

УДК 69.04(075.8)

КРУТИЙ Ю.С., СУРЬЯНИНОВ Н.Г.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ  
УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ  
НЕПРЕРЫВНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ ПРИ  
ИДЕАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

**Цель.** Построение аналитического решения задачи об устойчивости стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью.

**Методика.** Применение метода прямого интегрирования с последующим выводом квадратурных формул для численной реализации найденных точных решений. Решение методом сравнения характеристических уравнений, соответствующих разным граничным условиям.

**Результаты.** Разработан новый аналитический метод исследования задач устойчивости.

**Научная новизна.** Получено аналитическое представление для продольной силы, содержащее безразмерный параметр  $K$ , названный нами коэффициентом устойчивости, вследствие чего задача отыскания критической силы для стержня с непрерывной жесткостью сводится к отысканию указанного коэффициента устойчивости путем последовательного вычисления вещественных корней характеристических многочленов.

**Практическая значимость.** Получено аналитическое решение уравнения продольного изгиба стержня с переменной поперечной жесткостью, сжатого постоянной осевой продольной силой. В аналитическом виде выписаны формулы для перемещений и внутренних усилий в произвольном сечении стержня. Эти формулы выражены через начальные параметры и пригодны для исследования устойчивости стержня при любых возможных граничных условиях. Математическая задача определения корней характеристических многочленов для отыскания коэффициентов устойчивости и определения критических сил хорошо изучена и не вызывает принципиальных затруднений. Для этого существует множество численных методов.

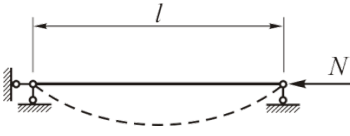
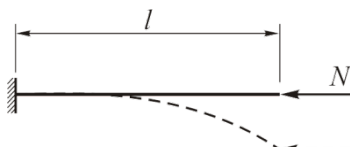
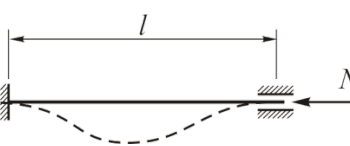
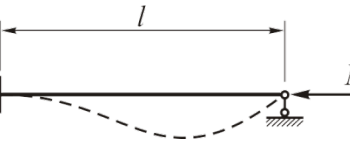
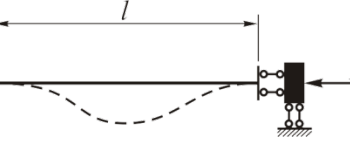
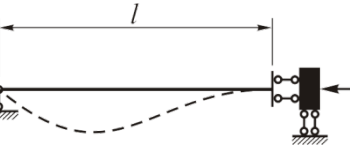
**Ключевые слова:** устойчивость, сжатый стержень, переменная жесткость, метод прямого интегрирования, коэффициент устойчивости, критическая сила

**Введение.** Эта статья является логическим продолжением материалов, опубликованных авторами в предыдущем номере журнала "Вісник Київського національного університету технологій та дизайну" [1], поэтому, на наш взгляд, не имеет смысла вновь говорить о важности поставленной проблемы, это достаточно подробно отражено в [1]. В процессе изложения материала мы будем опираться на формулы, теоремы и выводы, представленные в предыдущей статье. Не имея возможности приводить все формулы заново, условимся обозначать формулы из статьи [1] в виде (П.№), где № — порядковый номер формулы в нашей предыдущей работе.

**Постановка задачи.** *Характеристические уравнения и смежные искривленные формы равновесия стержня для идеальных граничных условий.* Рассмотрим шесть возможных случаев идеальных граничных условий [2, 3]. Соответствующие схемы и граничные условия представлены в табл. 1.

Таблиця 1

Шість випадків ідеальних граничних умов

Случай	Способ закрепления концов стержня		Схема	Граничные условия
	$x = 0$	$x = l$		
1	Шарнирно оперт	Шарнирно оперт		$y(0) = 0; M(0) = 0;$ $y(l) = 0; M(l) = 0.$
2	Заделан	Свободен		$y(0) = 0; \varphi(0) = 0;$ $M(l) = 0; Q(l) = 0.$
3	Заделан	Заделан		$y(0) = 0; \varphi(0) = 0;$ $y(l) = 0; \varphi(l) = 0.$
4	Заделан	Шарнирно оперт		$y(0) = 0; \varphi(0) = 0;$ $y(l) = 0; M(l) = 0.$
5	Заделан	Подвижная заделка		$y(0) = 0; \varphi(0) = 0;$ $\varphi(l) = 0; Q(l) = 0.$
6	Шарнирно оперт	Подвижная заделка		$y(0) = 0; M(0) = 0;$ $\varphi(l) = 0; Q(l) = 0.$

Для характеристических уравнений, соответствующих разным граничным условиям, примем единую форму записи

$$\gamma_0 - \gamma_1 K + \gamma_2 K^2 - \gamma_3 K^3 + \dots = 0, \quad (1)$$

где  $\gamma_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) – безразмерные строго положительные коэффициенты. Способ вычисления этих коэффициентов будет зависеть от граничных условий. Важно заметить, что левая часть характеристического уравнения (1) всегда будет представлять собой знакопеременный абсолютно сходящийся ряд.

Обозначим через  $K_1, K_2, K_3, \dots$  корни уравнения (1). Очевидно, если коэффициенты

уравнения (1) безразмерные, то и его корни будут безразмерными. После того как эти корни найдены и записаны в порядке возрастания, на основании (П.48) будем иметь значения продольной силы, при которых возможны смежные искривленные формы равновесия стержня

$$N_j = K_j \frac{E_0 I_0}{l^2} (j=1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$

Для искривленных форм равновесия также примем единое представление

$$y_j(x) = C_j Y_j \left( \frac{x}{l} \right) (j=1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

где  $C_j$  – постоянный множитель, который задает масштаб и размерность;

$Y_j \left( \frac{x}{l} \right)$  – безразмерная функция переменной  $\frac{x}{l}$ , которая определяет закон искривленной формы равновесия.

Предварительно заметим, что числа  $\alpha_{n,i}(l), \tilde{\alpha}_{n,i}(l) (i=0, 1, 2, \dots)$ , которые будут фигурировать ниже, являются безразмерными величинами, поскольку вычисляются как значения безразмерных функций в точке  $x=l$ . Кроме того, на основании леммы [1] и следствия из нее,  $\alpha_{n,i}(l) > 0, \tilde{\alpha}_{n,i}(l) > 0 (i=1, 2, 3, \dots)$ .

