УДК 621.391:519.21

ДИСКРЕТНІ ОЦІНКИ КОРЕЛЯЦІЙНИХ КОМПОНЕНТІВ ВЕКТОРНИХ ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

І. Й. Мацько

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

E-mail: matsko.ivan@gmail.com

Проаналізовані властивості оцінок інваріантів кореляційної тензор-функції векторних періодично корельованих випадкових процесів, які знаходять за дискретними даними. Отримано умови відсутності ефектів накладання першого та другого роду. Виведено формули для дисперсії та зміщення оцінок, які дають можливість порівнювати ефективність дискретних та неперервних оцінок.

Ключові слова: *векторні періодично корельовані випадкові процеси, кореляційні інваріанти, дискретні оцінки, крок дискретизації.*

DISCRETE ESTIMATORS OF COVARIANCE COMPONENTS OF VECTORIAL PERIODICALLY NONSTATIONARY RANDOM PROCESSES

I. Y. Matsko

H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv

The properties of estimators for invariants of covariance tensor-function of vectorial periodically correlated random processes, calculated on the base of discrete data, are analyzed. It is shown that aliasing effect of the first kind leads to incorrect estimation of the mean function Fourier coefficients and the second kind leads to decreasing a convergence of covariance components estimator. The conditions of avoidance of the aliasing effect of the first and the second kinds are obtained. Formulas for the estimator variance and bias, which allow comparing efficiency of the discrete and the continuous estimators, are derived. The consistency of estimators is proved. Dependences of the estimators variances and biases on realization length and signal parameters are found.

Keywords: *vectorial periodically correlated random processes, correlation invariants, discrete estimators, sampling step.*

Векторні періодично корельовані випадкові процеси є адекватною математичною моделлю для опису циклічної стохастичної мінливості за часом переміщення, швидкості чи прискорення – векторних фізичних величин, які характеризують механічні коливання елементів обертових вузлів під час їх експлуатації [1–4]. Особливістю підходу, що ґрунтується на такій моделі, є можливість аналізувати властивості випадкового вектора в інваріантній формі, незалежно від того, в якій системі координат вимірюють. Лінійні інваріанти кореляційної тензор-функції, що визначають, відповідно, скалярний та скісний добутки випадкових векторів, дають можливість підвищити ефективність діагностики та розділити рухомі і нерухомі дефекти [1, 3]. Використовуючи квадратичні інваріанти, можемо досліджувати просторові властивості вібрації, обчислювати зміни кореляційної функції за довільним напрямком і локалізувати дефект. Властивості центральних кривих другого порядку, осі яких визначають власні значення симетричної частини кореляційної тензор-функції, є також ефективними ознаками для локалізації та типізації дефектів. Ці власні значення залежать від максимальних значень кореляційної функції у напрямах, які визначають власні базиси.

Для обчислення оцінок інваріантів за експериментальними даними використали когерентний і компонентний методи [1, 5, 6]. Властивості отриманих так неперервних оцінок досліджували в працях [7, 8]. Нижче проаналізували дискретні оцінки, які власне і використовують під час обробки реальних даних. За переходу до такої обробки важливо вибрати інтервал дискретизації.

Векторний випадковий процес $\vec{\xi}(t)=\vec{i}\,\xi_1(t)+\vec{j}\,\xi_2(t)$ називають періодично корельованим, якщо його математичне сподівання $m_{\vec{\xi}}(t)=E\,\vec{\xi}(t)=\vec{i}\,m_{\xi_1(t)}+$ $+\vec{j}\,m_{\xi_2}(t)$, де E – оператор усереднення за ансамблем, а також кореляційна функція $b_{\vec{\xi}}(t,u)=E\,\overset{\circ}{\vec{\xi}}(t)\otimes\overset{\circ}{\vec{\xi}}(t+u)$, де $\otimes$ – знак тензорного добутку, $\overset{\circ}{\vec{\xi}}(t)=\vec{\xi}(t)-$ $-m_{\vec{\xi}}(t)$, періодично змінюються в часі:

$$m_{\vec{\xi}}(t)=m_{\vec{\xi}}(t+T),\quad b_{\vec{\xi}}(t,u)=b_{\vec{\xi}}(t+T,u),\quad T>0.$$

Властивості вектора $m_{\vec{\xi}}(t)$ характеризують його складові $m_{\vec{\xi}_1}(t)=E\,\vec{\xi}_1(t)$ і $m_{\vec{\xi}_2}(t)=E\,\vec{\xi}_2(t)$, а властивості кореляційної тензор-функції – елементи матриці

$$b_{\vec{\xi}(t)}(t,u)=\begin{bmatrix} b_{\xi_1(t)}(t,u) & b_{\xi_1(t)\xi_2(t)}(t,u) \\ b_{\xi_2(t)\xi_1(t)}(t,u) & b_{\xi_2(t)}(t,u)\end{bmatrix}, \tag{1}$$

