

УДК 518.5: 531.714

П. С. Малачівський, В. Ф. Мітін, В. В. Холєвчук,
Н. В. Данчак, Е. Б. Орáзов, Є. О. Соловійов

**ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ТЕРМОМЕТРИЧНОЇ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕРМАНІЄВОГО МІКРОСЕНСОРА**

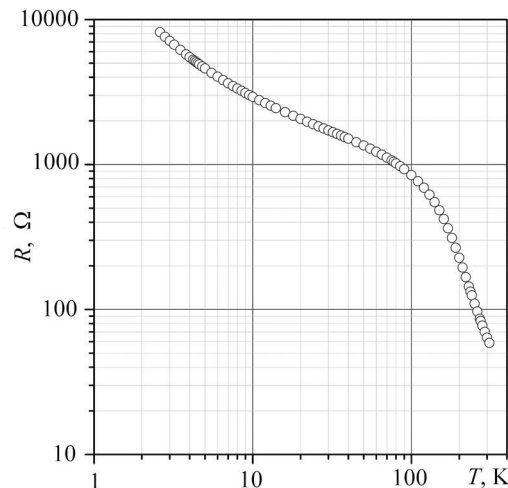
Taking into account the properties of germanium sensor proposed use Chebyshev spline approximation, exponential-power expression to play its thermometric characteristics. The appropriateness of heterogeneous Chebyshev spline approximation, which at low temperatures to approximation applies the exponential-power law expression, and for higher temperatures – approximation polynomial.

Keywords: *spline approximation, nonlinear (minimax) approximation, interpolation thermometric characteristics, germanium sensor.*

З врахування властивостей германієвого сенсора запропоновано використання чебишовського сплайн-наближення експоненційно-степеневим виразом для відтворення його термометричної характеристики. Обґрунтовано доцільність використання неоднорідного чебишовського сплайн-наближення, яке в області низьких температур для наближення застосовує експоненційно-степеневий вираз, а для вищих температур – наближення поліномом.

Ключові слова: *сплайн-наближення, чебишовське (мінімаксне) наближення, термометрична характеристика, германієвий сенсор.*

Термометри опору, виготовлені на основі плівок Ge на GaAs, широко використовують у кріогенній термометрії [1–3]. Термометри мають індивідуальну термометричну характеристику $R = f(T)$, яка генерується автоматично з використанням спеціального автоматизованого метрологічного обладнання. Це обладнання забезпечує стабільну й однорідну температуру в точках градування, а також автоматично задає необхідний електричний струм і вимірює напругу на сенсорі. Здебільшого кількість точок градування становить близько 80 у діапазоні температур 2,6...310 К. Типову термометричну характеристику термометра опору на основі плівок Ge на GaAs моделі TTR-G [3] зображено на рисунку.



Термометрична характеристика Ge–GaAs термометра опору моделі TTR-G [3].

Важливим завданням термометрії є отримання достатньо точної і зручної для використання апроксимації термометричної характеристики сенсора, оскільки від точності апроксимації термометричної характеристики сенсора залежить точність визначення температури.

У праці [3] було обґрунтовано, що механізм струмопереносу для Ge–GaAs термометрів опору в області низьких температур є стрибковим і термометрична характеристика може бути описана залежністю [4]

$$R(T) = R_0 e^{(T_x/T)^x}, \quad (1)$$

де $R_0(T) = AT^n$, а T_x ; x ; A і n – деякі сталі параметри, які описують стрибковий механізм електропровідності в напівпровідниках.

