

БАГАТОДУГОВІ НАБЛИЖЕННЯ ОКОЛУ ЕЛІПСА

Ellipse parameters calculation with high precision when ellipse is given by its noisy image demands the development and enhancing of ellipse parameters calculation methods which are not based on the accumulation principle such as Hough transform. In paper there are considered spline approximation for enhancing the precision of noise-robust comparison method of ellipse parameters calculation.

Keywords: *patterns recognition, ellipse, Hough transform, approximation precision and error, ellipse approximation methods.*

Обчислення параметрів еліпса, заданого його зашумленим зображенням, з високим рівнем достовірності вимагає створення та вдосконалення методів обчислення параметрів еліпса, які не спираються на принцип накопичення результатів, такий як перетворення Гафа. Розглянуто застосування кусочно-нелінійних наближень з метою підвищення точності роботи завадостійкого методу порівняння для обчислення параметрів еліпса.

Ключові слова: *розпізнавання образів, еліпс, перетворення Гафа, точність і похибка наближення, методи апроксимації еліпса.*

Для розв'язання задач розпізнавання еліпсоподібних об'єктів використовують імовірнісно-статистичні методи, в основі котрих лежить перетворення Гафа (Hough transform), суть якого полягає в тому, що будь-яким довільно та багаторазово обраним п'яти точкам бінаризованого зображення еліпса ставлять у відповідність аналітичне рівняння еліпса та обчислюють його параметри. Статистичні результати, отримані усередненням даних по кожному із параметрів еліпса, вважають істинними параметрами шуканого еліпса. Проте перешкоди різноманітного походження, властиві будь-якому зображенню, не дають можливості отримати високу точність обчислення параметрів еліпса за його зображенням, яка необхідна під час вирішення багатьох практичних задач, що вимагають значних обчислювальних ресурсів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Методи обчислення параметрів прямої лінії та еліпса опираються на метод Гафа, запатентований в 1962 році [11] та вперше описаний в публікації за 1972 рік [3]. Відомо багато модифікацій методу Гафа, короткий опис яких та бібліографію можна знайти в роботі [1].

Недоліками модифікацій методу Гафа є необхідність обробки багатовимірних масивів даних, застосування значних об'ємів оперативної пам'яті комп'ютера, тривалий час обробки інформації, низька точність виділення істинного результату із масивів статистичних даних.

У роботі [1] авторами запропоновано інший підхід до обчислення параметрів еліпса за допомогою завадостійкого методу статистичного порівняння, який дає змогу позбутися необхідності застосування значних об'ємів оперативної пам'яті та підвищити точність обчислення параметрів еліпса за його зображенням, спотвореним різноманітними завадами.

Проте подальші дослідження виявили, що запропонований метод можна вдосконалити шляхом застосування кусочно-нелінійної апроксимації контурів еліпса. У зв'язку з цим проводився аналіз останніх досліджень та публікацій саме в цьому напрямку. Серед вивчених робіт та їх особливостей слід зазначити наступні. В роботі [4] проведено огляд методів наближення околу еліпса за допомогою двох, чотирьох та восьми дуг кіл різного діаметра. Деякі методи обчислення похибки наближення даних за допомогою еліпса розглянуто в роботах [5–9]. Де-

тальне дослідження мінімізації похибки наближення околу еліпса за допомогою чотиридугового методу опубліковано в роботі [10]. Задача оптимального наближення половини еліпса п'ятьма дугами кіл різного діаметра розглянута в роботі [6].

Постановка завдання. Задача обчислення параметрів еліпса з високою точністю за наявності завад виникає у випадках розпізнавання та вимірювання розмірів об'єктів круглої або циліндричної форми за їхніми двовимірними зображеннями. Після виділення контурів еліпсоподібних об'єктів та вимірювання положення точок їхнього околу розв'язується задача наближення масиву точок за допомогою рівняння еліпса методами, які розглянуто в роботі [1]. Для визначення точності чергового наближення необхідно обчислити відхилення кожної точки заданого зображення від отриманого еліптичного наближення. Розв'язання цієї задачі розглянуто у цій статті.