Учитывая, что функции  $X_n(x), \tilde{X}_n(x) (n=1, 2)$  помимо переменной  $x$ , зависят еще от параметра  $K$ , ниже в ситуациях, когда это важно подчеркнуть, будем писать  $X_n(x, K), \tilde{X}_n(x, K) (n=1, 2)$ .

**Результаты исследования. Случай 1.** Оба конца стержня шарнирно оперты:  $y(0)=0; M(0)=0; y(l)=0; M(l)=0$ . Будем исходить здесь из уравнения (П.4), т. е. используем формулу (П.46). Известно [4], что в данном случае для изгибающего момента справедливо равенство  $M(x) = -E_0 I_0 A(x) y''(x) = N y(x)$ . Отсюда легко заключаем, что из равенства нулю перемещений на концах стержня вытекает равенство нулю изгибающих моментов на этих концах и наоборот. Поэтому для удовлетворения всех заданных граничных условий достаточно потребовать равенства нулю на концах стержня, либо для перемещений, либо для изгибающих моментов.

Пусть  $y(0)=0, y(l)=0$ . Тогда с учетом первого условия формула (П.46) примет вид  $y(x) = l\varphi(0)X_2(x)$ . Второе условие дает равенство  $l\varphi(0)X_2(l) = 0$ . Если  $\varphi(0) = 0$ , то перемещения будут тождественно равны нулю. Такое решение, очевидно, соответствует первоначальному равновесному состоянию стержня, которое нас не интересует. Следовательно, приходим к характеристическому уравнению  $X_2(l, K) = 0$ , или

$$1 - \alpha_{2,1}(l)K + \alpha_{2,2}(l)K^2 - \alpha_{2,3}(l)K^3 + \dots = 0.$$

Это уравнение имеет вид (1), причем  $\gamma_i = \alpha_{2,i}(l) > 0 (i=0, 1, 2, \dots)$ .

Поскольку  $y(x) = l\varphi(0)X_2(x, K)$ , то искривленные формы равновесия стержня, соответствующие спектру критических сил  $N_j$ , даются формулой

$$y_j(x) = \varphi_j(0)l X_2(x, K_j) (j=1, 2, 3, \dots).$$

Эта формула согласуется с принятым представлением (3), причем, в данном случае

$$C_j = \varphi_j(0)l, Y_j \left( \frac{x}{l} \right) = X_2(x, K_j) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K_j^i \alpha_{2,i}(x).$$

Следует заметить, что такие же результаты можно получить, если исходить из уравнения (П.3), то есть вместо формулы (П.46) использовать формулы (П.43), (П.45). Действительно, на основании этих формул, реализуя заданные граничные условия, будем иметь систему:

$$\begin{cases} X_2(l)\varphi(0) - \frac{1-X_2(l)}{N}Q(0) = 0; \\ NX_2(l)\varphi(0) + X_2(l)Q(0) = 0. \end{cases}$$

Приравнявая к нулю определитель системы, получаем частотное уравнение  $X_2(l, K) = 0$ . Если это уравнение выполнено, то из первого уравнения системы вытекает, что  $Q(0) = 0$ . Тогда из равенства (П.43) получаем такую же формулу для перемещений, что была получена из формулы (П.46). В теории устойчивости рассмотренный случай граничных условий принято называть основным [4].

Выкладки, относящиеся к остальным случаям, опускаем. Итоговые формулы для всех шести случаев идеальных граничных условий представлены в разных форматах в табл. 2.

Строгое доказательство этой формулы оставляем за рамками изложения. Укажем только на один из возможных вариантов такого доказательства. Дифференцируя дважды обе части формулы (6), приходим к тождеству. Это будет означать, что левая часть формулы равна правой с точностью до произвольного многочлена первой степени. Однако, учитывая тот факт, что обе эти части вместе со своими первыми производными обращаются в ноль, когда  $x = 0$ , заключаем, что указанный многочлен есть тождественный ноль.

Вначале непосредственным двукратным интегрированием получаем

$$\alpha_{1,1}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{u^4} \alpha_{1,0}(x) dx dx = \frac{1}{3(1-\alpha)l} \left( \frac{l}{2(1-\alpha)} \left( \frac{1}{u^2} - 1 \right) - x \right) = u \left( \frac{1}{2!} \left( \frac{x}{lu} \right)^2 + \frac{1-\alpha}{3!} \left( \frac{x}{lu} \right)^3 \right).$$

Далее, пользуясь формулой (6), последовательно находим

$$\alpha_{1,i}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{u^4} \alpha_{1,i-1}(x) dx dx = u \left( \frac{1}{(2i)!} \left( \frac{x}{lu} \right)^{2i} + \frac{1-\alpha}{(2i+1)!} \left( \frac{x}{lu} \right)^{2i+1} \right) \quad (i = 2, 3, 4, \dots);$$

$$\alpha_{2,i}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{u^4} \alpha_{2,i-1}(x) dx dx = \frac{1}{(2i+1)!} u \left( \frac{x}{lu} \right)^{2i+1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

Согласно формуле (П.38) теперь будем иметь:

$$X_1(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K^i \alpha_{1,i}(x) = u \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K^i \left( \frac{1}{(2i)!} \left( \frac{x}{lu} \right)^{2i} + \frac{1-\alpha}{(2i+1)!} \left( \frac{x}{lu} \right)^{2i+1} \right) = u \left( \cos \sqrt{K} \frac{x}{lu} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} \frac{x}{lu} \right);$$

$$X_2(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K^i \alpha_{2,i}(x) = u \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} K^i \left( \frac{x}{lu} \right)^{2i+1} = \frac{u}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} \frac{x}{lu}.$$

Следовательно, в данном примере имеет место ситуация, когда фундаментальные решения предстают в виде элементарных функций.

