

УДК 624.012.46

ЧУЧМАЙ А.М., БАЛДУК П.Г., СУРЬЯНИНОВ Н.Г.  
Одесская государственная академия строительства и  
архитектуры

### РАСЧЕТ КЕССОННЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ ЧИСЛЕННО- АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Цель.** Разработка математической модели и алгоритма расчета кессонного перекрытия на основе численно-аналитического метода граничных элементов.

**Методика.** Исходное дифференциальное уравнение и все параметры напряженно-деформированного состояния перекрытия, зависящие от двух переменных, при помощи метода Канторовича-Власова приводятся к уравнению и параметрам, зависящим от одной переменной. Затем, в соответствии с концепцией используемого метода, перекрытие рассматривается как система одномерных модулей.

**Научная новизна.** Построена гранично-элементная математическая модель железобетонного кессонного перекрытия, на основе которой выполнен расчет реальной конструкции.

**Практическая значимость.** Используемый подход позволяет получить для рассматриваемого класса конструкций разрешающую систему алгебраических уравнений, которая на два порядка меньше, чем аналогичная система в методе конечных элементов. Реализация алгоритма не требует привлечения дорогостоящих современных программ инженерного анализа.

**Ключевые слова:** кессонное перекрытие, метод граничных элементов, метод Канторовича-Власова, напряжение, прогиб, SCAD, ANSYS

**Введение.** Для снижения массы железобетонных перекрытий во многих странах широко применяют перекрытия эффективных конструктивных форм, в частности, монолитные кессонные перекрытия [1].

Изучение напряженно-деформированного состояния конструкций кессонного типа, в том числе и железобетонных кессонных перекрытий, представляет собой сложную и недостаточно исследованную проблему. Ребра и плита испытывают разное напряженное состояние, поэтому при разработке аналитических решений приходится прибегать к различным упрощающим гипотезам. Кроме того, возникают трудности, обусловленные свойствами бетона — трещинообразование, ползучесть и т.п.

Расчет кессонных перекрытий выполняют аналитическими, приближенными и численными методами.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Публикаций, посвященных расчету кессонных перекрытий крайне мало. Основной нормативный документ (СНиП), определяющий общие требования к бетонным и железобетонным конструкциям [2], не содержит рекомендаций о методах расчета кессонных перекрытий. Некоторые указания о расчете подобного рода конструкций можно найти лишь в разнообразных рекомендациях и методиках [3], которым присущи как преимущества, так и недостатки.

Расчет монолитных ребристых перекрытий при традиционном проектировании сводится к раздельному расчету главных и второстепенных балок и монолитной плиты как балочных конструкций без учета их взаимодействия на напряженно-деформируемое

состояние друг друга.

Применение классических методов строительной механики — метода сил [4] и метода перемещений [5] — дает весьма приближенные результаты.

Аналитические методы не позволяют охватить все разнообразные задачи, выдвигаемые практикой. Поэтому при расчете кессонных перекрытий широкое применение нашли численные методы, главным образом, метод конечных разностей [6] и метод конечных элементов [7, 8].

**Постановка задачи.** В настоящее время наиболее разработанным из численных методов является метод конечных элементов (МКЭ). Однако МКЭ имеет ряд недостатков, которые известны и подробно описаны в литературе. Наиболее серьезной проблемой МКЭ является проблема сходимости полученного решения, оценка погрешности, связанной с дискретизацией исходной геометрической модели.

Поиск альтернативных подходов привёл к появлению нового метода, а точнее, семейства методов граничных элементов (МГЭ), среди которых высокую эффективность показал численно-аналитический вариант метода граничных элементов (ЧА МГЭ) [9, 10].

Метод состоит в разработке фундаментальной системы решений (аналитически) и функций Грина (также аналитически) для каждой рассматриваемой задачи. Для учета определенных граничных условий, или условий контакта между модулями (так называется отдельный элемент системы) составляется небольшая система линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать численно.