Вибір, вдосконалення та застосування методики обрахунку похибки обчислення параметрів еліпса. Відомо багато алгоритмів наближення околу еліпса та обчислення таким чином його параметрів. Проте ми не будемо розглядати алгоритми, які базовані на перетворенні Гафа, тому що, незважаючи на їх порівняну стійкість до завад, вони не дають можливості обчислити параметри еліпса з достатньою для задач вимірювання точністю. Але методи Гафа можна використовувати для ініціалізації роботи більш складних алгоритмів. Незважаючи на чутливість до завад, при наближенні еліпса часто використовується також метод найменших квадратів завдяки хорошій обчислювальній ефективності та можливості досягнути високої точності оцінки. Суть методу полягає в тому, що сума квадратів похибок e_j , обчислених для всіх точок даних $X_j = (x_j, y_j)$, застосовується для найкращого наближення параметрів P еліпса для заданих N точок знаходженням мінімуму функціоналу $\min_P \sum_{j=1}^N e_j^2$.

Використовують також методи завадостійкої статистики, такі як метод найменшої медіани квадратів (LMedS) для визначення мінімуму функціоналу $\min_P \text{med} \sum_{j=1}^N e_j^2$.

Методики оцінювання похибки наближення суттєво залежать від способу обчислення похибки в окремій точці. Евклідова віддаль від заданої точки до околу еліпса є найкращою мірою похибки, але такий підхід вимагає вирішення рівняння четвертого степеня, яке може мати до чотирьох коренів, серед яких потрібно визначити той, який відповідає найменшій віддалі. Для того, щоб уникнути розв'язку цієї трудомісткої задачі, застосовують апроксимаційні підходи, які при менших обчислювальних затратах дають приближене рішення у вигляді деякої функції похибки наближення (error of fit – EOF). Найпростішою такою апроксимацією є алгебраїчна відстань від точки $X_j = (x_j, y_j)$ до околу еліпса:

$$EOF_1 = Q(x_j, y_j) = Ax_j^2 + Bx_jy_j + Cy_j^2 + Dx_j + Ey_j + F . \quad (1)$$

Одним із удосконалених варіантів такої апроксимації є алгебраїчна відстань, поділена на свій градієнт:

$$EOF_2 = \frac{Q(x_j, y_j)}{|\nabla Q(x_j, y_j)|} . \quad (2)$$

В альтернативному варіанті пропонують провести відрізок від точки X_j до центру еліпса C , який перетинає еліпс у точці I_j . Якщо позначити $m_j = \overline{CI_j}$, $n_j = \overline{I_jX_j}$, то апроксимацію можна подати у такому вигляді:

$$EOF_3 = m_j \frac{1 + n_j / (2a)}{1 + n_j / (2m_j)} Q(x_j, y_j), \quad (3)$$

де a – велика піввісь еліпса. Оскільки відстань n_j звичайно набагато менша, ніж m_j та a , то вираз (3) можна застосовувати у вигляді

$$EOF_3 \approx EOF_4 = m_j Q(x_j, y_j). \quad (4)$$

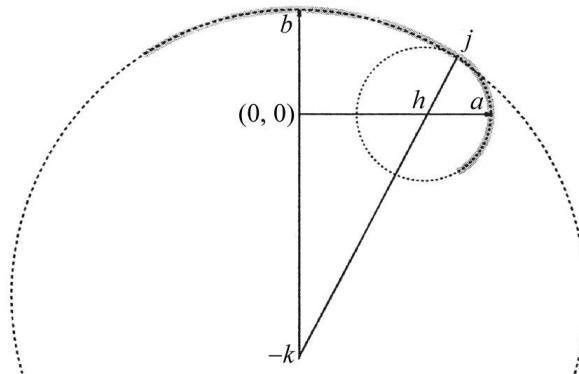
Можливим також є обчислення похибки у вигляді

$$EOF_5 = n_j. \quad (5)$$

Високу точність обчислення похибки дає метод, який використовує фокальні властивості еліпсів. Якщо позначити фокальні точки еліпса як F_1 та F_2 , а точку на околі еліпса – як P , то прямі F_1P та F_2P створюють однакові кути з дотичною до еліпса в точці P . Тому бісектриса кута між прямими F_1P та F_2P є нормаллю до еліпса в точці P . Хоча це не зовсім справедливо, коли точка P лежить не на околі еліпса, але в цьому випадку бісектрису кута можна вважати хорошим наближенням EOF_6 до нормалі з точки P до околу еліпса.

Інший фокальний метод використовує той факт, що конфокальні еліпс та гіпербола є взаємно ортогональними. Якщо вважати, що більша частина гіперболи є “майже” прямою, то конфокальна гіпербола, що проходить через точку P , повинна бути хорошим наближенням EOF_7 нормалі з точки P до околу еліпса.

