УДК 004.92:517

ФЕДОТОВА Л.Л, РЕЗАНОВА В.Г.
Київський національний університет технологій та дизайну

ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ У ВИПАДКУ СИСТЕМ, ЗАДАНИХ РЕПЕРАМИ

Мета. *Подати логічно обґрунтований процес виведення формул в матричній та координатній формах для переходу від однієї до іншої координатної системи, кожна з яких задана своїм репером на площині.*

Методика. *Для здійснення переходу від однієї до іншої координатної системи, кожна з яких задана своїм репером на площині, використовується апарат матричного числення.*

Результати. *Розглянуто методику та отримано формули в матричній та координатній формах для переходу від однієї до іншої координатної системи, кожна з яких задана своїм репером на площині.*

Практична значимість. *Отримані результати можна впроваджувати в навчальний процес у вищому навчальному закладі. І основним, по суті, тут є методика осмислення надбаних знань для подальшого їх застосування, а це водночас означає одержання нових знань. Крім того, одержані формули мають компактний і зручний для подальшого застосування вигляд, представлений у матричній і координатній формах, і можуть застосовуватись, зокрема, в проектах комп'ютерної графіки.*

Ключові слова*: репер, вектор, система координат, матриця, обернена матриця, детермінант.*

Вступ. Навчальний процес у вищому навчальному закладі складається з багатьох складових, але одним з головних є вміння осмислити надбані знання для подальшого їх застосування, а це водночас означає одержання нових знань. В статті демонструється процес використання знань з вищої математики для виведення нових формул, які за своєю суттю, можливо, існують, але в дещо іншому вигляді, такому, який не зручний або не зовсім зрозумілий у даному застосуванні (як правило, розглядається тільки перехід у декартових системах координат). Отримані результати можуть бути корисними, зокрема, у проектах комп'ютерної графіки при здійсненні перетворень на площині.

Постановка завдання На площині задані два репери, які визначають дві системи координат. Вивести формули переходу від однієї системи координат до іншої, як в матричній, так і в координатній формі. Тобто – описати процес виведення формул переходу з однієї координатної системи в іншу. Задача виведення формул перетворення координат вимагає вміння послідовного і чіткого логічного мислення, що має метою розв'язання поставленої задачі у компактному і зрозумілому аналітичному вигляді.

Мета - подати логічно обґрунтований процес виведення формул в матричній та координатній формах для переходу від однієї до іншої координатної системи, кожна з яких задана своїм репером на площині.

Результати дослідження Нехай на площині репером $\{A_0,A_1,A_2\}$ задана система координат (назвемо її початковою), і в ній задана точка X з координатами (x_1,x_2). Введемо на цій же площині іншу систему координат визначену репером $\{B_0,B_1,B_2\}$. Позначимо координати точки X у цій системі координат через (x_1',x_2'). Задача формулюється наступним чином: знайти формули розрахунку координат точки X в новій системі координат через координати цієї точки (x_1,x_2) в початковій системі координат. Зазначимо, що контур будь-якої фігури може бути представлений як сукупність точок, отже, достатньо розглянути одну точку.

Для знаходження співвідношення між координатами в різних системах координат введемо допоміжну систему координат, яка задається початком координат O і двома векторами $\overline{z_1}$ і $\overline{z_2}$. Запишемо в ній значення координат точок репера початкової і нової систем координат: $A_0(a_{01},a_{02})$, $A_1(a_{11},a_{12})$, $A_2(a_{21},a_{22})$, $B_0(b_{01},b_{02})$, $B_1(b_{11},b_{12})$, $B_2(b_{21},b_{22})$.

Виразимо координати точки X у допоміжній системі координат через її координати у початковій і новій координатних системах. Для цього вектор $\overline{OX}$ (див. рис.1) зобразимо через вектори зв'язані з кожною системою координат: $\overline{OX} = \overline{OA_0} + \overline{A_0X} = \overline{OB_0} + \overline{B_0X}$.

