Секція 3. АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ТА ПЕРСПЕКТИВИ РОЗВИТКУ СИСТЕМИ ФІНАНСІВ, ОБЛІКУ, АНАЛІЗУ ТА АУДИТУ В УКРАЇНІ

1

УДК 336.012.23

В.В. Новіков, *д.фіз.-мат.н., професор;*
С.В. Філиппова, *д.е.н., професор;*
О.В. Мовчанюк, *магістр, молодший науковий співробітник, Одеський національний політехнічний університет*

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ФІНАНСОВИХ ІНДЕКСІВ

Розроблена математична модель дозволяє отримати практично необмежений набір даних для відпрацювання торгових тактик на фінансовому ринку.

Ключові слова: *часовий ряд, функція Вейєрштрасса, рівняння Ланжевена, фрактальна розмірність.*

Вступ. Сучасна українська економіка з її тривалим занепадом, плутаниною, фінансовими кризами які періодично змінюють один одного, не може бути описана класичною економічною теорією, побудованою на рівноважних моделях. Так, зокрема, перехід від соціалістичного планового господарства до вільного ринку несе в собі цілий конгломерат нелінійностей.

У даній роботі висувається гіпотеза про те, що український ринок має фрактальні властивості, і в своїй основі визначається нелінійними процесами, тобто підпорядковується постулатам одного з напрямків нелінійної економічної теорії – гіпотезі фрактального ринку [1].

Направлення необхідних фінансових ресурсів в реальний сектор економіки може забезпечити фондовий ринок. Основним стимулом для потенційних інвесторів мають стати підходи та методи фінансового аналізу, що дозволяють їм на початковій стадії розумно сформувати свої портфелі цінних паперів, забезпечити зниження ризику вкладень, зробити більш прозорими прогнози рівнів прибутковості цінних паперів і підвищити ефективність управління своїми активами.

На сьогоднішній день не існує одного універсального методу формування портфелів цінних паперів. Інвесторам слід запропонувати широкий спектр інструментів у цій галузі.

Складність поведінки курсів цінних паперів, що обертаються на ризикованому і нестабільному фондовому ринку, стимулює залучення до їх аналізу різних математичних методів.

Однією з проблем при моделюванні динаміки фінансових, валютних індексів є генерація набору даних, на яких можна провести тестування розробленої моделі. Труднощі вибору набору даних в тому, що використовувати для тестування кілька різних даних про фінансові або валютні індекси - не має сенсу, у силу різної ліквідності і різного кола учасників торгівлі та інших параметрів фінансового ринку. Рішенням цієї задачі є моделювання можливого цінового ряду (часового ряду) випадковим процесом, з характеристиками близькими до реальних для того індексу, на яку настроюється система. Отримання такого набору даних дозволить отримати практично необмежений набір даних для відпрацювання торгових тактик. Однією з можливостей такого моделювання є використання функції Вейєрштрасса, за допомогою якої можна отримувати тимчасові ряди з різними значеннями фрактальної розмірності.

Для моделювання залежності ціни цінних паперів від часу використаємо рівняння Ланжевена та функцію Вейєрштрасса.

Функція Вейєрштрасса належить до класу неперервних і недиференційованих функцій, що об'єднує її з траєкторією броунівський частинки [2, 3].

Вейєрштрасс вперше записав функцію, яка неперервна і недиференційована, у вигляді

$$W(t)=\sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(\pi a^k t) \qquad ab>1+\frac{3}{2}\pi \quad (1)$$

Фрактальна розмірність функції Вейерштрасса (1) визначається у вигляді

$$d_f=2+\lg b/\lg a \quad (2)$$

Узагальнена функція Вейерштрасса, визначена Berry, Lewis [4] представляється у вигляді ряду

$$W(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1-\exp[i\gamma^{n}t])}{\gamma^{hn}} \exp[i\phi_n] \quad (3)$$

d_f – фрактальна розмірність, ϕ_n – випадкова фаза, $h=2-d_f$ – показник Херста, $\gamma>1$, $1<d_f<2$

Функцію $W(t)$ можна переписати у вигляді

$$W(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(1-e^{i\gamma^n t})e^{i\phi_n}, \quad A_n=\gamma^{-nh}, \quad (4)$$

Функція $W(t)$ є однорідною, самоподібною функцією, тобто виконується

$$W(\gamma t)=\gamma^h W(t) \quad (5)$$

Рівняння з дробовою похідною. Рівняння з дробовою похідною описує динамічний процес з урахуванням пам'яті, тобто з урахуванням станів системи в попередній час [2, 3, 5].