які є авто- та взаємокореляційними функціями складових

$$b_{\xi_p}(t,u)=E\,\overset{\circ}{\xi}_p(t)\overset{\circ}{\xi}_p(t+u),\quad \overset{\circ}{\xi}_p(t)=\xi_p(t)-m_{\xi_p},\quad p=\overline{1,2}.$$

$$b_{\xi_p\xi_q}(t,u)=E\,\overset{\circ}{\xi}_p(t)\overset{\circ}{\xi}_q(t+u),\quad p,q=\overline{1,2}.$$

В інваріантній формі властивості матриці описують такі величини:

$$I_1(t,u)=b_{\xi_1}(t,u)+b_{\xi_2}(t,u), \tag{2}$$

$$D(t,u)=b_{\xi_1\xi_2}(t,u)+b_{\xi_1\xi_2}(t,u), \tag{3}$$

$$I_2(t,u)=b_{\xi_1}(t,u)b_{\xi_2}(t,u)-\frac{1}{4}\left[b_{\xi_1\xi_2}(t,u)+b_{\xi_2\xi_1}(t,u)\right]^2,$$

$$\lambda_{1,2}(t,u)=\frac{1}{2}\left[I_1(t,u)\pm\frac{1}{4}\sqrt{I_1^2(t,u)-4I_2(t,u)}\right].$$

Дві перші з них називають лінійними інваріантами, а дві наступні – квадратичними.

Когерентні оцінки лінійних інваріантів мають вигляд

$$\hat{I}_1(t,u)=\hat{b}_{\xi_1}(t,u)+\hat{b}_{\xi_2}(t,u),$$

$$\hat{D}(t,u)=\hat{b}_{\xi_1\xi_2}(t,u)+\hat{b}_{\xi_1\xi_2}(t,u),$$

де

$$\hat{b}_{\xi_p}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi_p(t+nT)-\hat{m}_{\xi_p}(t+nT)\right]\times \\ \times\left[\xi_p(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi_p}(t+u+nT)\right],\quad p=\overline{1,2}, \tag{4}$$

$$\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi_p(t+nT)-\hat{m}_{\xi_p}(t+nT)\right]\times$$
$$\times\left[\xi_q(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi_q}(t+u+nT)\right],\quad p,q=\overline{1,2}\,, \tag{5}$$

при цьому

$$\hat{m}_{\xi_p,\xi_q}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\,.$$

Інваріанти (2), (3) є періодичними функціями часу, які можна подати рядами Фур'є:

$$I_1(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(I_1)}(u)e^{ik\omega_0 t}\,, \tag{6}$$

$$D(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(D)}(u)e^{ik\omega_0 t}\,. \tag{7}$$

Оцінки коефіцієнтів Фур'є інваріантів знаходять за формулами

$$\hat{B}_k^{(I_1)}(u)=\frac{1}{T}\int_0^T\hat{I}_1(t,u)e^{-ik\omega_0 t}dt\,, \tag{8}$$

$$\hat{B}_k^{(D)}(u)=\frac{1}{T}\int_0^T\hat{D}(t,u)e^{-ik\omega_0 t}dt\,. \tag{9}$$

Припустимо, що експериментальні дані відбирають у моменти часу $t_n=nh$, де $h=T/(M+1)$, M – ціле число. Очевидно, що й зсув u в цьому випадку може змінюватися дискретно з кроком h. Приймемо $u_j=jh$. Оцінки (8), (9) замінимо інтегральними сумами:

$$\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)=\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\hat{I}_1(nh,jh)e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}\,, \tag{10}$$

$$\hat{B}_k^{(D)}(jh)=\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\hat{D}(nh,jh)e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}\,. \tag{11}$$

Оскільки

$$E\hat{b}_{\xi_p}(nh,jh)=b_{\xi_p}(nh,jh)-\frac{1}{N}\left[b_{\xi_p}(nh,jh)+\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}|\,p\,|\,b_{\xi_p}(nh,(j+p(M+1))h)\right],$$

$$E\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(nh,jh)=$$
$$=b_{\xi_p\xi_q}(nh,jh)-\frac{1}{N}\left[b_{\xi_p\xi_q}(nh,jh)+\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}|\,p\,|\,b_{\xi_p\xi_q}(nh,(j+p(M+1))h)\right],$$

то

$$E\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)=$$
$$=\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}\left[\begin{array}{l}\hat{I}_1(nh,jh)-\\ -\dfrac{1}{N}\left[I_1(nh,jh)+\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{p=-N+1}^{N-1}|\,p\,|\,I_1(nh,(j+p(M+1))h)\right]\end{array}\right],$$

$$E\hat{B}_k^{(D)}(jh) =$$
$$= \frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M} e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}\left[\hat{D}(nh, jh) - \frac{1}{N}\left[\begin{array}{l} D(nh, jh) + \\ + \frac{1}{N}\sum\limits_{p=-N+1}^{N-1} |p| D(nh, (j+p(M+1))h) \end{array}\right]\right].$$

Введемо функцію

$$f_{l-k}(0, M) = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M} e^{-i(l-k)\frac{2\pi}{M+1}n}$$