Знайдемо координати складових векторів.

$$\begin{cases} \overline{OA_0} = a_{01} \cdot \overline{z_1} + a_{02} \cdot \overline{z_2} \\ \overline{OB_0} = b_{01} \cdot \overline{z_1} + b_{02} \cdot \overline{z_2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \overline{A_0X} = x_1 \cdot \overline{A_0A_1} + x_2 \cdot \overline{A_0A_2} \\ \overline{B_0X} = x_1' \cdot \overline{B_0B_1} + x_2' \cdot \overline{B_0B_2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \overline{A_0A_1} = (a_{11} - a_{01}) \cdot \overline{z_1} + (a_{12} - a_{02})\overline{z_2} \\ \overline{A_0A_2} = (a_{21} - a_{01}) \cdot \overline{z_1} + (a_{22} - a_{02})\overline{z_2} \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{A_0A_1} = (b_{11} - b_{01}) \cdot \overline{z_1} + (b_{12} - b_{02})\overline{z_2} \\ \overline{A_0A_2} = (b_{21} - b_{01}) \cdot \overline{z_1} + (b_{22} - b_{02})\overline{z_2} \end{cases}.$$

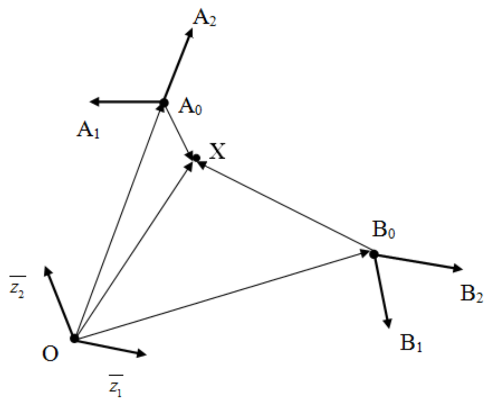

Рис. 1

Підставимо вирази у наступне рівняння:

$$\overline{OA_0} + \overline{A_0X} = \overline{OB_0} + \overline{B_0X} \qquad (1)$$

і одержимо рівняння

$$a_{01}\overline{z_1} + a_{02}\overline{z_2} + x_1\left[(a_{11} - a_{01})\overline{z_1} + (a_{12} - a_{02})\overline{z_2}\right] + x_2\left[(a_{21} - a_{01})\overline{z_1} + (a_{22} - a_{02})\overline{z_2}\right] =$$
$$= b_{01}\overline{z_1} + b_{02}\overline{z_2} + x_1'\left[(b_{11} - b_{01})\overline{z_1} + (b_{12} - b_{02})\overline{z_2}\right] + x_2'\left[(b_{21} - b_{01})\overline{z_1} + (b_{22} - b_{02})\overline{z_2}\right].$$

Виключимо з розглядання вектори $\overline{z_1}$ і $\overline{z_2}$, що визначають проміжну систему координат. Для цього прирівняємо координати – вирази перед $\overline{z_1}$ і $\overline{z_2}$ з лівої та правої сторін рівності (1):

$$\begin{cases} a_{01} + x_1(a_{11} - a_{01}) + x_2(a_{21} - a_{01}) = b_{01} + x_1'(b_{11} - b_{01}) + x_2'(b_{21} - b_{01}); \\ a_{02} + x_1(a_{12} - a_{02}) + x_2(a_{22} - a_{02}) = b_{02} + x_1'(b_{12} - b_{02}) + x_2'(b_{22} - b_{02}) \end{cases}$$

Перепишемо отриману систему в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{01} \\ a_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} - a_{01} & a_{21} - a_{01} \\ a_{12} - a_{02} & a_{22} - a_{02} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{01} \\ b_{02} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} - b_{01} & b_{21} - b_{01} \\ b_{12} - b_{02} & b_{22} - b_{02} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Запишемо вираз інакше:

$$\begin{pmatrix} b_{11} - b_{01} & b_{21} - b_{01} \\ b_{12} - b_{02} & b_{22} - b_{02} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{01} & a_{21} - a_{01} \\ a_{12} - a_{02} & a_{22} - a_{02} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{01} - b_{01} \\ a_{02} - b_{02} \end{pmatrix}$$

(2)

