою (12) використовуємо різницю функцій $f(y)-g(y-x)$, а для визначення розширення – їх суму $f(y)+g(y-x)$.

Розглянемо для прикладу використання ряду функцій для генерування нових морфологічних операторів, які мають логарифмічну природу, зумовлену властивостями функції-генератора алгебричної операції множення вектора на скаляр (12).

Для базової моделі ЛОЗ [2, 3] відомий вираз обчислення множення вектора на скаляр, отриманий для функції-генератора

$$\tilde{f}(u) = -sign\,(u)\cdot\ln(1-|u|/M),$$

за умов $\forall u \in E,\ k\in R,\ E=(-M,M),\ M>0$:

$$k\langle\times\rangle u = sign\,(k\cdot u)\cdot M\cdot\left(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|k|}\right). \tag{13}$$

Тоді, враховуючи підхід (5) до визначення мультиплікативної логарифмічної морфологічної ерозії та формулу (13), отримуємо такий аналітичний вираз для визначення цього оператора:

$$(f\langle-\rangle_{ML}\breve{g})(x) = \inf_y\{sign(k\cdot(f(y)-g(y-x)))\cdot M\times \\ \times\left(1-(1-\frac{|f(y)-g(y-x)|}{M})^{|k|}\right)|\,y\in D\}. \tag{14}$$

Відповідно, за аналогією, з формул (6) і (13) отримуємо вираз для мультиплікативного логарифмічного морфологічного розширення

$$(f\langle+\rangle_{ML}\breve{g})(x) = \sup_y\{sign(k\cdot(f(y)+g(y-x)))\cdot M\times \\ \times\left(1-(1-\frac{|f(y)+g(y-x)|}{M})^{|k|}\right)|\,y\in D\}. \tag{15}$$

Формули (14)–(15) є базовими для отримання аналітичних виразів операторів (7)–(11).

Водночас відомий підхід [13] для обчислення мультиплікативної логарифмічної морфологічної ерозії та розширення відповідно за виразами

$$(f\langle-\rangle_{ML}\breve{g})(x) = \inf_y\{sign(k\cdot(f(y)-g(y-x)))\cdot M\times \\ \times\frac{(M+|f(y)-g(y-x)|)^{|k|}-(M-|f(y)-g(y-x)|)^{|k|}}{(M+|f(y)-g(y-x)|)^{|k|}+(M-|f(y)-g(y-x)|)^{|k|}}\,|\,y\in D\} \tag{16}$$

та

$$(f\langle+\rangle_{ML}\breve{g})(x) = \sup_y\{sign(k\cdot(f(y)+g(y-x)))\cdot M\times \\ \times\frac{(M+|f(y)+g(y-x)|)^{|k|}-(M-|f(y)+g(y-x)|)^{|k|}}{(M+|f(y)+g(y-x)|)^{|k|}+(M-|f(y)+g(y-x)|)^{|k|}}\quad|\,y\in D\}, \tag{17}$$

отримуємо за використання функції-генератора

$$\tilde{f}(u) = sign\,(u) \cdot \ln(\frac{M + |u|}{M - |u|}) .$$

Якщо функція-генератор описується виразом

$$\tilde{f}(u) = -sign\,(u) \cdot \frac{1}{p} \ln(\frac{M - |u|}{M + (p-1) \cdot |u|}) ,$$

то отримуємо формули для мультиплікативної логарифмічної морфологічної ерозії та розширення (3), (4).

Якщо функція-генератор описується виразом

$$\tilde{f}(u) = -sign\,(u) \cdot (\ln(1 - |u|^p / M)) ,$$

то отримуємо такий вираз для обчислення множення вектора на скаляр:

$$k \langle\times\rangle u = sign\,(k \cdot u) \cdot M \cdot \left(1 - (1 - \frac{|u|^p}{M})^{|k|}\right)^{1/p} ,$$

звідки вирази для обчислення мультиплікативної логарифмічної морфологічної ерозії та розширення є відповідно такими:

$$(f \langle-\rangle_{ML} \breve{g})(x) = \inf_y \{ sign(k \cdot (f(y) - g(y-x))) \cdot M \times$$

$$\times \left(1 - (1 - \frac{|f(y) - g(y-x)|^p}{M})^{|k|}\right)^{1/p} \mid y \in D\} , \quad (18)$$

та

$$(f \langle+\rangle_{ML} \breve{g})(x) = \sup_y \{ sign(k \cdot (f(y) + g(y-x))) \cdot M \times$$

$$\times \left(1 - (1 - \frac{|f(y) + g(y-x)|^p}{M})^{|k|}\right)^{1/p} \mid y \in D\} . \quad (19)$$

Для функції-генератора виду

$$\tilde{f}(u) = \frac{u}{M - |u|}$$

отримуємо такий вираз для обчислення множення вектора на скаляр:

$$k \langle\times\rangle u = M \cdot \frac{k \cdot u}{M + (|k| - 1) \cdot |u|} .$$