Можно выделить целый ряд преимуществ ЧА МГЭ. Дискретизация только границы области занимаемой объектом, резко уменьшает порядок системы разрешающих уравнений; есть возможность снижения мерности решаемой задачи. Кроме того, метод использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений, а значит, в рамках принимаемых гипотез позволяет получить точные значения параметров задачи (усилий, перемещений, напряжений, токов, частот собственных колебаний, критических сил потери устойчивости и т.д.) внутри области. Отметим также простоту логики алгоритма, хорошую сходимость решения, высокую устойчивость и малое накопление погрешностей при численных операциях.

**Результаты.** Рассмотрим кессонное перекрытие, которое жестко соединено с четырьмя опорами. Это соединение имеет место в зоне контакта двух ребер (которые обозначим цифрами I и II) с колоннами (рис. 1). Граничные условия для этих ребер соответствуют жесткому защемлению, а края остальных продольных ребер (условно назовем ребра, параллельные оси  $ou$ , продольными) остаются свободными.

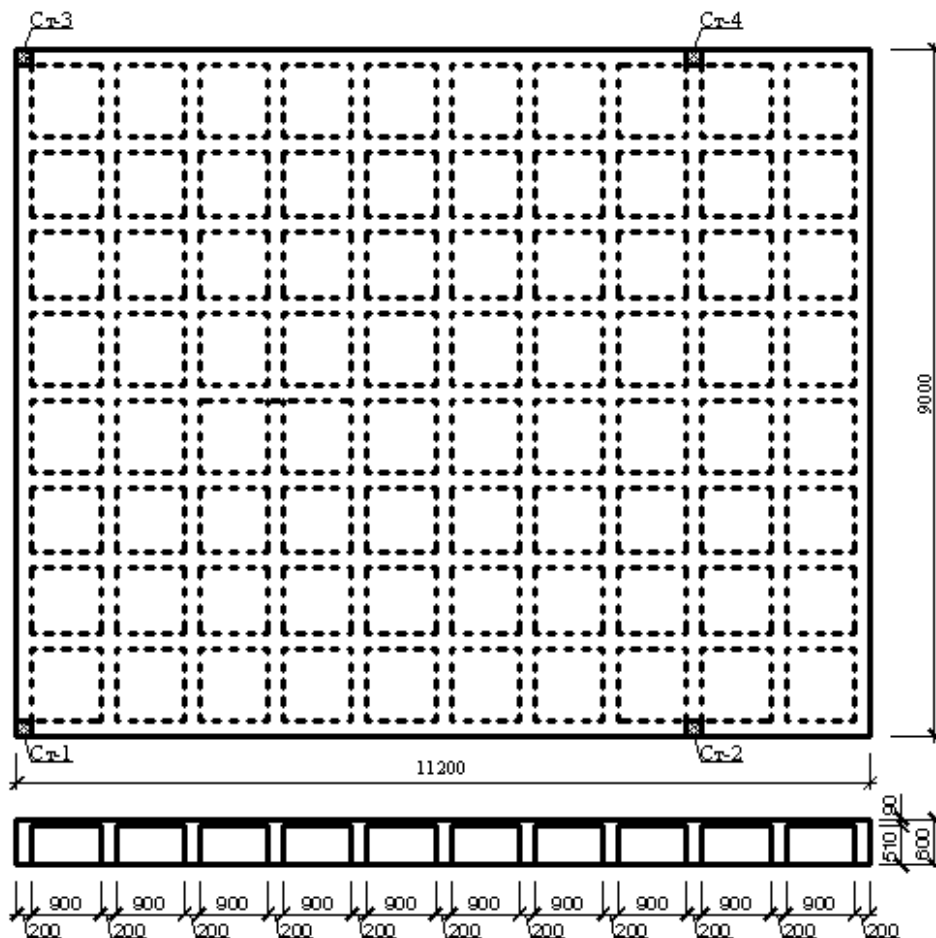


Рис. 1. Кессонное железобетонное перекрытие