Введемо наступні позначення:

$$\mathrm{M}_b = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{01} & b_{21} - b_{01} \\ b_{12} - b_{02} & b_{22} - b_{02} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{01} & a_{21} - a_{01} \\ a_{12} - a_{02} & a_{22} - a_{02} \end{pmatrix},$$

$$\overline{X'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{AB} = \begin{pmatrix} a_{01} - b_{01} \\ a_{02} - b_{02} \end{pmatrix},$$

і запишемо матричне рівняння (2) з їх використанням:

$$\mathrm{M}_b \cdot \overline{X'} = \mathrm{M}_a \cdot \overline{X} + \mathrm{AB}$$

Розв’яжемо отримане матричне рівняння відносно $\overline{X'}$:

$$\overline{X'} = \mathrm{M}_b^{-1}\left(\mathrm{M}_a \cdot \overline{X} + \mathrm{AB}\right), \tag{3}$$

де $\mathrm{M_b}^{-1}$ – обернена матриця, яка знаходиться за формулою

$$\mathrm{M}_b^{-1} = \frac{1}{\Delta_b}\begin{pmatrix} b_{22} - b_{02} & -(b_{21} - b_{01}) \\ -(b_{12} - b_{02}) & b_{11} - b_{01} \end{pmatrix},$$

Δ_b – визначник матриці $\mathrm{M_b}$: $\Delta_b = \begin{vmatrix} b_{11} - b_{01} & b_{21} - b_{01} \\ b_{12} - b_{02} & b_{22} - b_{02} \end{vmatrix} \neq 0$.

Для того, щоб знайти x_1' і x_2', запишемо рівняння (3) через координати векторів базисів $\{A_0,A_1,A_2\}$ і $\{B_0,B_1,B_2\}$ в проміжній системі координат в матричній формі:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_b}\begin{pmatrix} b_{22} - b_{02} & -(b_{21} - b_{01}) \\ -(b_{12} - b_{02}) & b_{11} - b_{01} \end{pmatrix} \cdot \left\{\begin{pmatrix} a_{11} - a_{01} & a_{21} - a_{01} \\ a_{12} - a_{02} & a_{22} - a_{02} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{01} - b_{01} \\ a_{02} - b_{02} \end{pmatrix}\right\};$$

виконаємо множення і додавання матриць у фігурних дужках:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_b}\begin{pmatrix} b_{22} - b_{02} & -(b_{21} - b_{01}) \\ -(b_{12} - b_{02}) & b_{11} - b_{01} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} (a_{11} - a_{01}) \cdot x_1 + (a_{21} - a_{01}) x_2 + (a_{01} - b_{01}) \\ (a_{12} - a_{02}) x_1 + (a_{22} - a_{02}) \cdot x_2 + (a_{02} - b_{02}) \end{Bmatrix}.$$

Введемо позначення

$$w_1 = \left(a_{11} - a_{01}\right)\cdot x_1 + \left(a_{21} - a_{01}\right)x_2 + a_{01} - b_{01},$$
$$w_2 = \left(a_{12} - a_{02}\right)x_1 + \left(a_{22} - a_{02}\right)\cdot x_2 + a_{02} - b_{02}$$

Тоді вираз у фігурних дужках запишеться так:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_b}\begin{pmatrix} b_{22} - b_{02} & -\left(b_{21} - b_{01}\right) \\ -\left(b_{12} - b_{02}\right) & b_{11} - b_{01} \end{pmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}.$$

Отже, кожна координата точки X в новій системі координат, що визначається репером $\{B_0,B_1,B_2\}$, розраховується через початкові координати x_1 та x_2 і координати базисів $A_0(a_{01},a_{02})$, $A_1(a_{11},a_{12})$, $A_2(a_{21},a_{22})$, $B_0(b_{01},b_{02})$, $B_1(b_{11},b_{12})$, $B_2(b_{21},b_{22})$ в проміжній системі координат за наступними формулами:

$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{1}{\Delta_b}\left[\left(b_{22} - b_{02}\right)\cdot w_1 - \left(b_{21} - b_{01}\right)\cdot w_2\right], \\ x_2' = \dfrac{1}{\Delta_b}\left[-\left(b_{12} - b_{02}\right)\cdot w_1 + \left(b_{11} - b_{01}\right)\cdot w_2\right] \end{cases}$$

Висновки В статті розглянута методика виведення формул переходу з будь-якої системи координат на площині в будь-яку іншу на цій же площині з використанням векторної алгебри і матричного числення. Одержані формули мають компактний і зручний для подальшого застосування вигляд, представлений у матричній і координатній формах, і можуть застосовуватись, зокрема, в проектах комп’ютерної графіки при здійсненні лінійних перетворень на площині.