і врахуємо ряди (10), (11). Тоді

$$E\hat{B}_k^{(I_1)}(jh) =$$
$$= \sum_{l\in Z}\left[\begin{array}{l} B_l^{(I_1)}(jh) - \\ -\frac{1}{N}\left[B_l^{(I_1)}(jh) + \frac{1}{N}\sum\limits_{p=-N+1}^{N-1} |p|\, B_l^{(I_1)}(nh, (j+p(M+1))h)\right] f_{l-k}(0, M)\end{array}\right],$$

$$E\hat{B}_k^{(D)}(jh) =$$
$$= \sum_{l\in Z}\left[\begin{array}{l} B_l^{(D)}(jh) - \\ -\frac{1}{N}\left[B_l^{(D)}(jh) + \frac{1}{N}\sum\limits_{p=-N+1}^{N-1} |p|\, B_l^{(D)}(nh, (j+p(M+1))h)\right] f_{l-k}(0, M)\end{array}\right].$$

Якщо $l-k = q(M+1)$, $q \in Z$, то $f_{l-k}(0, M) = 1$. Якщо $l-k \neq q(M+1)$, використовуючи формулу для суми геометричної прогресії, отримуємо:

$$f_{l-k}(0, M) = \frac{e^{i(l-k)\frac{2\pi}{M+1}} - 1}{e^{i(l-k)\frac{2\pi}{M+1}} - 1} = 0.$$

Відтак, $f_{l-k}(0, M+1) = \delta_{l, k+q(M+1)}$, де δ – символ Кронекера. Беручи цей факт до уваги, для зміщення оцінок $\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] = E\hat{B}_k^{(I_1)}(jh) - B_k^{(I_1)}(jh)$ і $\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] = E\hat{B}_k^{(D)}(jh) - B_k^{(D)}(jh)$ одержимо:

$$\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] = \varepsilon_0\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] + \varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right], \tag{12}$$

$$\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] = \varepsilon_0\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] + \varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right], \tag{13}$$

де

$$\varepsilon_0\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] = \sum_{\substack{q\in Z \\ q\neq 0}}\left[\hat{B}_{k+q(M+1)}^{(I_1)}(jh)\right], \tag{14}$$

$$\varepsilon_0\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] = \sum_{\substack{q\in Z \\ q\neq 0}}\left[\hat{B}_{k+q(M+1)}^{(D)}(jh)\right], \tag{15}$$

$$\varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right]=$$
$$=-\frac{1}{N}\sum_{q\in Z}\left[B_{k+q(M+1)}^{(I_1)}(jh)+\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}|p|\,B_{k+q(M+1)}^{(I_1)}(j+p(M+1))h\right], \tag{16}$$
$$\varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right]=$$
$$=-\frac{1}{N}\sum_{q\in Z}\left[B_{k+q(M+1)}^{(D)}(jh)+\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}|p|\,B_{k+q(M+1)}^{(D)}(j+p(M+1))h\right]. \tag{17}$$

Порівняно з неперервними оцінками компонентів інваріантів вирази для зміщень дискретних містять додаткові члени, зумовлені ефектами накладання першого і другого роду [1, 9]: на значення оцінюваного номера накладаються значення тих, номери котрих кратны до числа $M+1$. Похибки першого роду визначають формули (14), (15), а другого – (16), (17). Перші присутні незалежно від кількості оброблюваних періодів *N*, а другі зменшуються до нуля, якщо $N\to\infty$, за умов

$$\lim_{|u|\to\infty} B_k^{(I_1)}(u)=0\,,\quad \lim_{|u|\to\infty} B_k^{(D)}(u)=0\,,\quad \forall k\in Z\,,$$

однак, ефекти накладання зменшують швидкість такої збіжності. Похибки накладання будуть тим нижчі, що менші компоненти номерів, які накладаються. Очевидно, що номери таких компонентів зростають, якщо зменшується крок дискретизації $h=T/(M+1)$. Позбутися ефектів накладання можна тоді, коли кількість гармонічних складових у рядах Фур’є кожного з інваріантів скінченна:

$$I_1(t,u)=\sum_{k=-L}^{L} B_k^{(I_1)}(u)e^{ik\omega_0 t}\,,\quad D(t,u)=\sum_{k=-L}^{L} B_k^{(D)}(u)e^{ik\omega_0 t}\,.$$

З виразів (14)–(17) випливає, що кількість періодів M потрібно вибирати так, щоб виконувалася нерівність $|k\pm(M+1)|\geq L+1$. Звідси $M\geq 2L$. Тоді оцінки (6)–(9) асимптотично незміщені, а для скінченних N їх зміщення мають вигляд

$$\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right]=-\frac{1}{N}\left[B_k^{(I_1)}(jh)+\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}|p|\,B_k^{(I_1)}(j+p(M+1))h\right], \tag{18}$$
$$\varepsilon\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right]=-\frac{1}{N}\left[B_k^{(D)}(jh)+\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}|p|\,B_k^{(D)}(j+p(M+1))h\right]. \tag{19}$$