Дослідженню апроксимації термометричних характеристик германієвих мікросенсорів присвячено низку праць, зокрема, у працях [5, 6] для підвищення ефективності апроксимації таких термометричних характеристик запропоновано використання ортогональних поліномів зі спеціальною ваговою функцією. Ми пропонуємо для апроксимації термометричної характеристики германієвого сенсора в області низьких температур використовувати чебишовське наближення експоненційно-степеневим виразом

$$S(a; x) = Ax^b e^{cx^p}, \quad x > 0, \quad p \neq 0 \quad (2)$$

щодо невідомих параметрів A , b , c і p . Вибір чебишовського наближення зумовлено тим, що саме чебишовське наближення забезпечує досягнення найменшого можливого відхилення на заданому відрізку [7]. Для опису термометричної характеристики германієвого сенсора пропонуємо використати розривний чебишовський сплайн, наближення на окремих частинах температурного діапазону (ланках) якого підібрано так, щоб похибка наближення характеристики у жодній точці діапазону вимірювання не перевищувала деякої наперед заданої величини [7]. Доцільність застосування таких сплайнів із роздільним чебишовським наближенням на окремих частинах діапазону вимірювання пояснюється можливістю отримання потрібної точності наближення при невеликій кількості параметрів у наближеннях.

Побудова чебишовського сплайн-наближення експоненційно-степеневим виразом. Для побудови чебишовського сплайн-наближення із заданою похибкою можна використати ітераційний алгоритм, описаний в [8]. Відповідно до цього алгоритму вузли сплайну визначають з умови досягнення максимально можливої довжини ланки для вказаної похибки. Наближення на кожній із ланок визначають за чебишовським критерієм. Умови існування чебишовського наближення експоненційно-степеневим виразом (2) визначає теорема [9].

Теорема. Достатньою умовою існування чебишовського наближення виразом (1) для неперервної додатної функції $f(x)$ ($f(x) \in C[\alpha, \beta]$, $f(x) > 0$) з найменшою відносною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ є виконання нерівностей

$$0 < W \quad \text{і} \quad W \neq W_0, \quad (3)$$

де

$$W = \frac{\frac{\ln(f(z_5)) - \ln(f(z_3))}{\ln(z_5) - \ln(z_3)} - \frac{\ln(f(z_4)) - \ln(f(z_2))}{\ln(z_4) - \ln(z_2)}}{\frac{\ln(f(z_4)) - \ln(f(z_2))}{\ln(z_4) - \ln(z_2)} - \frac{\ln(f(z_3)) - \ln(f(z_1))}{\ln(z_3) - \ln(z_1)}}, \quad (4)$$

$$W_0 = \ln \left(\frac{z_5 z_3}{z_4 z_2} \right) / \ln \left(\frac{z_4 z_2}{z_3 z_1} \right), \quad (5)$$

z_i ($i = \overline{1, 5}$) – будь-які впорядковані за зростанням числа з відрізка $[\alpha, \beta]$.

Достатній умові (3) існування чебишовського наближення виразом (2) з найменшою відносною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ задовольняють, зокрема, неперервно диференційовні й опуклі або ввігнуті на $[\alpha, \beta]$ функції $f(x)$ за винятком функцій вигляду

$$Ax^b \text{ і } A \ln x, \quad (6)$$

де A і b – будь-які сталі.

Якщо функція $f(x)$ задовольняє умову теореми, а z_i ($i = \overline{1, 5}$) – точки чебишовського альтернансу, то параметри A , b і c чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (2) з найменшою відносною похибкою визначають за формулами:

$$c = \frac{\frac{\ln(f(z_4)) - \ln(f(z_2))}{\ln(z_4) - \ln(z_2)} - \frac{\ln(f(z_3)) - \ln(f(z_1))}{\ln(z_3) - \ln(z_1)}}{\frac{z_4^p - z_2^p}{\ln(z_4) - \ln(z_2)} - \frac{z_3^p - z_1^p}{\ln(z_3) - \ln(z_1)}}; \quad (7)$$

$$b = \frac{\ln(f(z_3)) - \ln(f(z_1)) - c(z_3^p - z_1^p)}{\ln(z_3) - \ln(z_1)}; \quad (8)$$

$$A = \frac{2f(z_1)f(z_2)}{f(z_2)z_1^b e^{cz_1^p} + f(z_1)z_2^b e^{cz_2^p}}. \quad (9)$$