По известным функциям  $X_1(x), X_2(x)$  на основании (П.42) находим

$$\tilde{X}_1(x) = (1-\alpha)^2 \frac{x}{lu} \cos \sqrt{K} \frac{x}{lu} - \left( \frac{(1-\alpha)^2}{\sqrt{K}} + \frac{\sqrt{K}}{u} \right) \sin \sqrt{K} \frac{x}{lu};$$

$$\tilde{X}_2(x) = \frac{1}{u} \cos \sqrt{K} \frac{x}{lu} - \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}} \sin \sqrt{K} \frac{x}{lu}.$$

Таблиця 2

Характеристические уравнения и законы искривленных форм равновесия стержня

Случай	В формате фундаментальных функций (j = 1, 2, 3, ...)	
	1	$X_2(l, K) = 0$
2	$X_1(l, K) = 0$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} (1 - X_1(x, K_j))$
3	$2 - X_1(l, K) + \tilde{X}_1(l, K) - \tilde{X}_2(l, K) = 0$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} \left( 1 - X_1(x, K_j) - \eta_j \left( \frac{x}{l} - X_2(x, K_j) \right) \right)$
4	$X_2(l, K) - X_1(l, K) = 0$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} \left( 1 - X_1(x, K_j) - \frac{x}{l} + X_2(x, K_j) \right)$
5	$\tilde{X}_1(l, K) = 0$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} (1 - X_1(x, K_j))$
6	$\tilde{X}_2(l, K) = 0$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = X_2(x, K_j)$
Случай	В формате образующих функций	
	$\gamma_i (i = 0, 1, 2, \dots)$	$(j = 1, 2, 3, \dots)$
1	$\gamma_i = \alpha_{2,i}(l)$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K_j^i \alpha_{2,i}(x)$
2	$\gamma_i = \alpha_{1,i}(l)$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} K_j^{i-1} \alpha_{1,i}(x)$
3	$\gamma_i = \tilde{\alpha}_{1,i+2}(l) - \alpha_{1,i+2}(l) - \tilde{\alpha}_{2,i+2}(l)$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} K_j^{i-1} (\alpha_{1,i}(x) - \eta_j \alpha_{2,i}(x))$
4	$\gamma_i = \alpha_{1,i+1}(l) - \alpha_{2,i+1}(l)$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} K_j^{i-1} (\alpha_{1,i}(x) - \alpha_{2,i}(x))$
5	$\gamma_i = \tilde{\alpha}_{1,i+1}(l)$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} K_j^{i-1} \alpha_{1,i}(x)$
6	$\gamma_i = \tilde{\alpha}_{2,i}(l)$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K_j^i \alpha_{2,i}(x)$

Зная  $X_1(x, K), X_2(x, K), \tilde{X}_1(x, K), \tilde{X}_2(x, K)$  и пользуясь табл. 2, можно выписать характеристические уравнения и законы смежных искривленных форм равновесия стержня для всех шести случаев граничных условий.

Проще всего обстоит дело, когда концы стержня шарнирно оперты (случай 1). Здесь характеристическое уравнение является элементарным:  $X_2(l, K) = \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0$ . Отсюда

$K_j = (\alpha \pi j)^2$  и на основании (2) имеем спектр критических сил  $N_j = (\alpha \pi j)^2 \frac{EI_0}{l^2}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

Наименьшая из них

$$N_{кр} = (\alpha \pi)^2 \frac{EI_0}{l^2}. \tag{7}$$

Закон для искривленных форм равновесия определится формулой:

$$Y_j \left( \frac{x}{l} \right) = X_2(x, K_j) = \frac{u}{\alpha \pi j} \sin \alpha \pi j \frac{x}{lu} \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Несколько сложнее выкладки в случае, когда концы стержня заделаны (случай 3). Несмотря на это, здесь также значение первой критической силы определяется точно. Соответствующее характеристическое уравнение принимает вид:

$$2 - X_1(l, K) + \tilde{X}_1(l, K) - \tilde{X}_2(l, K) = 2 - 2 \cos \frac{\sqrt{K}}{\alpha} - \frac{\sqrt{K}}{\alpha} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0.$$

После элементарных тригонометрических преобразований это уравнение оказывается равносильным совокупности двух уравнений:

$$\sin \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = 0; \quad (8)$$

$$\sin \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} - \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} \cos \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = 0. \quad (9)$$

Множество коэффициентов устойчивости получим, когда объединим корни каждого из этих уравнений в единое множество и упорядочим их по возрастанию. Как показывают вычисления, в указанном упорядоченном множестве на местах с нечетными номерами располагаются корни уравнения (8), а на местах с четными номерами находятся корни уравнения (9).

Поскольку уравнение (8) является элементарным, то коэффициенты устойчивости с нечетными номерами определяются точно:  $K_1 = (2\alpha\pi)^2$ ,  $K_3 = (4\alpha\pi)^2$ ,  $K_5 = (6\alpha\pi)^2, \dots$ . Следовательно, по формуле (2) точно определяются и критические силы с нечетными индексами. Наименьшая из них равна

$$N_{кр} = (2\alpha\pi)^2 \frac{E_0 I_0}{l^2}.$$

Для отыскания коэффициентов устойчивости с четными номерами  $K_2, K_4, K_6, \dots$  служит трансцендентное уравнение (9).

Пользуясь соответствующей формулой из табл. 2, для закона искривленных форм равновесия получим

$$Y_j \left( \frac{x}{l} \right) = \frac{1}{K_j} \left[ 1 - u \left( \cos \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} \right) - \eta_j \left( \frac{x}{l} - \frac{u}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} \right) \right]. \quad (10)$$

Определим здесь значения  $\eta_j (j = 1, 2, 3, \dots)$ .

$$\eta = \frac{1 - X_1(l, K)}{1 - X_2(l, K)} = \frac{1 - \alpha \left( \cos \frac{\sqrt{K}}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} \right)}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha}}.$$

После преобразований приходим к формуле

$$\eta = \frac{1 + tg^2 \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} - \alpha \left( 1 - tg^2 \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} + \frac{2(1-\alpha)}{\sqrt{K}} tg \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} \right)}{1 + tg^2 \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{\sqrt{K}} tg \frac{\sqrt{K}}{2\alpha}}. \quad (11)$$

Если  $K$  – корень уравнения (8), то  $tg \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = 0$ , а если  $K$  – корень уравнения (9), то

$\operatorname{tg} \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{K}}{2\alpha}$ . Подставляя значения тангенсов в формулу (11), находим, что в первом случае  $\eta = 1 - \alpha$ , во втором  $\eta = 1 + \alpha$ . Или  $\eta_1 = \eta_3 = \eta_5 = \dots = 1 - \alpha$ ,  $\eta_2 = \eta_4 = \eta_6 = \dots = 1 + \alpha$ .