Вважатимемо тепер, що оцінки математичного сподівання складових вектора можна знайти тільки для тих значень *t*, які належать до відрізка [0, *T*], а для інших *t* приймають $\hat{m}(t)=\hat{m}(t+T)$. Тоді

$$\hat{b}_{\xi_p}(t,u)=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1}\xi_p(nh+p(M+1)h)\xi_p((n+j)h+p(M+1)h)-\hat{m}_{\xi_p}(nh)\hat{m}_{\xi_p}((n+j)h)\,,$$

$$\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(t,u)=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1}\xi_p(nh+p(M+1)h)\xi_q((n+j)h+p(M+1)h)-\hat{m}_{\xi_p}(nh)\hat{m}_{\xi_q}((n+j)h)\,,$$

а після усереднення отримуємо:

$$E\hat{b}_{\xi_p}(nh, jh) = b_{\xi_p}(nh, jh) - \frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|p|}{N}\right)b_{\xi_p}(nh,(j+p(M+1)h)),$$

$$E\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(nh, jh) = b_{\xi_p\xi_q}(nh, jh) - \frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|p|}{N}\right)b_{\xi_p\xi_q}(nh,(j+p(M+1)h)).$$

Зміщення оцінок компонентів, виходячи з цих виразів. також можна подати у вигляді сум (18), (19), перші складові яких є такими ж, а другі при $M \geq 2L$ визначають вирази

$$\varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] = -\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|p|}{N}\right)B_k^{(I_1)}(j+p(M+1)h), \tag{20}$$

$$\varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] = -\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|p|}{N}\right)B_k^{(D)}(j+p(M+1)h). \tag{21}$$

Зміщення (18), (19) і (20), (21) відрізняються тільки складовими другого порядку малості, а з точністю до першого порядку однакові:

$$\varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] = -\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}B_k^{(I_1)}(j+p(M+1)h),$$

$$\varepsilon_N\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] = -\frac{1}{N}\sum_{p=-N+1}^{N-1}B_k^{(D)}(j+p(M+1)h). \tag{22}$$

Для обчислення дисперсій оцінок (10), (11) перепишемо їх складові у вигляді

$$\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\hat{b}_{\xi_p}(nh, jh)e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n} =$$

$$= \frac{1}{N(M+1)}\sum_{p=0}^{M}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi_p(ph+n(M+1)h) - \hat{m}_{\xi_p}(ph+n(M+1)h)\right]\times$$

$$\times\left[\xi_p((p+j)h+n(M+1)h) - \hat{m}_{\xi_p}((p+j)h+n(M+1)h)\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n} =$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\left[\mathring{\xi}_p(nh) - \mathring{\hat{m}}_{\xi_p}(nh)\right]\left[\mathring{\xi}_p((n+j)h) - \mathring{\hat{m}}_{\xi_p}((n+j)h)\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n},$$

$$\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(nh, jh)e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n} =$$

$$= \frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}\left[\mathring{\xi}_p(nh) - \mathring{\hat{m}}_{\xi_p}(nh)\right]\left[\mathring{\xi}_q((n+j)h) - \mathring{\hat{m}}_{\xi_q}((n+j)h)\right]e^{-ik\frac{2\pi}{M+1}n}.$$

Тут $K = N(M+1)$ і $\mathring{\hat{m}}_{\xi_p}(nh) = \hat{m}_{\xi_p}(nh) - m_{\xi_p}(nh)$. Беручи до уваги останні вирази, в першому наближенні знаходимо:

$$D\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] = E\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right]^2 - \left[E\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right]^2 = \frac{1}{K}\sum_{m,n=0}^{K-1}\left[\left[\tilde{b}_{\xi_1}(nh,(n-m)h, jh) +\right.\right.$$

$$\left. + \tilde{b}_{\xi_2}(nh,(m-n)h, jh)\right]e^{ik\frac{2\pi}{M+1}(m-n)} + 2\tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(nh,(m-n)h, jh)\cos k\frac{2\pi}{M+1}(m-n), \tag{23}$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right]=E\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right]^2-\left[E\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right]^2=\frac{1}{K}\sum_{m,n=0}^{K-1}\left[\left[\tilde{b}_{\xi_1}(nh,(n-m)h,jh)+\right.\right.$$

$$\left.+\tilde{b}_{\xi_2}(nh,(m-n)h,jh)\right]e^{ik\frac{2\pi}{M+1}(m-n)}+2\tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(nh,(m-n)h,jh)\cos k\frac{2\pi}{M+1}(m-n)\,, \quad (24)$$

де для гаусових ПКВП

$$\tilde{b}_{\xi_p}(nh,(m-n)h,jh)=b_{\xi_p}(nh,(m-n)h)b_{\xi_p}((n+j)h,(m-n)h)+$$

$$+b_{\xi_p}(nh,(m-n+j)h)b_{\xi_p}((n+j)h,(m-n-j)h)\,, \quad (25)$$

$$\tilde{b}_{\xi_p\xi_q}\left(nh,(m-n)h,jh\right)=b_{\xi_p\xi_q}\left(nh,(m-n)h\right)b_{\xi_p\xi_q}\left((n+j)h,(m-n)h\right)+$$

$$+b_{\xi_p\xi_q}(nh,(m-n+j)h)b_{\xi_p\xi_q}((n+j)h,(m-n-j)h)\,, \quad (26)$$

$$\tilde{b}_{\zeta_p}(nh,(m-n)h,jh)=b_{\xi_p}(nh,(m-n)h,)b_{\xi_q}((j+n)h,(m-n)h)+$$