Для визначення точок альтернансу можна використати ітераційну схему Рунге, а для уточнення точок альтернансу – алгоритм Валле–Пуссена [7]. Значення параметра p обчислюють як розв’язок трансцендентного рівняння

$$g(p) = V, \quad (10)$$

де $g(p) = \ln(G(p))$, $V = \ln(W)$,

$$G(p) = \frac{\frac{z_5^p - z_3^p}{\ln(z_5) - \ln(z_3)} - \frac{z_4^p - z_2^p}{\ln(z_4) - \ln(z_2)}}{\frac{z_4^p - z_2^p}{\ln(z_4) - \ln(z_2)} - \frac{z_3^p - z_1^p}{\ln(z_3) - \ln(z_1)}}, \quad (11)$$

а W визначають за формулою (4).

Враховуючи степеневий характер залежності (11) від p [9], розв’язок рівняння (10) можна знайти за ітераційним методом Ньютона

$$p_{i+1} = p_i - (g(p_i) - V) / g'(p_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (12)$$

де

$$p_0 = \text{sign}(W - W_0) \left| 1 + \frac{V}{z_4 - z_2} \right|;$$

$$g'_n(p) = \frac{\frac{\ln(z_5)z_5^p - \ln(z_3)z_3^p}{\ln(z_5) - \ln(z_3)} - \frac{\ln(z_4)z_4^p - \ln(z_2)z_2^p}{\ln(z_4) - \ln(z_2)}}{\frac{z_5^p - z_3^p}{\ln(z_5) - \ln(z_3)} - \frac{z_4^p - z_2^p}{\ln(z_4) - \ln(z_2)}} - \frac{\frac{\ln(z_4)z_4^p - \ln(z_2)z_2^p}{\ln(z_4) - \ln(z_2)} - \frac{\ln(z_3)z_3^p - \ln(z_1)z_1^p}{\ln(z_3) - \ln(z_1)}}{\frac{z_4^p - z_2^p}{\ln(z_4) - \ln(z_2)} - \frac{z_3^p - z_1^p}{\ln(z_3) - \ln(z_1)}}.$$

Апроксимація низькотемпературної характеристики германієвого сенсора експоненційно-степеневим мінімаксним сплайном.

Апроксимуємо термометричну характеристику германієвого сенсора типу TTR-1G, яка задана 79-ма значеннями в діапазоні від 2,601 до 310,006 К (див. табл. 1).

Таблиця 1. Результати калібрування германієвого сенсора типу TTR-1G (взірець 656)

T, К	ρ, Ω	T, К	ρ, Ω	T, К	ρ, Ω	T, К	ρ, Ω
2,601	8180,95	8,0	3340,82	37,999	1543,900	180,010	311,598
2,997	7115,24	8,5	3219,95	40,000	1507,640	189,987	266,582
3,001	7109,10	9,0	3112,61	50,000	1352,520	199,985	227,620
3,196	6698,32	9,5	3016,44	55,000	1286,580	200,004	227,440
3,200	6691,67	10,0	2929,62	59,999	1225,780	210,004	194,530
3,499	6168,54	11,0	2778,82	65,000	1169,300	213,700	183,771
3,797	5742,49	12,0	2651,95	70,003	1116,040	219,997	167,086
4,000	5494,19	13,0	2543,70	75,004	1065,740	230,000	144,215
4,201	5276,40	14,0	2449,09	77,403	1042,400	235,822	132,776
4,302	5175,20	16,0	2292,61	79,998	1018,150	240,048	125,216
4,398	5084,12	18,0	2166,63	85,001	972,166	250,040	109,639
4,400	5082,41	20,0	2062,52	100,000	845,033	270,029	86,1262
4,501	4990,78	22,0	1974,34	110,000	766,389	273,133	83,206
4,600	4906,21	24,0	1898,28	119,999	691,388	273,175	83,1668
4,800	4746,75	26,0	1831,37	129,997	619,269	289,966	69,9883
5,000	4601,03	28,0	1771,80	140,003	549,559	290,019	69,9303
5,500	4288,72	30,0	1718,01	149,997	483,517	299,971	63,8344
6,500	3817,85	32,0	1669,08	150,010	483,108	300,014	63,7754
7,000	3635,25	34,0	1624,22	160,010	420,622	310,006	58,7924
7,500	3478,11	36,0	1582,64	170,009	363,141	–	–