Для обчислення похибки наближення еліпса також використовують методи, які базуються на апроксимації еліпса за допомогою однієї або декількох дуг кола. Апроксимацією похибки в цьому випадку вважають відстань від точки P до околу еліпса вздовж прямої від точки P до центру дуги відповідного їй кола.



Побудова еліпса за допомогою чотирьох дуг кола.

На рисунку зображено приклад побудови еліпса за допомогою чотирьох дуг кола з центрами $(\pm h, 0)$ та $(0, \pm k)$, а також радіусами $a - h$ та $b + k$. У точках j поєднання дуг кіл перша похідна сплайна є неперервною та співпадає з першою похідною еліпса в даній точці.

Відомо багато методик розрахунку параметрів чотирьох дуг кола апроксимації еліпса, багато з яких розглянуто в роботі [4]. У таблиці наведені перелік та класифікація основних чотирьох дуг кола та дводугових наближень.

Оптимальне наближення запропонував Rosin у роботі [4]. Проте для досягнення оптимізації необхідно виконувати чисельний пошук по одному з параметрів, що негативно впливає на швидкість методу.

Класифікація чотиридугових та дводугових наближень

Наближення	Тип	Точка з'єднання дуг розташована на еліпсі	Похідна в точці з'єднання неперервна
Knowlton .75	I	–	–
Knowlton .707	I	–	–
Mott	I	–	–
French	II	–	–
Hewitt method 3	II	–	–
Hewitt method 4	I	–	–
Hewitt method 5	II	–	⊕
Slantz	I	–	–
Stirling	IV	⊕	⊕
Gridgeman	II	–	⊕
Rosin	II	–	⊕
Su & Liu biarc	II	–	⊕

Авторам роботи [10] вдалось уникнути чисельного розв'язку та запропонувати аналітичне рішення для визначення параметрів чотиридугового наближення еліпса з мінімальною похибкою. Точна формула обчислення параметрів отримана в неявному вигляді, тому отримання точних значень параметрів можливе тільки внаслідок чисельного пошуку, як і в попередній роботі, але автори запропонували апіорно наблизити числові дані, отримані внаслідок чисельного пошуку, рівняннями у явному вигляді із заданою точністю в заданому діапазоні співвідношень $S = a/b$ осей еліпса. Наприклад, для $S = [0,33; 0,75]$ з максимальною похибкою $0,1548D-3$ радіус дуги меншого кола можна визначити за наближеною формулою

$$h/a = -0,709714(b/a)^2 - 0,305388(b/a) + 1,012438 ,$$

а для $S = [0,1; 0,9]$ з максимальною похибкою $0,1049D-4$ за формулою

$$h/a = -0,098393(b/a)^6 + 0,360529(b/a)^5 - 0,561967(b/a)^4 + 0,510801(b/a)^3 - 0,995417(b/a)^2 - 0,216990(b/a) + 1,001248 .$$

Координати центра малого кола $H(h, 0)$ дають змогу також обчислити координати центра великого кола $K(0, k)$.

Всі розглянуті нами методи можна використовувати для пошуку похибок наближення еліпса, але необхідно зазначити, що всі дво-, чотири- та багатодугові методи наближення околу еліпса розроблені та використовуються передусім для мінімізації максимальної, середньоарифметичної або середньоквадратичної похибок відхилення початкового еліпса та апроксимуючого контуру, чим вони принципово відрізняються від розглянутих вище методів, розроблених для апроксимації евклідової віддалі між точкою та околom еліпса.

Тобто розглянуті вище дугові методи вирішують задачу мінімізації деякої норми функції в лінійному просторі B_1 з елементами $Q(x, y), P(x, y)$

$$F_1(x, y) = \min \| L[Q(x, y), P(x, y)] \|, \quad (6)$$

а як нам необхідно знайти мінімум норми функції в лінійному просторі B_2 з елементами $Q'(x, y), P'(x, y)$

$$F_2(x, y) = \min \| L[Q'(x, y), P'(x, y)] \|, \quad (7)$$

де $Q(x, y)$ – рівняння еліпса, а $P(x, y)$ – апроксимуюча нелінійна функція.

Розглянемо багатодуговий метод наближення околу еліпса, який орієнтований на оптимальний за швидкістю та точністю пошук нормалі до околу еліпса з довільної точки площини еліпса.