$$+b_{\xi_p\xi_q}(nh,(m-n+j)h)b_{\xi_q\xi_p}((n+j)h,(m-n-j)h)\,, \quad (27)$$

$$\tilde{b}_{\zeta_p\zeta_q}(nh,(m-n)h,jh)=b_{\xi_p\xi_q}(nh,(m-n)h,)b_{\xi_q\xi_p}((j+n)h,(m-n)h)+$$

$$+b_{\xi_p}(nh,(m-n+j)h)b_{\xi_q}((n+j)h,(m-n-j)h)\,. \quad (28)$$

Функції (25)–(28) є періодичними за першими аргументами і їх можна подати рядами Фур'є:

$$\tilde{b}_{\xi_p}(nh,(m-n)h,jh)=\sum_{k\in Z}\tilde{B}_k^{(\xi_p)}((m-n)h,jh)e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n}\,, \quad (29)$$

$$\tilde{b}_{\xi_p\xi_q}(nh,(m-n)h,jh)=\sum_{k\in Z}\tilde{B}_k^{(\xi_p\xi_q)}((m-n)h,jh)e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n}\,, \quad (30)$$

$$\tilde{b}_{\zeta_p}(nh,(m-n)h,jh)=\sum_{k\in Z}\tilde{B}_k^{(\zeta_p)}((m-n)h,jh)e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n}\,, \quad (31)$$

$$\tilde{b}_{\zeta_p\zeta_q}(nh,(m-n)h,jh)=\sum_{k\in Z}\tilde{B}_k^{(\zeta_p\zeta_q)}((m-n)h,jh)e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n}\,. \quad (32)$$

Коефіцієнти Фур'є цих функцій виразимо через Фур'є-коефіцієнти авто- та взаємокореляційних функцій складових вектора $B_k^{(\xi_p)}(jh)$ та $B_k^{(\xi_p\xi_q)}(jh)$:

$$\tilde{B}_k^{(\xi_p)}((m-n)h,jh)=\sum_{q\in Z}e^{-iq\frac{2\pi}{M+1}j}\times$$

$$\times\left[B_{q+k}^{(\xi_p)}((m-n)h)\overline{B_q^{(\xi_p)}}((m-n)h)+B_{q+k}^{(\xi_p)}((m-n-j)h)\overline{B_q^{(\xi_p)}}((m-n+j)h)\right],$$

$$\tilde{B}_k^{(\xi_p\xi_q)}((m-n)h, jh) = \sum_{q\in Z} e^{-iq\frac{2\pi}{M+1}j} \times$$

$$\times\left[B_{q+k}^{(\xi_p\xi_q)}((m-n)h)\overline{B_q^{(\xi_p\xi_q)}}((m-n)h) + B_{q+k}^{(\xi_p\xi_q)}((m-n-j)h)\overline{B_q^{(\xi_p\xi_q)}}((m-n+j)h) \right],$$

$$\tilde{B}_k^{(\zeta_p)}((m-n)h, jh) = \sum_{q\in Z} e^{-iq\frac{2\pi}{M+1}j} \times$$

$$\times\left[B_{q+k}^{(\xi_p)}((m-n)h)\overline{B_q^{(\xi_q)}}((m-n)h) + B_{q+k}^{(\xi_p\xi_q)}((m-n-j)h)\overline{B_q^{(\xi_q\xi_p)}}((m-n+j)h) \right],$$

$$\tilde{B}_k^{(\zeta_p\zeta_q)}((m-n)h, jh) = \sum_{q\in Z} e^{-iq\frac{2\pi}{M+1}j} \times$$

$$\times\left[B_{q+k}^{(\xi_p\xi_q)}((m-n)h)\overline{B_q^{(\xi_q\xi_p)}}((m-n)h) + B_{q+k}^{(\xi_p)}((m-n-j)h)\overline{B_q^{(\xi_q)}}((m-n+j)h) \right].$$

Введемо у виразах новий індекс сумування $r = m - n$. Після перетворень знаходимо:

$$D\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] =$$
$$= \frac{1}{K^2}\left[\sum_{n=0}^{K-1}\left[\tilde{b}_{\xi_1}(nh,0,jh) + \tilde{b}_{\xi_2}(nh,0,jh) + \tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(nh,0,jh) + \tilde{b}_{\xi_2\xi_1}(nh,0,jh) \right] + \right.$$
$$\left. +2\sum_{p=1}^{K-1}\sum_{n=0}^{K-p-1}\left[\begin{array}{l} \tilde{b}_{\xi_1}(nh,ph,jh) + \tilde{b}_{\xi_2}(nh,ph,jh) + \\ +\tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(nh,ph,jh) + \tilde{b}_{\xi_2\xi_1}(nh,ph,jh) \end{array} \right] \cos k\frac{2\pi}{M+1}p \right],$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] =$$
$$\frac{1}{K^2}\left[\sum_{n=0}^{K-1}\left[\tilde{b}_{\zeta_1}(nh,0,jh) + \tilde{b}_{\zeta_2}(nh,0,jh) + \tilde{b}_{\zeta_1\zeta_2}(nh,0,jh) + \tilde{b}_{\zeta_2\zeta_1}(nh,0,jh) \right] + \right.$$
$$\left. +2\sum_{p=1}^{K-1}\sum_{n=0}^{K-p-1}\left[\begin{array}{l} \tilde{b}_{\zeta_1}(nh,ph,jh) + \tilde{b}_{\zeta_2}(nh,ph,jh) + \\ +\tilde{b}_{\zeta_1\zeta_2}(nh,ph,jh) + \tilde{b}_{\zeta_2\zeta_1}(nh,ph,jh) \end{array} \right] \cos k\frac{2\pi}{M+1}p \right].$$