Розглянемо рівняння з дробовими похідними (аналог рівняння Ланжевена)

$$ {}_0D_t^{\beta}\left[x(t)\right]=\frac{1}{\tau^{\beta}}\eta(t)\,, \quad (6)$$

де ${}_0D_t^{(\beta)}\left[x(t)\right]$ дробова похідна Рімана – Ліувіля [6] :

$$ {}_0D_t^{(\beta)}\left[x(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{\beta}}d\tau\,, \quad 0<\alpha<1, \quad (7)$$

Нижня границя інтегрування $t > 0$ в (7) фіксує момент часу t, з якого починається відлік динамічних явищ у середовищі; такий вибір багато в чому носить умовний характер.

Дробова похідна (7) переходить у звичайну «цілу» похідну при $\beta\to 1$

$$ {}_0D_t^{1}\left[x(t)\right]=\frac{dx(t)}{dt} \quad (8)$$

У границі $\beta\to 0$ з співвідношення (7) випливає

$$ {}_0D_t^{0}\left[x(t)\right]=\frac{d^0x(t)}{dt^0}=x(t)\,, \quad (9)$$

При цьому виконується

$$ {}_0D_t^{-\beta}\cdot{}_0D_t^{\beta}\left[f(t)\right]=f(t)\,,$$

$$ {}_0D_t^{-\beta}\left[f(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}}d\tau \quad (10)$$

Враховуючи, що $<\eta(t)>=0$ і початкові умови

$$ x(t)_{t=0}=0\,, \quad (11)$$

розв’язання диференціального рівняння (6) з використанням, оператор зворотного диференціювання ${}_0D_t^{-\beta}\left[...\right]$ можна отримати у вигляді

$$ x(t)=\frac{1}{\tau^{\beta}}e^{-i\pi\beta/2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\gamma^{-(h+\beta)n}\,e^{i(\gamma^n t+\phi_n)}(1-e^{i\gamma^n\varepsilon}),$$

(12)

Згідно (12) дію дробового інтеграла порядку β на функцію $\eta(t,\varepsilon) = W(t+\varepsilon) - W(t)$ змінює її фрактальну розмірність с d_f на $d_f - \beta$ ($h = 2 - d_f$, $h + \beta = 2 - (d_f - \beta)$).

Таким чином, швидкість зміни значень фінансового індексу на фінансовому ринку, якщо випадкова складова діюча на ринок описується функцією (12), визначається фрактальної функцією, розмірність якої дорівнює $d_f - \beta$. Зменшення фрактальної розмірності вказує на збільшення зашумленості динамічного процесу.

Висновки. Рівняння Ланжевена з дробовими похідними і функція Вейєрштрасса дозволяють отримувати випадкові тимчасові ряди з пам'яттю з різними значеннями фрактальної розмірності і різним часом релаксації, тобто з характеристиками близькими до реального процесу для того фінансового індексу, на який налаштовується модельна система. Розроблена математична модель дозволяє отримати практично необмежений набір даних для відпрацювання торгових тактик на фінансовому ринку.

Список використаних джерел

1. Peters E., Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment & Economics. J. Wiley & Sons, New York, 1994.
2. Novikov V.V., “Physical properties of fractal structures”, p.93-284. In the book “Advances in Chemical Physics, Volume 133, Fractals, Diffusion and Relaxation in Disordered Complex Systems” (J. Wiley, Chichester-New York-Brisbane-Toronto-Singapore, 2006)
3. В.В. Учайкин, Успехи Физических Наук, т. 173, №8, 847-876 (2003).
4. M.V. Berry, Z.V. Lewis, Proc. Roy. Soc. Lond. A370, 459, (1980).
5. V. V. Novikov, V.P. Privalko. Temporal fractal model for the anomalous dielectric relaxation of inhomogeneous media with chaotic structure, Phys. Rev. E, 64, 031504, (2001)
6. Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. – N.Y.Academic Press, 1974.– 234 p.

Annotation. *The given mathematical model allows to gain practically unlimited data set for processing of trading tactics in the financial market.*

Key words: *a time series, function of Weierstrass, equation Ланжевена, fractal dimensions of a quantity.*