Основная идея предлагаемого подхода заключается в следующем. Части конструкции, которые имеют ребра, параллельные оси  $Ox$  (назовем это направление поперечным), считаются гладкими пластинами толщиной  $h_1 = h + h_{ribx}$  и шириной  $b = b_{ribx}$ , где  $h$  — толщина пластины,  $h_{ribx}$ ,  $b_{ribx}$  — размеры поперечных сечений ребер (которые не обязательно должны быть одинаковыми). Для этих модулей (модуль — единица дискретизации в ЧА МГЭ) справедлива теория расчета гладких пластин, изложенная в [9], с соответствующими выражениями фундаментальных функций, функции Грина и вектора нагрузки. На рис. 2 такие модули обозначены четными цифрами. Остальные модули (нечетные цифры на рис. 2) представляют собой пластины, подкрепленные ребрами в продольном направлении. Размеры этих ребер  $h_{riby}$ ,  $b_{riby}$ .

Обозначим приведенные характеристики ребер в двух направлениях:

$E_x$ ,  $G_x$ ,  $\mu_x$  — соответственно модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона ребра в направлении оси  $x$ ;

$E_y$ ,  $G_y$ ,  $\mu_y$  — то же, в направлении оси  $y$ .

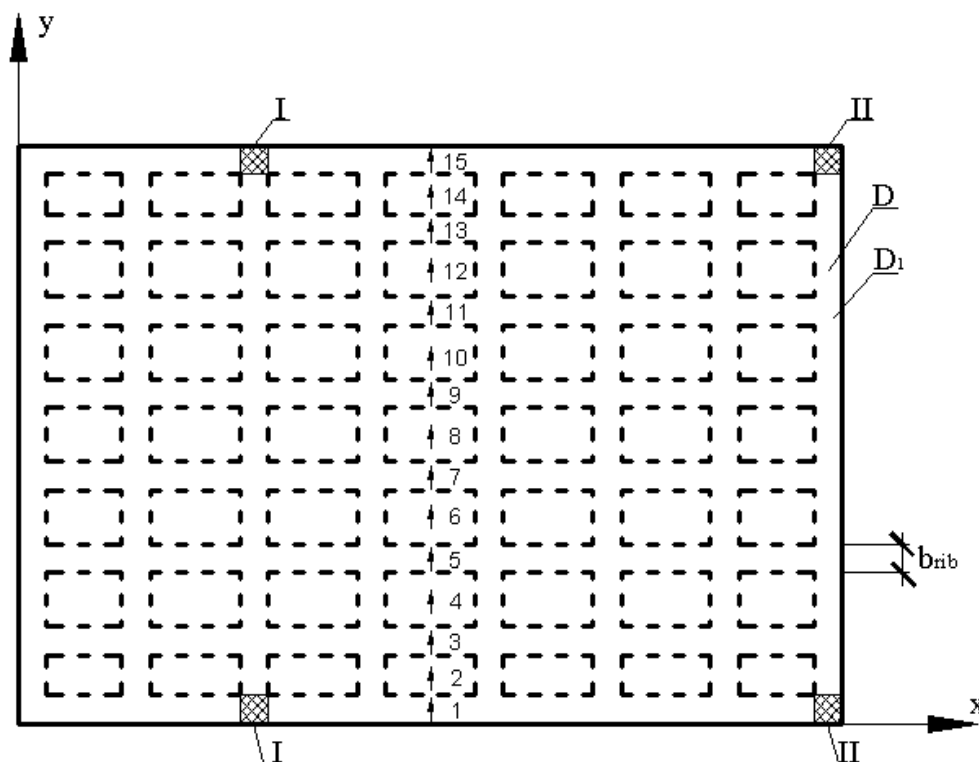


Рис. 2. Дискретизация системы на одномерные модули

Дифференциальное уравнение изгиба кессонного перекрытия в этом случае принимает вид [11]

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{\bar{q}}{D}, \quad (1)$$

где  $W = W(x, y)$  — прогиб;  $\bar{q} = \bar{q}(x, y)$  — свободный член уравнения, учитывающий не только внешние нагрузки, но и наличие подкрепляющих ребер в продольном направлении.