Підставляючи у ці співвідношення ряди, отримуємо:

$$D\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right] = \frac{1}{K^2}\sum_{k\in Z}\left[\begin{array}{l} \tilde{B}_k^{(I_1)}(0,jh)\, f_k(0,K-1) + \\ +2\sum\limits_{p=1}^{K-1}\tilde{B}_k^{(I_1)}(ph,jh)\, f_k(0,K-p-1)\cos k\dfrac{2\pi}{M+1}p \end{array} \right],$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right] = \frac{1}{K^2}\sum_{k\in Z}\left[\begin{array}{l} \tilde{B}_k^{(D)}(0,jh)\, f_k(0,K-1) + \\ +2\sum\limits_{p=1}^{K-1}\tilde{B}_k^{(D)}(ph,jh)\, f_k(0,K-p-1)\cos k\dfrac{2\pi}{M+1}p \end{array} \right],$$

де

$$f_k(0,K-1)=\frac{1}{K}\sum_{n=0}^{K-1}e^{ik\frac{2\pi}{M+1}n},$$

$$\tilde{B}_k^{(I_1)}(ph,jh)=\tilde{B}_k^{(\xi_1)}(ph,jh)+\tilde{B}_k^{(\xi_2)}(ph,jh)+\tilde{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(ph,jh)+\tilde{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(ph,jh),$$

$$\tilde{B}_k^{(D)}(ph,jh)=\tilde{B}_k^{(\zeta_1)}(ph,jh)+\tilde{B}_k^{(\zeta_2)}(ph,jh)+\tilde{B}_k^{(\zeta_1\zeta_2)}(ph,jh)+\tilde{B}_k^{(\zeta_2\zeta_1)}(ph,jh).$$

Якщо $r=q(M+1)$, то $f_r(0,K-1)=1$, $f_r(0,K-p-1)=1-\frac{p}{K}$. Якщо $r\neq q(M+1)$ і K великі, значення цієї функції малі, тому члени, що множать на неї, можна знехтувати. Тоді

$$D\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(jh)\right]=\frac{1}{K}\sum_{q\in Z}\left[\tilde{B}_{q(M+1)}^{(I_1)}(0,jh)+2\sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)\tilde{B}_{q(M+1)}^{(I_1)}(ph,jh)\cos k\frac{2\pi}{M+1}p\right],$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(D)}(jh)\right]=\frac{1}{K}\sum_{q\in Z}\left[\tilde{B}_{q(M+1)}^{(D)}(0,jh)+2\sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)\tilde{B}_{q(M+1)}^{(D)}(ph,jh)\cos k\frac{2\pi}{M+1}p\right].$$

Вирази для дисперсій містять нескінченну кількість додаткових членів, які можуть суттєво змінювати їх. За виконання умов (18) вони прямують до нуля, якщо $K\to\infty$, тому такий ефект називають ефектом накладання другого роду. Зменшити його похибку можна, зменшуючи крок дискретизації, а за скінченної кількості гармонік у рядах для кореляційних функцій складових вектора – взагалі його уникнути. Якщо кількість гармонік кореляційних функцій дорівнює L, то в рядах для інваріантів їх тоді буде $2L$. Умовою відсутності накладання тут є виконання нерівності $M\geq 2L$. Тоді дисперсії оцінок

$$D\left[\hat{B}_k^{(I_1)}\right]=\frac{1}{K}\left[\tilde{B}_k^{(I_1)}(0,jh)+2\sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)\tilde{B}_0^{(I_1)}(ph,jh)\cos k\frac{2\pi}{M+1}p\right],$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(D)}\right]=\frac{1}{K}\left[\tilde{B}_k^{(D)}(0,jh)+2\sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{p}{K}\right)\tilde{B}_0^{(D)}(ph,jh)\cos k\frac{2\pi}{M+1}p\right].$$

Якщо $h\to 0$, ці вирази прямують до тих інтегралів, які визначають дисперсії компонентів інваріантів під час неперервного оцінювання.