Формула (10) теперь принимает разный вид в зависимости от четности либо нечетности индекса  $j$ . Для значений  $j = 1, 3, 5, \dots$

$$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{u}{((j+1)\alpha\pi)^2} \left(1 - \cos(j+1)\alpha\pi \frac{x}{lu}\right),$$

а для значений  $j = 2, 4, 6, \dots$

$$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} \left(1 - (1 + \alpha) \frac{x}{l} - u \left(\cos \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} - \frac{2\alpha}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu}\right)\right).$$

Выкладки, соответствующие остальным случаям граничных условий, а также процесс отыскания корней трансцендентных уравнений, опускаем. Заметим только, что для всех характеристических уравнений вычислены первые три корня, соответствующие значению  $\alpha$  с шагом 0,1. Результаты приведены в табл. 3.

Ясно, что и для любых других значений  $\alpha$  можно отыскать коэффициенты устойчивости.

Таблица 3

**Коэффициенты устойчивости**

Случай	Характеристическое уравнение	$\alpha$	$K_1$	$K_2$	$K_3$
1	$\sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0$	любо е	$(\alpha\pi)^2$	$(2\alpha\pi)^2$	$(3\alpha\pi)^2$
2	$\cos \frac{\sqrt{K}}{\alpha} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0$	0,1	0,0804	0,3269	0,7497
		0,2	0,2643	1,1466	2,7575
		0,3	0,4979	2,3765	5,9536
		0,4	0,7566	4,0058	10,3387
		0,5	1,0289	6,0348	15,9148
		0,6	1,3093	8,4647	22,6829
		0,7	1,5947	11,2962	30,6438
		0,8	1,8835	14,5302	39,7976
		0,9	2,1746	18,1669	50,1447
		1	$(\pi/2)^2$	$(3\pi/2)^2$	$(5\pi/2)^2$
3	$\begin{cases} \sin \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = 0; \\ \sin \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} - \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} \cos \frac{\sqrt{K}}{2\alpha} = 0. \end{cases}$	0,1	$(2\alpha\pi)^2$	0,80763	$(4\alpha\pi)^2$
		0,2		3,23052	
		0,3		7,26866	
		0,4		12,9221	
		0,5		20,1907	
		0,6		29,0746	
		0,7		39,5738	
		0,8		51,6883	
		0,9		65,4179	
		1		80,7629	
4	$\cos \frac{\sqrt{K}}{\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{K}} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0$	0,1	0,2019	0,5968	1,1889
		0,2	0,8076	2,3872	4,7559
		0,3	1,8172	5,3711	10,7009

		0,4	3,2305	9,5487	19,0239
		0,5	5,0477	14,9199	29,7249
		0,6	7,2687	21,4846	42,8039
		0,7	9,8934	29,2429	58,2609
		0,8	12,9221	38,1949	76,0959
		0,9	16,3545	48,3404	96,3089
		1	20,1907	59,6795	118,899
5	$\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \cos \frac{\sqrt{K}}{\alpha} - \left( \frac{(1-\alpha)^2}{\sqrt{K}} + \frac{\sqrt{K}}{\alpha} \right) \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0$	0,1	0,1656	0,4987	1,0131
		0,2	0,5622	1,7969	3,7890
		0,3	1,1214	3,8258	8,2781
		0,4	1,8315	6,5936	14,4952
		0,5	2,6994	10,1145	22,4543
		0,6	3,7375	14,4022	32,1686
		0,7	4,9596	19,4698	43,6507
		0,8	6,3800	25,3301	56,9129
		0,9	8,0123	31,9955	71,9674
				1	$\pi^2$
6	$\frac{1}{\alpha} \cos \frac{\sqrt{K}}{\alpha} - \frac{1-\alpha}{\sqrt{K}} \sin \frac{\sqrt{K}}{\alpha} = 0$	0,1	0,0029	0,2039	0,5988
		0,2	0,0231	0,8237	2,4032
		0,3	0,0763	1,8715	5,4253
		0,4	0,1773	3,35943	9,6770
		0,5	0,3396	5,29970	15,1706
		0,6	0,5755	7,7044	21,9179
		0,7	0,8963	10,5856	29,9311
		0,8	1,3124	13,9552	39,2220
		0,9	1,8332	17,8250	49,8027
				1	$(\pi/2)^2$

При этом в первом и частично во втором случаях нет нужды снова обращаться к решению характеристических уравнений, так как здесь зависимость коэффициентов устойчивости от значения параметра  $\alpha$  выражена не таблично, а аналитически. Чтобы и в других случаях в будущем всякий раз можно было обойтись без решения характеристического уравнения, возникает идея выразить найденную табличную зависимость между параметрами  $K$  и  $\alpha$  аналитически.

Рассматривая коэффициент устойчивости  $K$  как функцию переменной  $\alpha$ , а также, имея множество значений этой функции, соответствующих значениям независимой переменной  $0 < \alpha \leq 1$ , аппроксимируем функцию  $K$  многочленом.

Как известно, качество аппроксимации характеризуется так называемым коэффициентом детерминации  $R_d^2$ , где  $d$  – степень искомого многочлена. Коэффициент детерминации изменяется от 0 до 1. На практике, когда коэффициент детерминации близок к единице, это указывает на то, что модель вполне адекватно отражает свойства исходного объекта.

Стандартную процедуру построения аппроксимации и сопутствующие ей вычисления опускаем. Заметим только, что степень аппроксимирующего многочлена выбиралась из условия, что коэффициент детерминации не должен быть меньше, чем 0,9999. Например, во втором случае граничных условий, выбирая  $d = 2$ , будем иметь  $K_1 = -0,1655 + 2,1281\alpha + 0,5214\alpha^2$  и  $R_2^2 = 0,999599$ , что меньше заданного. Для значения  $d = 3$  получим



$K_1 = -0,0933 + 1,4877\alpha + 1,9099\alpha^2 - 0,8415\alpha^3$  и  $R_3^2 = 0,999954$ . Поскольку  $R_3^2$  больше заданного, то дальнейшие вычисления не требуются.

В табл. 4 в аналитическом виде приведены три первых коэффициента устойчивости и законы искривленных форм равновесия стержня.

Таким образом, для шести случаев идеальных граничных условий задача устойчивости для множества однородных стержней, момент инерции которых описывается законом (4), полностью решена. Заметим, что когда  $\alpha = 1$ , приходим к стержню постоянной жесткости. Как видно из табл. 3, 4, коэффициенты устойчивости и искривленные формы равновесия, соответствующие такому значению  $\alpha$  полностью совпадают с известными результатами для однородного стержня постоянного сечения [3]. Примером стержня, момент инерции которого описывается формулой (4), может служить усеченный конус с радиусами оснований  $R, r$  ( $R \geq r, r \neq 0$ ) (рис. 1, а). В таком случае  $I_0 = \frac{\pi R^4}{4}, \alpha = \frac{r}{R}$ .