Звідси вирази для обчислення мультиплікативної логарифмічної морфологічної ерозії та розширення є такими:

$$(f \langle-\rangle_{ML} \breve{g})(x) = \inf_y \{ \frac{k \cdot (f(y) - g(y-x))}{M + (|k| - 1) \cdot |f(y) - g(y-x)|} \mid y \in D\} , \quad (20)$$

та

$$(f \langle+\rangle_{ML} \breve{g})(x) = \sup_y \{ \frac{k \cdot (f(y) + g(y-x))}{M + (|k| - 1) \cdot |f(y) + g(y-x)|} \mid y \in D\} . \quad (21)$$

Якщо функція-генератор описується виразом

$$\tilde{f}(u) = sign\,(u) \cdot (-\ln(1 - |u| / M))^p ,$$

то отримуємо такий вираз для обчислення множення вектора на скаляр:

$$k\langle\times\rangle u = sign\,(k\cdot u)\cdot M\cdot(1-(1-\frac{|u|}{M})^{|k|^{1/p}}),$$

звідки вирази для обчислення мультиплікативної логарифмічної морфологічної ерозії та розширення є такими:

$$(f\langle-\rangle_{ML}\breve{g})(x)=\inf_{y}\{sign(k\cdot(f(y)-g(y-x)))\cdot M\times$$

$$\times\left(1-\left(1-\frac{|f(y)-g(y-x)|}{M}\right)^{|k|^{1/p}}\right)|\,y\in D\}\,, \tag{22}$$

та

$$(f\langle+\rangle_{ML}\breve{g})(x)=\sup_{y}\{sign(k\cdot(f(y)+g(y-x)))\cdot M\times$$

$$\times\left(1-\left(1-\frac{|f(y)+g(y-x)|}{M}\right)^{|k|^{1/p}}\right)|\,y\in D\}\,. \tag{23}$$

Отже, описаний метод побудови операторів (14)–(23) мультиплікативного морфологічного логарифмічного перетворення уможливлює їх конструювання відповідно до конкретної функції-генератора логарифмічного типу $\tilde{f}(u)$ (12). Завдяки цьому став можливим завчасний вибір морфологічного оператора через оцінювання властивостей функції-генератора $\tilde{f}(u)$.

ВИСНОВКИ

Описаний метод побудови операторів мультиплікативного логарифмічного морфологічного перетворення забезпечує їх синтез відповідно до аналітичного подання функції-генератора логарифмічного типу. Це розширює алгоритмічну базу морфологічного опрацювання зображень і сприяє створенню ефективних алгоритмів покращання якості зображень.

1. *Воробель Р. А.* Конструювання алгебр логарифмічного типу // Відбір і обробка інформації. – 2010. – Вип. 32(108). – С. 131–143.
2. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. – К.: Наук. думка, 2012. – 231 с.
3. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. Ч. 1: Базова модель // Відбір і обробка інформації. – 2009. – Вип. 31(107). – С. 26–35.
4. *Воробель Р. А.* Логарифмічна обробка зображень. Ч. 2: Узагальнена модель // Відбір і обробка інформації. – 2009. – Вип. 31(107). – С. 36–46.
5. *Воробель Р. А., Івасенко І. Б.* Морфологічне покращання зображень з використанням логарифмічних перетворень // Відбір і обробка інформації. – 2010. – Вип. 32(108). – С. 103–109.
6. *Iwanowski M.* Metody morfologiczne w pretwarzaniu obrazów cyfrowych. – Warszawa: Academicka Oficyna Wydawnicza EXIT, 2009. – 259 s.
7. *Jourlin M., Montard N.* A logarithmic version of the top-hat transform in connection with the Asplund distance // Acta Stereologica. – 1998. – **16**, № 3.– P. 201–208.
8. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* A model for logarithmic image processing // Journal of Microscopy. – 1988. – **149**, Pt. 1. – P. 21–35.
9. *Jourlin M., Pinoli J.-C.* Logarithmic image processing // Advances in Imaging and Electron Physics. – 2001. – **115**. – P. 129–196.
10. *Matheron G.* Elements pour une theorie des mileux poreux. – Paris; Masson, 1967.
11. *Pătraşcu V., Buzuloiu V.* A Mathematical Model for Logarithmic Image Processing // 5th World Multi-Conf. on Systemics, Cybernetics and Informatics, SCI2001, July 22–25. – Orlando, USA. – 2001. – **13**. – P. 117–122.
12. *Serra J.* Image Analysis and Mathematical Morphology. – Vol. 1. – London: Academic Press, 1982.
13. *Zaharescu E.* Morphological enhancement of medical images in a logarithmic image environment toolbox // 15th European Signal Processing Conf., EUSIPCO 2007. – Sept. 2007. – P. 2263–2266.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка
НАН України, Львів

Одержано
21.01.2013