Розглянемо тепер оцінки, які мають вигляд тригонометричних поліномів (19), (20) з тією різницею, що в них замість коефіцієнтів Фур'є інваріантів використовують оцінки (10), (11):

$$\hat{I}_1(t,jh)=\sum_{k=-L}^{L}B_k^{(I_1)}(jh)e^{ik\omega_0 t}=\sum_{n=0}^{M}\hat{I}_1(nh,jh)\left[\frac{1}{N(M+1)}\sum_{k=-L}^{L}e^{ik\omega_0(t-nh)}\right],$$

$$\hat{D}(t,jh)=\sum_{k=-L}^{L}B_k^{(D)}(jh)e^{ik\omega_0 t}=\sum_{n=0}^{M}\hat{D}(nh,jh)\left[\frac{1}{N(M+1)}\sum_{k=-L}^{L}e^{ik\omega_0(t-nh)}\right].$$

Застосовуючи формулу для суми геометричної прогресії, знаходимо:

$$\frac{1}{N(M+1)}\sum_{k=-L}^{L}e^{ik\omega_0(t-nh)}=\frac{\sin(2L+1)\frac{\pi}{T}(t-nh)}{K\sin\frac{\pi}{T}(t-nh)}. \quad (33)$$

Тоді

$$\hat{I}_1(t,nh)=\sum_{n=0}^{2L}\hat{I}_1(nh,jh)\varphi_n(t)\,, \tag{34}$$

$$\hat{D}(t,nh)=\sum_{n=0}^{2L}\hat{D}(nh,jh)\varphi_n(t)\,, \tag{35}$$

де функцію $\varphi_n(t)$ визначає права частина рівності (33). Отримані формули є інтерполяційним: визначають оцінки інваріантів $I_1(t,jh)$ та $D(t,jh)$ у кожній точці $t\in[0,T]$ за їх когерентними оцінками $t_n=nh$ за кроку дискретизації $h=\dfrac{T}{2L+1}$. За виконання умов (18) вони асимптотично незміщені, оскільки тоді

$$\lim_{N\to\infty}\hat{I}_1(nh,jh)=I_1(nh,jh)\,,\quad \lim_{N\to\infty}\hat{D}(nh,jh)=D(nh,jh)\,.$$

Дисперсію оцінок (34), (35) визначають формули

$$D\left[\hat{I}_1(t,jh)\right]=\sum_{n=-2L}^{2L}\alpha_n^{(I_1)}(jh)e^{in\omega_0 t}\,, \tag{36}$$

$$D\left[\hat{D}(t,jh)\right]=\sum_{n=-2L}^{2L}\alpha_n^{(D)}(jh)e^{in\omega_0 t}\,, \tag{37}$$

де

$$\alpha_n^{(I_1)}(jh)=\sum_{k=-N_2}^{N_2-n}R_{n+k,k}^{(I_1)}(jh)\,,\quad \alpha_n^{(D)}(jh)=\sum_{k=-L}^{L-n}R_{n+k,k}^{(D)}(jh)\,,\quad n\geq 0$$

і $\alpha_{-n}^{(I_1)}(jh)=\overline{\alpha_n^{(I_1)}}(jh)$; $\alpha_{-n}^{(D)}(jh)=\overline{\alpha_n^{(D)}}(jh)$. Для кореляції $R_{lk}^{(I_1)}(jh)$ і $R_{lk}^{(D)}(jh)$ маємо:

$$R_{lk}^{(I_1)}(jh)=R_{lk}^{(\xi_1)}(jh)+R_{lk}^{(\xi_2)}(jh)+R_{lk}^{(\xi_1\xi_2)}(jh)+R_{lk}^{(\xi_2\xi_1)}(jh)\,,$$

$$R_{lk}^{(D)}(jh)=R_{lk}^{(\zeta_1)}(jh)+R_{lk}^{(\zeta_2)}(jh)+R_{lk}^{(\zeta_1\zeta_2)}(jh)+R_{lk}^{(\zeta_2\zeta_1)}(jh)\,,$$

при цьому

$$R_{lk}^{(\xi_p)}(jh)=\frac{1}{K^2}\sum_{m,n=0}^{K-1}\tilde{b}_{\xi_p}(nh,(m-n)h,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(kn-lm)}\,, \tag{38}$$

$$R_{lk}^{(\xi_p\xi_q)}(jh)=\frac{1}{K^2}\sum_{m,n=0}^{K-1}\tilde{b}_{\xi_p\xi_q}(nh,(m-n)h,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(kn-lm)}\,, \tag{39}$$

$$R_{lk}^{(\zeta_p)}(jh)=\frac{1}{K^2}\sum_{m,n=0}^{K-1}\tilde{b}_{\zeta_p}(nh,(m-n)h,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(kn-lm)}\,, \tag{40}$$

$$R_{lk}^{(\zeta_p\zeta_q)}(jh)=\frac{1}{K^2}\sum_{m,n=0}^{K-1}\tilde{b}_{\zeta_p\zeta_q}(nh,(m-n)h,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(kn-lm)}\,. \tag{41}$$

Після заміни індекса $m-n=l$ і перетворення подвійних сум для кореляцій (38) знаходимо:

$$R_{lk}^{(\xi_p)}(jh)=\frac{1}{K^2}\sum_{n=0}^{K-1}\sum_{l=-n}^{K-n-1}\tilde{b}_{\xi_p}(nh,(m-n)h,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(k(n+l)-ln)}=$$

$$=\frac{1}{K^2}\left[\sum_{n=0}^{K-1}\tilde{b}_{\xi_p}(nh,0,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(k-l)n}+\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{K-1}\sum_{n=0}^{K-l-1}\tilde{b}_{\xi_p}(nh,lh,jh)e^{i\frac{2\pi}{M+1}(k-l)n}\left(e^{ik\frac{2\pi}{M+1}l}+e^{-i(2k-l)\frac{2\pi}{M+1}l}\right)\right].$$