Таблица 4

**Итоговые результаты**

Случай	Аналитическое представление коэффициентов устойчивости	Законы искривленных форм равновесия ( $j = 1, 2, 3, \dots$ )
1	$K_j = (\alpha\pi j)^2 \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{u}{\alpha\pi j} \sin \alpha\pi j \frac{x}{lu}$
2	$K_1 = -0,0933 + 1,4877\alpha + 1,9099\alpha^2 - 0,8415\alpha^3$ $K_2 = -0,0973 + 2,2203\alpha + 20,0823\alpha^2$ $K_3 = -0,0573 + 2,1475\alpha + 59,5921\alpha^2$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} \left( 1 - u \left( \cos \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} \right) \right)$
3	$K_1 = (2\alpha\pi)^2$ $K_2 = 0,0001\alpha + 80,7626\alpha^2 + 0,0002\alpha^3$ $K_3 = (4\alpha\pi)^2$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{u}{((j+1)\alpha\pi)^2} \left( 1 - \cos(j+1)\alpha\pi \frac{x}{lu} \right) \quad (j = 1, 3, 5, \dots)$ $Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} \left( 1 - (1+\alpha) \frac{x}{l} - u \left( \cos \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} - \frac{2\alpha}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} \right) \right)$ $(j = 2, 4, 6, \dots)$
4	$K_1 = 0,0001\alpha + 20,1906\alpha^2$ $K_2 = -0,0001\alpha + 59,6796\alpha^2$ $K_3 = 0,0003 - 0,0038\alpha + 118,9101\alpha^2 - 0,0073\alpha^3$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} \left( 1 - \frac{x}{l} - u \left( \cos \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} - \frac{\alpha}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} \right) \right)$
5	$K_1 = -0,1245 + 2,2349\alpha + 5,8546\alpha^2 + 1,9012\alpha^3$ $K_2 = 0,0986 + 0,6762\alpha + 38,6495\alpha^2$ $K_3 = 0,1273 + 0,6042\alpha + 88,0416\alpha^2$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{K_j} \left( 1 - u \left( \cos \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} + \frac{1-\alpha}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu} \right) \right)$
6	$K_1 = 0,0152 - 0,1987\alpha + 0,7521\alpha^2 + 1,9006\alpha^3$ $K_2 = 0,1725 - 1,5321\alpha + 23,5160\alpha^2$ $K_3 = 0,1719 - 1,5256\alpha + 62,9883\alpha^2$	$Y_j\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{u}{\sqrt{K_j}} \sin \sqrt{K_j} \frac{x}{lu}$

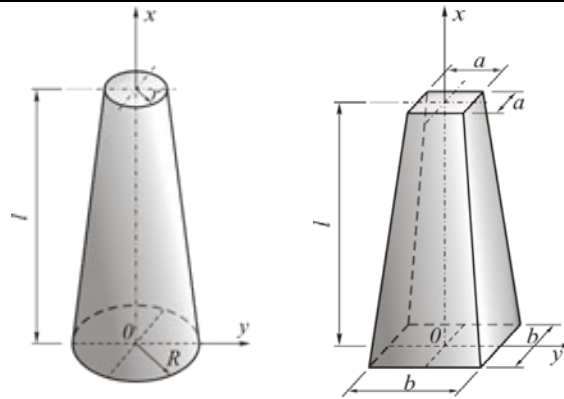


Рис. 1. Усеченный конус и пирамида

Другим примером будет стержень в виде усеченной пирамиды, в основаниях которой лежат квадраты со сторонами  $a, b$  ( $a \leq b, a \neq 0$ ) (рис. 1, б). В этом случае  $I_0 = \frac{b^4}{12}, \alpha = \frac{a}{b}$ .

Существуют и другие частные случаи непрерывного изменения жесткости, когда характеристические уравнения и смежные искривленные формы равновесия стержня выражаются посредством элементарных или специальных функций. Ход решения в таких ситуациях, по сути, будет аналогичным рассмотренному примеру. Однако, с точки зрения общности результатов исследования, гораздо важнее указать эффективный способ численной реализации для найденных точных формул, который был бы пригодным для любой непрерывной жесткости. Наличие такого способа придаст еще большую практическую ценность найденным точным решениям и в конечном итоге позволит сформулировать новый метод исследования стержней на устойчивость.

**Разрешимость характеристического уравнения в общем случае.** Исследуем характеристическое уравнение общего вида (1) на разрешимость.

Как видно из табл. 2, левая часть характеристического уравнения представляет собой значение одной из функций  $X_1(x, K), X_2(x, K), \tilde{X}_1(x, K), \tilde{X}_2(x, K)$  или их линейных комбинаций в точке  $x=l$ . Напомним, что эти функции определены абсолютно и равномерно сходящимися функциональными рядами. Отсюда, в частности, вытекает сходимость в точке  $x=l$ . Вследствие этого знакпеременный числовой ряд в левой части характеристического уравнения (1) всегда абсолютно сходится.

Очевидно, в случае отрицательного значения параметра  $K$ , левая часть (1) является суммой положительных чисел, а значит, никогда не равна нулю. Поэтому уравнение (1) не может иметь отрицательных корней. Очевидно, что и число ноль также не может быть корнем. Таким образом, корнями могут быть либо вещественные строго положительные числа, либо комплексные числа.

Из сходимости ряда в левой части уравнения следует, что какой сколь угодно малой ни была бы задана точность  $\varepsilon$  для вычисления корня, ее всегда можно достичь, удерживая некоторое конечное число  $m+1$  первых членов ряда и пренебрегая остальными, которые в силу своей малости, практически не будут влиять на значение корня. В результате такой процедуры, для неизвестного  $K$  получим приближенное характеристическое уравнение, которое будет представлять собой алгебраическое уравнение степени  $m$  с вещественными коэффициентами

$$f_m(K) = 1 - \gamma_1 K + \gamma_2 K^2 - \gamma_3 K^3 + \dots + (-1)^m \gamma_m K^m = 0. \quad (12)$$

Многочлен  $f_m(K)$  будем называть характеристическим. Согласно теореме Декарта [6], число положительных корней многочлена, засчитываемых каждый столько раз, какова его кратность, равно числу перемен знаков в системе коэффициентов этого многочлена или меньше этого числа на четное число. Число перемен знаков многочлена  $f_m(K)$ , очевидно, равно  $m$ . Следовательно, выбирая значение  $m$  нечетным, мы гарантируем наличие как минимум одного положительного корня уравнения (12).