Мінімаксне сплайн-наближення термометричної характеристики, поданої в табл. 1 експоненційно-степеневим виразом (2) з відносною похибкою 0,052%, складається з шести ланок. Результати цього сплайн-наближення подано в табл. 2.

Таблиця 2. Результати апроксимації температурної характеристики мінімаксним сплайном з експоненційно-степеневими ланками

Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів A, b, c і p виразу (2)	Похибка апроксимації, %
1	2,601; 13	2228,9078; -0,17347602; 2,5512305; -0,57915997	$4,965_{10}^{-2}$
2	13; 37,999	7837,7207; -0,44654028; 1477,1906; -4,3601264	$5,107_{10}^{-2}$
3	37,999; 119,999	6864,3283; -0,40327387; -4,9608293 $_{10}^{-6}$; 2,3403219	$3,919_{10}^{-2}$
4	119,999; 170,009	711,04457; 0,14609603; -7,2811747 $_{10}^{-5}$; 1,923764	$3,948_{10}^{-2}$
5	170,009; 219,997	4,2712876 $_{10}^{10}$; -3,5808048; -4,5278843 $_{10}^{11}$; -5,5461692	$4,01_{10}^{-2}$
6	219,997; 310,006	1,8955399 $_{10}^{10}$; -3,4409389; 2,3592119 $_{10}^{-19}$; 7,1435644	$5,137_{10}^{-2}$

Для порівняння зазначимо, що мінімаксне сплайн-наближення температурної характеристики цього ж самого сенсора з відносною похибкою 0,052% поліномом третього степеня складається з десяти ланок. Отже, отримані сплайн-наближення термометричної характеристики германієвого сенсора підтверджують ефективність використання для її відтворення наближення експоненційно-степеневим виразом. Проте експоненційно-степеневий вираз описує фізичну суть залежності термометричної характеристики германієвого сенсора лише в діапазоні низьких температур [1] приблизно до 120 К. Це підтверджують також і результати мінімаксного сплайн-наближення експоненційно-степеневим виразом (див. табл. 2). Показник степеня експоненти в трьох останніх ланках сплайну досить малий. Тому для опису термометричної характеристики германієвого сенсора доцільно використовувати неоднорідне мінімаксне сплайн-наближення, у якому для наближення температурної залежності в області низьких температур варто застосовувати експоненційно-степеневий вираз, а для вищих температур – поліном третього степеня.

Таблиця 3. Результати апроксимації температурної характеристики неоднорідним мінімаксним сплайном із відносною похибкою 0,05%

Вираз	Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів A, b, c і p виразу (2) та a_0, a_1, a_2 і a_3 поліному третього степеня	Похибка апроксимації, %
$AT^b e^{cT^p}$	1	2,601; 13	2228,9078; -0,17347602; 2,5512305; -0,57915997	$4,965_{10}^{-2}$
	2	13; 36	7748,1728; -0,443293; 305,06561; -3,6917731	$3,62_{10}^{-2}$
	3	36; 119,999	6864,3283; -0,40327387; -4,9608293 $_{10}^{-6}$; 2,3403219	$3,919_{10}^{-2}$
$a_0 + a_1T + a_2T^2 + a_3T^3$	4	119,999; 189,987	1393,2167; -2,2716792; -4,7948514 $_{10}^{-2}$; 1,5101948 $_{10}^{-4}$	$3,797_{10}^{-2}$
	5	189,987; 270,029	3017,5962; -28,708022; 9,5715957 $_{10}^{-2}$; -1,0963807 $_{10}^{-4}$	$4,376_{10}^{-2}$
	6	270,029; 310,006	1271,165; -9,2619887; 2,3357152 $_{10}^{-2}$; -1,9663384 $_{10}^{-5}$	$2,747_{10}^{-2}$