Після підставляння до цього виразу ряду

$$\tilde{b}_{\xi_1}(nh,rh,jh)=\sum_{m=-2L}^{2L}\tilde{B}_m^{(\xi_1)}(rh,jh)e^{im\frac{2\pi}{M+1}n}$$

отримаємо:

$$R_{l+k,k}^{(\xi_p)}(jh)=\frac{1}{K}\sum_{m=-2L}^{2L}\left[\begin{array}{l}\tilde{B}_m^{(\xi_1)}(lh,jh)f_{m+l}(0,K-1)+\\+\sum_{l=-1}^{K-1}\tilde{B}_m^{(\xi_1)}(lh,jh)\left(e^{ik\frac{2\pi}{M+1}l}+e^{-i(k-l)\frac{2\pi}{M+1}l}\right)f_{l+m}(0,K-p-1)\end{array}\right].$$

Ефекти накладання другого роду відсутні, якщо $l+m\neq q(M+1)\quad\forall q\in Z$. Ця умова виконується, коли $M\geq 4L$.

Після аналогічних перетворень співвідношень (39)–(41) приходимо до таких формул для коефіцієнтів (36), (37) за умови $M\geq 4L$:

$$\alpha_n^{(I_1)}(jh)=\frac{1}{K}\left[\begin{array}{l}(2L+|n|+1)\tilde{B}_n^{(I_1)}(0,jh)+\\+\sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{|p|}{K}\right)\tilde{B}_n^{(I_1)}(ph,jh)\sum_{l\in Z}\left(e^{il\frac{2\pi}{M+1}p}+e^{-i(l-n)\frac{2\pi}{M+1}p}\right)\end{array}\right],$$

$$\alpha_n^{(D)}(jh)=\frac{1}{K}\left[\begin{array}{l}(2L+|n|+1)\tilde{B}_n^{(D)}(0,jh)+\\+\sum_{p=1}^{K-1}\left(1-\frac{|p|}{K}\right)\tilde{B}_n^{(D)}(ph,jh)\sum_{l\in Z}\left(e^{il\frac{2\pi}{M+1}p}+e^{-i(l-n)\frac{2\pi}{M+1}p}\right)\end{array}\right].$$

За виконання умов (18) ці величини прямують до нуля, якщо $K\to\infty$, а це означає, що інтерполяційні оцінки інваріантів (34) і (35) є слушними.

Отже, під час дискретного оцінювання основними є похибки накладання першого й другого роду. Перші виникають за будь-якої довжини реалізації, що обробляють, а другі за виконання умов ергодичності зменшуються з її збільшенням. Похибок обох типів можна позбутися за обмеженого гармонічного складу кореляційних інваріантів, якщо вибирати крок дискретизації так, щоб задовольнити наведені вище умови. Якщо вони виконуються, то інтервал дискретизації бажано зменшувати до допустимої різниці між дисперсіями неперервних та дискретних оцінок.

1. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2012. – 802 с.

2. *Векторна* діагностика підшипника кочення при розвинутому дефекті на зовнішньому кільці / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // Вібрації в техніці і технологіях. – 2014. – № 2 (76). – С. 101–110.
3. *Інваріантний* кореляційний аналіз вібрацій підшипника кочення з дефектами на зовнішньому та внутрішньому кільцях / І. Й. Мацько, І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, В. Б. Шевчик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 6. – С. 109–117.
4. *Vectorial* periodically correlated random processes and their covariance invariant analysis / I. M. Yavorskyj, I. Y. Matsko, R. M. Yuzefovych, O. Yu. Dzeryn // Cyclistationarity: Theory and methods III. / Eds.: F. Chaari, J. Leskow, A. Napolitano, R. Zimroz, A. Wylomanska. – Switzerland: Springer Int. Publ., 2016. – P. 121–150.
5. *Component* covariance analysis of periodically correlated random processes / I. Yavorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych // Signal Proc. – 2010. – **90**. – P. 1083–1102.
6. *Coherent* covariance analysis of periodically correlated random processes / I. Yavorskyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski, S. Brooks // Signal Proc. – 2007. – **87**. – P. 13–32.
7. *Оцінювання* кореляційних інваріантів періодично нестаціонарних вібраційних сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Відбір і обробка інформації. – 2013. – № 89 (115). – С. 14–21.
8. *Компонентный* корреляционный анализ векторных периодически нестационарных случайных процессов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. И. Мацько, В. Б. Шевчик // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2014. – **57**, № 9. – С. 29–41.
9. *Discrete* estimators of characteristics for periodically correlated time series / I. Yavorskyj, I. Matsko, R. Yuzefovych, Z. Zakrzewski // Digital Signal Proc. – 2016. – **53**. – P. 25–40.

Одержано 18.09.2017