Применяя для (1) метод Канторовича-Власова, прогиб срединной плоскости пластинки будем искать в виде

$$W(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots + W_k(y)X_k(x).$$

Усечем ряд до одного члена и возьмем вариацию прогиба только по направлению  $y$ , что равносильно принятию расчетной схемы пластины, имеющей бесконечное число степеней свободы в одном направлении и одну степень свободы в другом направлении. Тогда прогиб точки срединной плоскости пластины будет

$$W(x, y) = W(y)X(x).$$

Функцию поперечного распределения прогибов пластины  $X(x)$  нужно выбирать так, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси  $x$ . Этому требованию в полной мере удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина, в направлении оси  $x$ .

В результате решение основного дифференциального уравнения задачи сводится к определению прогиба  $W(x, y)$ , где функция  $X(x)$  задана, а функция  $W(y)$  подлежит определению.

Вид фундаментальных функций зависит от граничных условий на продольных

кромках пластины и параметров ребер жесткости, и автоматически выбирается в программном режиме для соответствующих исходных данных из известных аналитических выражений [9].

Функция Грина также определяется выражением, полученным в [9].

Функции поперечного распределения прогибов  $X_1(x)$  для двух рассматриваемых вариантов граничных условий имеют следующий вид [9]:

при жестком защемлении обоих концов ребра

$$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1} - \text{sh} \frac{\omega x}{l_1} - \alpha_* \left[ \cos \frac{\omega x}{l_1} - \text{ch} \frac{\omega x}{l_1} \right]; \quad \alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}; \quad (2)$$

$$\omega_1 = 4,730; \quad \omega_2 = 7,859; \quad \omega_3 = 10,996;$$

при свободных концах ребра

$$X(x) = \sin \frac{\omega x}{l_1} + \text{sh} \frac{\omega x}{l_1} - \alpha_* \left[ \cos \frac{\omega x}{l_1} + \text{ch} \frac{\omega x}{l_1} \right]; \quad \alpha_* = \frac{\sin \omega - \text{sh} \omega}{\cos \omega - \text{ch} \omega}; \quad (3)$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = 4,730; \quad \omega_3 = 7,853.$$

Таким образом, имеем все необходимые зависимости для реализации алгоритма ЧА МГЭ. Сформируем векторы  $X_*$ ,  $Y$  и  $B$ . Поскольку область кессонной плиты дискретизируется на пятнадцать подобластей со ступенчатой жесткостью (рис. 2), каждый из этих векторов будет содержать 60 строк. Области с нечетными номерами — это пластины толщиной  $h$ , цилиндрическая жесткость которых

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu_y^2)}, \quad (4)$$

а области с четными номерами — пластины (без ребер), но толщиной  $h_1 = h + h_{ribx}$  с цилиндрической жесткостью

$$D = \frac{Eh_1^3}{12(1-\mu_1^2)}, \quad (5)$$

где

$\mu_1$  — усредненный коэффициент Пуассона пластины и ребра.

Матрицы ЧА МГЭ принимают вид

$$X_* = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} DW^{0-1}(0) = 0; \\ D\theta^{2-3}(a) \\ D\theta^{0-1}(0) \\ M^{0-1}(0) = 0; \\ Q^{2-3}(a) \\ Q^{0-1}(0) \\ D_1W^{1-2}(0) \\ D_1\theta^{1-2}(0) \end{matrix} ; Y = \begin{matrix} DW^{0-1}(a) = DW^{1-2}(0) \\ D\theta^{0-1}(a) = D\theta^{1-2}(0) \\ M^{0-1}(a) = M^{1-2}(0) \\ Q^{0-1}(a) = Q^{1-2}(0) \\ D_1W^{1-2}(b) = D_1W^{2-3}(0) \\ D_1\theta^{1-2}(b) = D_1\theta^{2-3}(0) \end{matrix} ; B = \begin{matrix} -B_{11}(a) \\ -B_{21}(a) \\ B_{31}(a) \\ B_{41}(a) \\ -b_{11}(b) \\ -b_{21}(b) \end{matrix} \quad (6)$$