Итак, для всех шести случаев идеальных граничных условий при любой непрерывной переменной жесткости стержня, характеристическое уравнение, определяемое единой формулой (1), всегда приближенно разрешимо на множестве вещественных строго положительных чисел.

**Численная реализация точных решений.** Перейдем теперь к вопросу эффективной численной реализации построенных выше точных решений в общем случае непрерывной переменной жесткости.

Исходными здесь будут формулы табл. 2, заданные в формате образующих функций  $\alpha_{n,i}(x)$  ( $n=1,2$ ) ( $i=1,2,3,\dots$ ). Поэтому актуальна задача численной реализации формул, которыми эти функции определены. Для решения этой задачи выведем необходимые квадратуры.

Один из классических методов численного интегрирования основан на замене подынтегральной функции ее аппроксимирующим многочленом. Такая идея оказывается плодотворной и в нашем случае, в первую очередь потому, что позволяет избежать многократного численного интегрирования, предписанного формулой (П.36). Это особенно важно с точки зрения будущей программной реализации метода.

Итак, аппроксимируем безразмерную функцию  $\frac{1}{A(x)}$  многочленом

$$\frac{1}{A(x)} = A_0 + A_1 \left(\frac{x}{l}\right) + A_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + A_s \left(\frac{x}{l}\right)^s, \quad (13)$$

где  $A_j$  ( $j=0,1,\dots,s$ ) – безразмерные коэффициенты. Тогда на основании (П.36) заключаем, что  $\alpha_{n,i}(x)$  ( $n=1,2$ ) ( $i=1,2,3,\dots$ ) также многочлен. Поскольку формула (П.36) содержит всего  $2i$  интегралов, то наибольшая степень этого многочлена будет равна  $is + 2i + n - 1$ , а наименьшая  $2i + n - 1$ . Но тогда  $\alpha_{n,i}(x)$  можно представить в виде

$$\alpha_{n,i}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+n-1} \sum_{j=0}^{is} d_{i,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j, \quad (14)$$

где  $d_{i,j}^{(n)}$  – коэффициенты, подлежащие определению.

Из формул (П.35), (П.40) вытекают представления:

$$\tilde{\alpha}_{n,i}(x) = \frac{1}{l} \int_0^x \frac{1}{A(x)} \alpha_{n,i-1}(x) dx; \quad \alpha_{n,i}(x) = \frac{1}{l} \int_0^x \tilde{\alpha}_{n,i}(x) dx. \quad (15)$$

В соответствии с первой из формул (15), найдем произведение многочленов  $\frac{1}{A(x)}$  и  $\alpha_{n,i-1}(x)$ , после чего результат проинтегрируем. Для произведения будем иметь

$$\frac{1}{A(x)} \alpha_{n,i-1}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+n-3} \sum_{j=0}^{is} e_{i-1,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j,$$

где  $e_{i-1,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^j A_{j-k} d_{i-1,k}^{(n)}$ , причем  $A_{j-k} = 0$ , если  $j-k > s$  и  $d_{i-1,k}^{(n)} = 0$ , если  $k > (i-1)s$ . Тогда

$$\tilde{\alpha}_{n,i}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+n-2} \sum_{j=0}^{is} \frac{e_{i-1,j}^{(n)}}{2i+j+n-2} \left(\frac{x}{l}\right)^j. \quad (16)$$

Далее на основании второй из формул (15) находим

$$\alpha_{n,i}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+n-1} \sum_{j=0}^{is} \frac{e_{i-1,j}^{(n)}}{(2i+j+n-2)(2i+j+n-1)} \left(\frac{x}{l}\right)^j.$$

Сопоставляя последнюю формулу с представлением (14), получаем

$$d_{i,j}^{(n)} = \frac{e_{i-1,j}^{(n)}}{(2i+j+n-2)(2i+j+n-1)} \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (j=0,1,\dots, is). \quad (17)$$

Исключая здесь параметр  $e_{i-1,j}^{(n)}$ , окончательно приходим к формуле:

$$d_{i,j}^{(n)} = \frac{\sum_{k=0}^j A_{j-k} d_{i-1,k}^{(n)}}{(2i+j+n-2)(2i+j+n-1)} \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (j=0,1,\dots, is). \quad (18)$$

Полученная формула является рекуррентной, то есть каждое следующее значение  $d_{i,j}^{(n)}$  вычисляется через предыдущее. Поэтому следует указать начальное значение  $d_{0,0}^{(n)}$ .

Если распространить (14) на случай  $i=0$ , получим  $\alpha_{n,0}(x) = d_{0,0}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1}$ . Сравнивая это выражение с первой из формул (П.35), находим  $d_{0,0}^{(n)} = 1$ . После этого формула (18) становится вполне определенной, и все коэффициенты  $d_{i,j}^{(n)}$  можно считать известными. Особо подчеркнем, что эти коэффициенты безразмерные, поскольку вычисляются через безразмерные величины  $A_j$  ( $j=0,1,\dots,s$ ).

Представление (16) с учетом (17) перепишем в виде

$$\tilde{\alpha}_{n,i}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+n-2} \sum_{j=0}^{is} \tilde{d}_{i,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j, \quad (19)$$

где  $\tilde{d}_{i,j}^{(n)} = (2i+j+n-1)d_{i,j}^{(n)}$ . Равенство (19) также можно распространить на случай  $i=0$ , поскольку при этом получим верную формулу  $\tilde{\alpha}_{n,0}(x) = \tilde{d}_{0,0}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-2} = (n-1) d_{0,0}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-2} = n-1$ .