На цьому етапі будемо без доведення вважати справедливою гіпотезу про те, що необхідною умовою найкращого наближення дугами кола деякої монотонної нелінійної функції з метою мінімізації цільової функції (7) є необхідність сегментації заданої нелінійної функції, у цьому випадку еліпса, на n сегментів, у граничних точках яких перша похідна нелінійної функції змінює своє значення на величину, яка є однаковою для кожного сегмента контуру або околу.

$$Q'(x_{i+1}, y_{i+1}) - Q'(x_i, y_i) = \text{const} \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Ми будемо розглядати еліпс в його канонічній формі і для частини околу, яка розташована в першому квадранті, як це прийнято в літературі для аналогічних задач, тому що будь-який еліпс можна звести до канонічної форми за допомогою заміни системи координат.

У кутових одиницях перша похідна в першому квадранті еліпса змінюється від 0 до 90 градусів. Якщо розділити квадрант на однакові n сегментів, то величина сегмента буде дорівнювати $S = 90/n = \pi/2n$. Кожному із $n + 1$ положень дотичної до еліпса відповідає послідовне зростання кута дотичної на $\varphi_n = \pi/2n$, якому відповідно відповідає перша похідна у вигляді тангенса цього кута:

$$y'(x_i) = \tan \varphi_i = \tan(i\pi/2n), \quad i = 0 \dots n+1.$$

Враховуючи рівняння дотичної до еліпса в точці (x_i, y_i) у вигляді

$$y'(x_i) = -\frac{bx_i}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x_i^2}{a^2}}},$$

отримаємо

$$\tan(i\pi/2n) = t_i = -\frac{bx_i}{a^2 \sqrt{1 - \frac{x_i^2}{a^2}}}.$$

З останнього рівняння можна визначити x_i для першого квадранту:

$$x_i = \frac{t_i a^2}{\sqrt{b^2 + t_i^2 a^2}}, \quad (8)$$

а з рівняння еліпса в першому квадранті можна отримати y_i :

$$y_i = b \sqrt{1 - x_i^2 / a^2}. \quad (9)$$

В обчислених точках (x_i, y_i) можна побудувати нормаль до околу еліпса [2]:

$$y_{ri} = y_i + \frac{a^2 y_i}{b^2 x_i} (x_{ri} - x_i), \quad (10)$$

де (x_{ri}, y_{ri}) – координати центра кола, якому належить дуга i .

Перетин двох прямих, заданих рівнянням (10) для сусідніх точок i та $i + 1$, які є крайніми точками однієї дуги, дає змогу знайти координати центрів кіл (x_{ri}, y_{ri}) , яким належать дуги, що наближують окіл еліпса, після послідовного розв'язку рівнянь (11) та (10) для знаходження невідомих x_{ri}, y_{ri} :

$$y_i + \frac{a^2 y_i}{b^2 x_i} (x_{ri} - x_i) = y_{i+1} + \frac{a^2 y_{i+1}}{b^2 x_{i+1}} (x_{ri} - x_{i+1}). \quad (11)$$

Алгоритм пошуку похибки EOF_8 наближення еліпса для цього випадку можна описати так:

1. Одним із відомих методів визначаємо параметри одного із можливих варіантів розташування еліпса на зображенні.
 2. Визначаємо точки поділу околу еліпса на вибрану кількість сегментів відповідно до запропонованої вище методики.
 3. Визначаємо параметри прямих, які ділять окіл еліпса на сегменти.
 4. Знаходимо положення центрів кіл, дугами яких наближається еліпс.
 5. Проводимо послідовний перебір всіх точок, які можуть належати зображенню еліпса.
 6. Першу точку зображення порівнюємо з прямими, які утворюють границі першого зліва сектора. Якщо точка не належить першому сектору, проводимо порівняння з правою границею кожного наступного сектора, поки не визначимо належність точки до певного сектора.
 7. Перевіряємо, чи не виходить наступна точка за праву або ліву межу сектора, якому належить перша точка. Якщо виходить, то проходить перевірка правої/лівої межі наступного/попереднього сектора. Здебільшого при великому співвідношенні кількості точок зображення еліпса до кількості секторів перехід точки в наступний/попередній сектор відбувається дуже рідко, тобто збільшення кількості операцій порівняння залежно від кількості секторів є дуже незначним.
 8. Після визначення сектора належності для точки обчислюємо параметри прямої, яка з'єднує точку та центр відповідного кола, дуга якого формує сектор.
 9. Відстань між положенням точки зображення та точкою перетину обчисленої прямої з околком еліпса є шуканою похибкою наближення еліпса для цієї точки.
- Аналіз описаного алгоритму свідчить, що об'єм необхідних обчислень мало залежить від кількості сегментів S , на які розбитий окіл еліпса.