Результати побудови такого мінімаксного сплайн-наближення з відносною похибкою 0,05% подано в табл. 3. Отриманий неоднорідний мінімаксний сплайн для опису термометричної характеристики германієвого сенсора складається з шести ланок. Порівняно зі сплайн-наближенням експоненціально-степеневим виразом він забезпечує меншу відносну похибку відтворення характеристики сенсора 0,05%, а порівняно з поліноміальним сплайном використовує ще й на чотири ланки менше. Дослідження апроксимацій інших взірців германієвих сенсорів підтверджує доцільність використання для відтворення термометричної характеристики таких сенсорів неоднорідного мінімаксного сплайн-наближення з експоненційно-степеневими та поліноміальними ланками.

ВИСНОВКИ

Подані в табл. 2–3 результати апроксимації температурної характеристики германієвого сенсора в діапазоні від 2,601 до 310,006 К підтверджують ефективність використання в області низьких температур (приблизно до 120 К) мінімаксного сплайн-наближення експоненційно-степеневим виразом (2). Для опису термометричної характеристики германієвого сенсора в області вищих температур можна використовувати поліном третього степеня. Отже, для відтворення термометричної характеристики германієвого сенсора доцільно використовувати неоднорідне мінімаксне сплайн-наближення, яке в області низьких температур наближає експоненційно-степеневим виразом (2), а в області вищих температур – поліномом третього степеня.

1. *Ge-on-GaAs film resistance thermometers for cryogenic applications* / V. F. Mitin, P. C. McDonald, F. Pavese et al. // *Cryogenics*. – 2007. – **47**, № 9–10. – P. 474–482.
2. *Мініатюрні кремнієві діодні та германієві резистивні термометри для вимірювання низьких температур* / Є. Ф. Венгер, А. С. Зенкін, Н. Л. Козелло та ін. // *Фізика і хімія твердого тіла*. – 2012. – **1**, № 2. – С. 499–505.
3. *Mitin V. F., Kholevchuk V. V., Kolodych B. P. Ge-on-GaAs film resistance thermometers: Low-temperature conduction and magnetoresistance* // *Cryogenics*. – 2011. – **51**, № 1. – P. 68–73.
4. *Shklovskii B. I., Efros A. L. Electronic properties of doped semiconductors*. – Berlin: Springer; 1984.
5. *Bogdanova N., Terzijska B. Thermometric characteristics approximation of Germanium film temperature microsensors by orthonormal polynomials* // *Rev. Sci. Instrum.* – 2005. – **10**, № 68. – P. 3766–3771.
6. *Terzijska B., Bivas I., Nenkov K. Modeling of low-temperature specific heat data for Ge₂₇As₁₃S₆₀ and As₄₀S₆₀ glasses by means of the phenomenologically modified soft potential model* // *Cryogenics*. – 2009. – **49**, № 5. – P. 171–175.
7. *Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами*. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
8. *Малачівський П., Андруник В. Рівномірне сплайн-наближення* // *Комп'ютерні технології друкарства*. – 2002. – № 7. – С. 107–115.
9. *Чебышевское приближение экспоненциально-степенным выражением* / П. С. Малачивский, Я. В. Пизюр, Н. В. Данчак, Э. Б. Орázов // *Кибернетика и системный анализ*. – 2013. – **49**, № 6. – С. 87–91.

Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;
Інститут фізики напівпровідників ім. В. Є. Лашкарьова НАН України, Київ

Одержано
18.06.2013