7	$M^{1-2}(0)$	$M^{1-2}(b) = M^{2-3}(0)$	$b_{31}(b)$
8	$Q^{1-2}(0)$	$Q^{1-2}(b) = Q^{2-3}(0)$	$b_{41}(b)$
...	...	...	...
57	$DW^{14-15}(0)$	$DW^{14-15}(a) = 0$	$-B_{11}(a)$
58	$D\theta^{14-15}(0)$	$D\theta^{14-15}(a)$	$-B_{21}(a)$
59	$M^{14-15}(0)$	$M^{14-15}(a) = 0$	$B_{31}(a)$
60	$Q^{14-15}(0)$	$Q^{14-15}(a)$	$B_{41}(a)$

Из (6) следует, что в матрице фундаментальных функций (7) необходимо обнулить первый и третий столбцы. Далее параметры из вектора  $Y$  переносятся в вектор  $X_*$ .

Прогибы областей пластины с нечетными номерами определяются выражением

$$DW(x, y) = W(y) \cdot X(x) = [DW(0) \cdot A_{11}(y) + D\theta(0) \cdot A_{12}(y) - M(0) \cdot A_{13}(y) - Q(0) \cdot A_{14}(y) + B_{11}(y)] \cdot X(x). \quad (8)$$

Соответственно, прогибы областей с четными номерами (пластина с ребром в поперечном направлении)

$$D_1W(x, y) = W_1(y) \cdot X(x) = [D_1W(0) \cdot a_{11}(y) + D_1\theta(0) \cdot a_{12}(y) - M(0) \cdot a_{13}(y) - Q(0) \cdot a_{14}(y) + b_{11}(y)] \cdot X(x). \quad (9)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	...	57	58	59	60		
1		$A_{12}$		$-A_1$	$-\frac{D}{D_1}$				...					$D\theta^{2-3}(a)$	$-B_{11}^{0-1}(a)$
2		$A_{11}$		$-A_1$		$-\frac{D}{D_1}$			...					$D\theta^{0-1}(0)$	$-B_{21}^{0-1}(a)$
3		$-A_3$		$A_{12}$			-1		...					$Q^{2-3}(a)$	$B_{31}^{0-1}(a)$
4		$-A_3$		$A_{11}$				-1	...					$Q^{0-1}(0)$	$B_{41}^{0-1}(a)$
5					$a_{11}$	$a_{12}$	$-a_1$	$-a_1$	...	$-\frac{D}{D_1}$				$D_1W^{1-2}(0)$	$-b_{11}^{1-2}(b)$
6					$a_{21}$	$a_{22}$	$-a_1$	$-a_1$	...		$-\frac{D}{D_1}$			$D_1\theta^{1-2}(0)$	$-b_{21}^{1-2}(b)$
7					$-a_3$	$-a_3$	$a_{22}$	$a_{12}$	...				-1	$M^{1-2}(0)$	$b_{31}^{1-2}(b)$
8					$-a_4$	$-a_3$	$a_{32}$	$a_{11}$	...					$Q^{1-2}(0)$	$b_{41}^{1-2}(b)$

...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5							...	$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_1$	$-A_1$	$DW^{14-15}$	$-B_{11}^{14-15}$				
7							...	$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_1$	$-A_1$	$D\theta^{14-15}$	$-B_{21}^{14-15}$				
5	-						...	$-A_3$	$-A_3$	$A_{22}$	$A_{12}$	$M^{14-15}$	$B_{31}^{14-15}$				
8	1						...	$-A_4$	$-A_3$	$A_{32}$	$A_{11}$	$Q^{14-15}$	$B_{41}^{14-15}$				
9							...										
6		-					...										
0		1					...										