Таким образом, для функций  $\alpha_{n,i}(x), \tilde{\alpha}_{n,i}(x)$  ( $n=1,2$ ) ( $i=1,2,3,\dots$ ) получены их представления через многочлены (14) и (19) соответственно. После этого для фундаментальных решений  $X_n(x)$  ( $n=1,2$ ), а также для функций  $\tilde{X}_n(x)$  ( $n=1,2$ ), будем иметь:

$$X_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i K^i \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+n-1} \sum_{j=0}^{is} d_{i,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j; \quad (20)$$

Таблица 5

**Коэффициенты характеристических многочленов**

Случай	$\gamma_i$ ( $i=0,1,2,\dots$ )
1	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{is} d_{i,j}^{(2)}$
2	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{is} d_{i,j}^{(1)}$
3	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{(i+2)s} \left( \tilde{d}_{i+2,j}^{(1)} - d_{i+2,j}^{(1)} - \tilde{d}_{i+2,j}^{(2)} \right)$

4	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{(i+1)s} (d_{i+1,j}^{(1)} - d_{i+1,j}^{(2)})$
5	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{(i+1)s} \tilde{d}_{i+1,j}^{(1)}$
6	$\gamma_i = \sum_{j=0}^{is} \tilde{d}_{i,j}^{(2)}$

$$\tilde{X}_n(x) = n - 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i K^i \left(\frac{x}{l}\right)^{2i+n-2} \sum_{j=0}^{is} \tilde{d}_{i,j}^{(n)} \left(\frac{x}{l}\right)^j. \quad (21)$$

Обратимся к характеристическому уравнению (1). Согласно формулам табл. 2, его коэффициенты вычисляются посредством чисел  $\alpha_{n,i}(l), \tilde{\alpha}_{n,i}(l)$  ( $n=1,2$ )( $i=0,1,2,\dots$ ), которые теперь можно легко определить. Полагая  $x=l$  в представлениях (14), (19), получим

$$\alpha_{n,i}(l) = \sum_{j=0}^{is} d_{i,j}^{(n)}; \quad \tilde{\alpha}_{n,i}(l) = \sum_{j=0}^{is} \tilde{d}_{i,j}^{(n)} \quad (n=1,2)(i=0,1,2,\dots).$$

После того как нужные числа найдены, исходя из табл. 2, можно выписать окончательные формулы для коэффициентов характеристических многочленов. Они представлены в табл. 5.

Уравнения типа (1), в которых левая часть представляет собою сходящийся ряд, часто встречаются в строительной механике. В подобных ситуациях оценка погрешности решения проводится путем сравнения результатов расчета с различным числом удерживаемых членов ряда [7]. Остановимся на этой процедуре подробнее применительно к нашему случаю.

Пусть  $K_1^{(m)}, K_1^{(m+2)}$  – наименьшие положительные корни многочленов  $f_m(K), f_{m+2}(K)$  соответственно. Если для некоторого текущего значения  $m=1,3,5,\dots$  будет выполнено условие  $|K_1^{(m+2)} - K_1^{(m)}| < \varepsilon$ , то полагаем, что первый корень уравнения (1) найден, а именно  $K_1 = K_1^{(m)}$ . Точность вычисления этого корня равна  $\varepsilon$ .

Поступая аналогично, можно определить требуемое количество следующих по возрастанию корней  $K_1, K_2, K_3, \dots$  уравнения (1) с заданной точностью. Здесь полагаем  $K_j = K_j^{(m)}$  ( $j=1,2,3,\dots$ ) при условии, что

$$|K_j^{(m+2)} - K_j^{(m)}| < \varepsilon. \quad (22)$$

Следует заметить, что заданная точность при вычислении разных корней будет достигаться, вообще говоря, при разных значениях  $m$ .

Описанная процедура сводит отыскание коэффициентов устойчивости к последовательному вычислению вещественных корней характеристических многочленов  $f_m(K), f_{m+2}(K)$ . Такая математическая задача хорошо изучена и не может вызывать принципиальных затруднений. Для вычисления корней многочленов существует целое множество численных методов и программных возможностей.

**Алгоритм метода прямого интегрирования в задачах устойчивости.** В конечном итоге имеем новый метод расчета стержней на устойчивость. Здесь мы сформулируем его применительно к рассмотренному случаю стержня с произвольной непрерывной переменной жесткостью, сжатого постоянной продольной силой.

Метод основан на точном решении уравнения равновесия и способе его численной реализации. Указанный способ определяется следующим алгоритмом:

1. Аппроксимируем заданную функцию  $\frac{1}{A(x)}$  многочленом (13). При этом степень аппроксимирующего многочлена  $s$  выбираем в каждом конкретном случае из условия адекватного приближения.

2. Для текущего значения  $m = 1, 3, 5, \dots$  вычисляем по соответствующей формуле из табл. 5 коэффициенты характеристического многочлена  $\gamma_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m+2$ ). При этом для каждого значения  $i$  вначале вычисляем числа  $d_{i,j}^{(n)}$  ( $j = 0, 1, \dots, is$ ), применяя формулу (19). Формируем пару многочленов  $f_m(K)$  и  $f_{m+2}(K)$ .

3. С заданной точностью  $\varepsilon$  находим корни  $K_j^{(m)}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) многочлена  $f_m(K)$ , удовлетворяющие условию (22). Найденные корни записываем в порядке возрастания  $K_1^{(m)}, K_2^{(m)}, K_3^{(m)}, \dots$ . После этого для корней характеристического уравнения (1) полагаем  $K_j = K_j^{(m)}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ).

4. Подставляя найденные значения коэффициентов устойчивости в формулу (2) и в соответствующую формулу табл. 2, получим критические силы и соответствующие им законы искривленных форм равновесия стержня.

При необходимости по формулам (П.44), (П.45), (П.33), (20), (21) находим другие параметры состояния стержня. При этом формулы (20), (21) для вычислений можно заменить приближенными, удерживая в них некоторое конечное число первых членов ряда и пренебрегая остальными.

Важно заметить следующее. Хотя теорема Декарта гарантирует наличие положительного корня только у многочлена нечетной степени, практика вычислений при решении данного класса задач показывает, что и при четном значении  $m$  многочлен  $f_m(K)$  почти всегда обладает положительным корнем. Случаи отсутствия положительного корня составляют редкое исключение. Поэтому на практике возможно применение описанной процедуры отыскания корня путем сравнения корней многочленов  $f_m(K)$  и  $f_{m+1}(K)$  для значений  $m = 1, 2, 3, \dots$ . А если при каком-то четном значении  $m$  нужного корня все же не существует, то такой случай можно просто исключить из рассмотрения и перейти к следующему  $m$ .

Для указанного алгоритма разработано программное обеспечение.

Следует особо отметить, что при реализации указанного алгоритма есть возможность управлять точностью вычислений. Вообще говоря, алгоритмом заложены два источника погрешности. Первый из них – это погрешность аппроксимации. Эту погрешность можно нивелировать, поскольку за счет выбора нужной степени аппроксимации всегда можно достичь желаемой точности приближения. Второй источник погрешности – это погрешность вычисления корней характеристического уравнения. Реализуя здесь указанный выше метод сравнения результатов вычисления корня с различным числом членов убывающего ряда, всегда можно добиться желаемой точности вычислений  $\varepsilon$  за счет надлежащего выбора параметра  $m$ .