Список використаних джерел

1. Аналитическая геометрия. Канатников А.Н., Крищенко А.П. 2-е изд. – М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. -388с.
2. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Физматлит, 2011. – 585с.
3. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Альфа-Пресс, 2009. – 208с.
4. Культин Н. Delphi в примерах и задачах (3-е издиние). С-Пб.: БХВ-Петербург, 2012. – 288с.
5. Осипов Д. Графика в проектах Delphi. С-Пб.: Символ-Плюс, 2008. – 642с.

References

1. Analiticheskaya geometria [Analytic geometry]. Kanatnikov A.N., Krishchenko A.P. 2-e izd. – M.:Izd-vo MGTU im. N.E.Baumana, 2000. -388c.
2. Efimov N.V. Vysshaya geometria [Higher geometry]. – M.: Fizmatlit, 2011. – 585c.
3. Prosvetov G.I. Lineynaya algebra i analiticheskaya geometria [Linear algebra and analytic geometry]. – M.: Alfa-Press, 2009. – 208c.
4. Kultin N. Delphi v primerah I zadachah (3-e izdanie) [Delphi in the examples and problems (3rd edition)]. S-Pb.: BHV-Peterburg, 2012. – 288c.
5. Osipov D. Grafika v proektah Delphi [Graphics in Delphi project]. S-Pb.: Simvol-Plus, 2008. – 642c.

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ В СЛУЧАЕ СИСТЕМ, ЗАДАННЫХ РЭПЕРАМИ

ФЕДОТОВА Л.Л., РЕЗАНОВА В.Г.

Киевский национальный университет технологий и дизайна

Цель - представить логически обоснованный процесс вывода формул в матричной и координатной формах для перехода от одной к другой координатной системе, каждая из которых задана своим рэпером на плоскости.

Методика. Для осуществления перехода от одной к другой координатной системе, каждая из которых задана своим рэпером на плоскости, используется аппарат матричного исчисления.

Результаты. Рассмотрены методика и получены формулы в матричной и кординатной формах для перехода от одной к другой координатной системе, каждая из которых задана своим рэпером на плоскости.

Практическая значимость. Полученные результаты можно внедрять в учебный процесс в высшем учебном заведении. И основным, по сути, здесь является методика осмысления приобретенных знаний для дальнейшего их применения, а это одновременно означает получение новых знаний. Кроме того, полученные формулы имеют компактный и удобный для дальнейшего применения вид, представленный в матричной и координатной формах, и могут применяться, в частности, в проектах компьютерной графики.

Ключевые слова: *рэпер, вектор, система координат, матрица, обратная матрица, детерминант.*

THE COORDINATES TRANSFORMATION FOR SYSTEMS DEFINED BY REPER

FEDOTOVA L., REZANOVA V.

Kiev National University of Technology and Design

Purpose - to present logically justified process of derivation of the formulae for transition from one to another coordinate system, defined by reper on the plane, in matrix and co-ordinate forms

Methods. To make the transition from one to another coordinate system, each of which is given by reper on the plane, using the apparatus of matrix calculus.

Results. The techniques and formulae are obtained in the matrix and coordinate forms to transit from one to another coordinate system, each of which is defined by reper on the plane.

Practical significance. The results can be incorporated into the educational process in higher education. And the main, in fact, there is a method of interpretation of the acquired knowledge to further their use, and it also means acquiring new knowledge. In addition, the formulae obtained are compact and easy to further use the form shown in the matrix and the coordinate form, and can be used in particular in the projects of computer graphics.

Keywords: *reper, vector, coordinate system, the inverse of a matrix, determinants.*