Численная реализация алгоритма выполнена в программе Scilab [12].

В результате расчета вычислены прогибы, углы поворотов, изгибающие моменты и поперечные силы в характерных точках кессонного перекрытия (рис. 3).

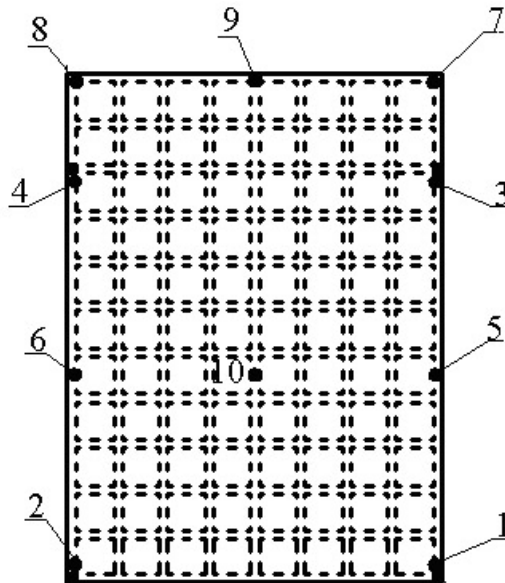


Рис. 3. Характерные точки перекрытия

Величины прогибов и изгибающих моментов даны в табл. 1, где приводятся также значения указанных компонентов напряженно-деформированного состояния, вычисленные методом конечных элементов в программах SCAD и ANSYS.

Таблица 1

**Сравнение результатов, полученных разными методами, и погрешность относительно ANSYS**

№ точек	Параметр	SCAD	ANSYS	ЧА МГЭ	Расхождение, %	
					SCAD	ЧА МГЭ
1	Прогиб, мм	-0,022	-0,021	-0,020	4,54	4,76
	Момент, кН·м	-59,024	-57,143	-53,222	3,19	6,86
2	Прогиб, мм	-0,021	-0,021	-0,020	0,00	4,76
	Момент, кН·м	-59,024	-57,142	-53,220	3,20	6,86
3	Прогиб, мм	-0,022	-0,022	-0,020	0,00	9,09
	Момент, кН·м	-92,149	-89,117	-86,321	3,29	3,14
4	Прогиб, мм	-0,022	-0,022	-0,020	0,00	9,09

	Момент, кН·м	-92,161	-89,114	-86,320	3,31	3,14
5	Прогиб, мм	-1,862	-1,874	-1,830	0,64	2,35
	Момент, кН·м	16,884	16,803	15,996	0,48	4,80
6	Прогиб, мм	-1,861	-1,875	-1,832	0,75	2,29
	Момент, кН·м	16,878	16,795	16,000	0,49	4,73
7	Прогиб, мм	0,080	0,088	0,092	9,09	4,35
	Момент, кН·м	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
8	Прогиб, мм	0,106	0,096	0,093	9,43	3,12
	Момент, кН·м	0,000	0,000	0,000	0,00	0,00
9	Прогиб, мм	-0,832	-0,845	-0,805	1,54	4,73
	Момент, кН·м	9,190	9,211	9,018	0,23	2,10
10	Прогиб, мм	-3,042	-3,120	-2,911	2,50	6,70
	Момент, кН·м	9,624	9,746	9,377	1,26	3,79

**Выводы.** Таким образом, применение численно-аналитического метода граничных элементов для расчета кессонных перекрытий позволяет получить результаты с приемлемой для инженерной практики точностью, но при этом не требует использования дорогостоящих специальных программ.