Для оценки точности предлагаемого метода в программном режиме вычислялся коэффициент устойчивости для ряда случаев, когда его точное значение известно наперед. Сравнение вычисленных и точных значений коэффициента устойчивости указывают на высокую точность метода. При этом практика вычислений показывает, что можно добиться

скільки угодно малої погрешності між точними та обчислюваними значеннями, вибираючи належним чином параметри  $s$  та  $\varepsilon$ .

Наприклад, у розглянутому вище випадку, для якого справедлива формула (7), точне значення коефіцієнта стійкості, коли  $\alpha = 0,5$  буде рівно  $K = (\alpha\pi)^2 = 2,46740110$ . Цей же коефіцієнт стійкості, обчислений у програмному режимі при значеннях  $s = 4$  та  $\varepsilon = 0,001$ , дорівнює  $K = K_1^{(5)} = 2,469778461$ . Відносна погрешність у цьому випадку не перевищує 0,1%.

**Висновки.** Розв'язано задачу стійкості рівноваги стержня з довільною неперервною змінною жорсткістю. Проінтегровано диференціальне рівняння продольного вигину; у аналітичному вигляді записано всі необхідні формули, що характеризують напружено-деформоване стан стержня; отримано аналітичне представлення для критичної сили; вказано ефективний метод чисельної реалізації знайдених точних рішень; сформульовано алгоритм нового методу дослідження стержня на стійкість, який допускає просту програмну реалізацію.

#### Список використаної літератури

1. Крутий Ю.С. Точне рішення диференціального рівняння стійкості рівноваги пружного стержня з довільною неперервною змінною жорсткістю / Ю.С. Крутий, Н.Г. Сур'янінов — Вісник КНУТД. — Київ, 2015, вип. 6(92). — С. 129-139.
2. Перельмутер А.В.. Стійкість рівноваги конструкцій та родствених проблеми / А.В. Перельмутер, В.І. Сливкер — М.: Видавництво СКАД СОФТ — Т. 1., 2007. — 670 с.
3. Баженов В.А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології / В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов — К.: Каравела, 2009. — 696 с.
4. Киселев В.А. Будівельна механіка / В.А. Киселев — М.: Стройиздат, 1980. — 616 с.
5. Смирнов А.Ф. Будівельна механіка. Динаміка та стійкість споруд / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашенков, Н.Н. Шапошников — М.: Стройиздат, 1984. — 416 с.
6. Курош А.Г. Курс вищої алгебри / А.Г. Курош — М.: Видавництво «Наука», 1968. — 431 с.
7. Ильин В.П. Чисельні методи рішення задач будівельної механіки / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников — Мн.: Вишэйшая школа, 1990. — 349 с.

#### АНАЛІТИЧНЕ РІШЕННЯ РІВНЯННЯ СТІЙКОСТІ СТЕРЖНЯ З ДОВІЛЬНОЮ БЕЗПЕРЕРВНОЮ ЗМІННОЮ ЖОРСТКІСТЮ ЗА ІДЕАЛЬНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ

КРУТИЙ Ю.С., СУР'ЯНІНОВ М.Г.

Одеська державна академія будівництва та архітектури

**Мета.** Побудова аналітичного рішення задачі про стійкість стержня з довільною безперервною змінною жорсткістю.

**Методика.** Застосування методу прямого інтегрування з подальшим виведенням квадратурних формул для чисельної реалізації знайдених точних рішень. Рішення методом

порівняння характеристичних рівнянь, що відповідають різних граничних умов.

**Результати.** Розроблено новий аналітичний метод дослідження задач стійкості.

**Наукова новизна.** Отримано аналітичне подання для поздовжньої сили, що містить безрозмірний параметр, названий нами коефіцієнтом стійкості, внаслідок чого завдання відшукування критичної сили для стержня з безперервною жорсткістю зводиться до відшукування зазначеного коефіцієнта стійкості шляхом послідовного обчислення дійсних коренів характеристичних многочленів.

**Практична значимість.** Отримано точний аналітичний розв'язок диференціального рівняння поздовжнього вигину стрижня зі змінною поперечною жорсткістю, стисненого постійною осьювою поздовжньою силою. В аналітичному вигляді вписані формули для переміщень і внутрішніх зусиль в довільному перерізі стрижня. Ці формули виражені через початкові параметри і придатні для дослідження стійкості стрижня при будь-яких можливих граничних умовах. Математична задача визначення коренів характеристичних многочленів для відшукування коефіцієнтів стійкості і подальшого визначення критичних сил добре вивчена і не викликає принципових труднощів. Для цього існує ціла безліч чисельних методів і програмних можливостей.

**Ключові слова:** *стійкість, стиснений стержень, змінна жорсткість, метод прямого інтегрування, коефіцієнт стійкості, критична сила*

## **ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE STABILITY OF BARS WITH ARBITRARY CONTINUOUS VARIABLE STIFFNESS IDEAL BOUNDARY CONDITIONS**

KRUTIY J.U.S., SURIANINOV N.G.

*Odessa State Academy of Construction and Architecture*

**Goal.** Construction of analytical solution of the problem of stability of the rod with an arbitrary continuous variable stiffness.

**Methods.** Application of the method of direct integration with the subsequent withdrawal of quadrature formulas for numerical realization of exact solutions found. The decision by comparing the characteristic equations corresponding to different boundary conditions.

**Results.** A new analytical method for the study of stability problems.

**Scientific novelty.** An analytical representation of the longitudinal force, containing a dimensionless parameter called us a factor of stability, so that the problem of finding the critical force for a rod with a continuous stiffness is reduced to finding the specified rate stability through the consistent calculation of real roots of the characteristic polynomial.

**Practical significance.** An exact analytical solution of the differential equation of buckling rod with variable lateral stiffness, compressed constant axial longitudinal force. The analytical form of written formulas for the displacements and internal forces in an arbitrary section of the rod. These formulas are expressed in terms of the initial parameters and are suitable for investigating the stability of the rod at all possible boundary conditions. The mathematical problem of determining the roots of the characteristic polynomials for finding the factors of stability and subsequent determination of the critical power is well understood and causes no fundamental difficulties. For this there is a whole lot of numerical methods and software capabilities.

**Keywords:** *stability, compressed rod, a variable stiffness, the method of direct integration, stability factor, the critical force*