ВИСНОВКИ

Розглянуто деякі відомі методики та запропоновано новий підхід до задачі обчислення величини похибки наближення околу еліпса за допомогою багатодугової апроксимації еліпса. До недоліків розглянутих методик належать або велика кількість операцій обчислення при високій точності обчислення, або недостатня точність обчислення похибки при незначному об'ємі обчислень і відповідно високій швидкодії обчислювального процесу.

Запропонований багатодуговий метод обчислення похибки є компромісом між точністю та швидкістю обчислень. Різноманітність методів розрахунку параметрів дуг дають можливість гнучкого підходу при застосуванні цієї групи методів.

Проте слід врахувати, що відомі багатодугові методи побудовані з метою мінімізації похибки наближення еліпса, тому їх застосування для пошуку нормалі до еліпса дає достатньо низьку, але не мінімальну похибку обчислення евклідової віддалі від точки до околу еліпса. Запропонований нами метод можна застосувати для побудови як завгодно великої кількості дуг кола, які можуть забезпечити найкраще наближення нормалі до околу еліпса, а також і обчислення похибки його наближення із заданою точністю, яка може регулюватись вибором необхідної кількості дуг кола.

Внаслідок того, що процес пошуку параметрів еліпса відбувається в напрямку від значної похибки наближення еліпса до її мінімальних значень, є можливість застосувати послідовно метод з високою швидкістю та низькою точністю та метод з високою точністю та невисокою швидкістю. Тобто після досягнення

заданого значення δ вибраної норми похибки L_δ або при неможливості після заданої кількості циклів обчислення R покращити похибку δ змінюємо метод з високою швидкістю на метод з високою точністю обчислення. Вибір того чи іншого методу також залежить від ексцентриситету еліпса $c = a/b$.

Можна, наприклад, застосувати послідовно метод з похибкою EOF_4 або EOF_5 з рівнянь (4), (5) та запропонований нами багатодуговий метод з похибкою EOF_8 .

Запропонований метод був реалізований програмно в середовищі Matlab. Порівняно з методом апроксимації похибки EOF_5 та чотиридуговими методами найкращого наближення еліпса (Rosin [4] та Wen-Han Qiana, Kang Qian [10]) точність обчислення параметрів еліпса на синтетичній моделі з ексцентриситетом $c = a/b = 3$ покращена приблизно на 3,5 та 0,6% відповідно.

Подальші наші дослідження будуть спрямовані до підвищення точності обчислення параметрів еліпса завдяки використанню субпіксельних значень вхідних даних, отриманих унаслідок аналізу та обробки точок зображення еліпса.

1. Гапонюк Я. В. Метод обчислення параметрів еліпса за його спотвореним зображенням // Відбір і обробка інформ. – 2012. – № 36 (112). – С. 116–120.
2. Прикладная математика. Справочник математических формул // Примеры и задачи с решениями. <http://www.pm298.ru/2step2.php>
3. Duda R. O. and Hart P. E. Use of the Hough Transformation to Detect Lines and Curves in Pictures // Comm. ACM. – 1972. – **15**. – P. 11–15.
4. Rosin Paul L. A survey and comparison of traditional piecewise circular approximations to the ellipse // Computer Aided Geometric Design. – 1999. – **16**. – P. 269–286.
5. Rosin Paul L. Ellipse Fitting Using Orthogonal Hyperbolae and Stirling's Oval // Graphical models and image processing. – 1998. – **60**, № 3. – P. 209–213.
6. Rosin Paul L., Michael L., Pitteway V. The Ellipse and the Five-Centred Arch // The Mathematical Gazette. – 2001. – **85**, № 502. – P. 13–24.
7. Rosin Paul L. Assessing Error of Fit Functions for Ellipses // Graphical models and image processing. – 1996. – **58**, № 5. – P. 494–502.
8. Rosin Paul L. Analysing error of fit functions for ellipses // Pattern Recognition Letters. – 1996. – **17**. – P. 1461–1460.
9. Roth Gerhard. Extracting Geometric Primitives // CVGIP: Image Understanding. – 1993. – **58**. – P. 1–22.
10. Wen-Han Qiana, Kang Qian. Optimising the four-arc approximation to ellipses // Computer Aided Geometric Design. – 2001. – **18**. – P. 1–19.
11. Hough Paul V. C. Method and Means for Recognizing Complex Patterns. U.S. Patent 3 069 654, Dec. 18, 1962.