#### Список использованных источников

1. Сагадеев Р.А. Современные методы возведения монолитных и сборно-монолитных перекрытий: Учебное пособие / Р.А. Сагадеев — М.: ГОУ ДПО ГАСИС, 2008. — 35 с.
2. СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой СССР. — М.: 2004. — 161 с.
3. Пособие по расчету статически неопределимых железобетонных конструкций / М.: Стройиздат, 1975. — 192 с.
4. Байков В.Н. Железобетонные конструкции / В.Н. Байков, Э.Е. Сигалов. — М.: Стройиздат, 1991. — 767 с.
5. Александров А.В. Дискретная модель для расчета ортотропных пластин и оболочек / А.В. Александров. — Тр. МИИТ. — Вып. 364, 1971. — С. 3-10.
6. Дмитриенко Л.С. Расчет тонких пластин, подкрепленных ребрами жесткости / Л.С. Дмитриенко. — Изв. Киевского университета, вып. 1. — Киев, 1958. — С. 71-79.
7. Масленников А.М. Расчет ребристых перекрытий / А.М. Масленников. — Доклады XXIII научной конференции ЛИСИ. — Теорет. механ., сопр. матер., строит. механ. — Л., 1965. — С. 90-95.
8. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций / В.А. Постнов. — Л.: Судостроение, 1977. — 479 с.
9. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2-х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
10. Оробей В.Ф. Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Труды Санкт-Петербургского политехнич. ун-та / Инженерно-строительный журнал. — № 4 (22). — СПб, 2011. — С. 33-39.
11. Огибалов П.М. Оболочки и пластины / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов. — М.: Изд-во МГУ, 1969. — 695 с.
12. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. — М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269 с.



## РОЗРАХУНОК КЕСОННИХ ПЕРЕКРИТТІВ ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

ЧУЧМАЙ О.М., БАЛДУК П.Г., СУР'ЯНІНОВ Н.Г.

*Одеська державна академія будівництва та архітектури*

**Мета.** Розробка математичної моделі і алгоритму розрахунку кесонного перекриття на основі чисельно-аналітичного методу граничних елементів.

**Методика.** Початкове диференціальне рівняння і всі параметри напружено-деформованого стану перекриття, залежні від двох змінних, за допомогою методу Канторовича-Власова наводяться до рівняння і параметрів, що залежать від однієї змінної. Потім, відповідно до концепції використовуваного методу, перекриття розглядається як система одновимірних модулів.

**Наукова новизна.** Побудована гранично-елементна математична модель залізобетонного кесонного перекриття, на основі якої виконано розрахунок реальної конструкції.

**Практична значимість.** Використовуваний підхід дозволяє отримати для розглянутого класу конструкцій роздільну систему алгебраїчних рівнянь, яка на два порядки менше, ніж аналогічна система в методі скінченних елементів. Реалізація алгоритму не вимагає залучення дорогих сучасних програм інженерного аналізу.

**Ключові слова:** кесонне перекриття, метод граничних елементів, метод Канторовича-Власова, напруження, прогин, SCAD, ANSYS

## CALCULATION OF CAISSON CEILING NUMERICAL-ANALYTICAL BOUNDARY ELEMENT METHOD

CHUCHMAI A.M., BALDUK P.G., SURYANINOV N.G.

*Odessa State Academy of Construction and Architecture*

**Goal.** Development of a mathematical model and algorithm for calculating the caisson ceilings on the basis of numerical-analytical boundary element method.

**Methods.** The original differential equation and all the parameters of the stress-strain state overlap, depending on two variables, using the method of Kantorovich-Vlasov equation and given to the parameters that depend on one variable. Then, in accordance with the concept of the method used, the overlap is considered as a one-dimensional system modules.

**Scientific novelty.** For the first time built a boundary-element mathematical model reinforced concrete caisson ceiling, which is made on the basis of calculation of the actual design.

**Practical significance.** The approach allows to obtain for the class of structures the resolution of algebraic equations, which is two orders of magnitude smaller than a similar system in the finite element method. The implementation of the algorithm does not require costly advanced engineering analysis programs.

**Keywords:** caisson ceiling, boundary element method, method of Kantorovich-Vlasov, stress, deflection, SCAD, ANSYS