

## ПОРІВНЯЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ ГРАНИЧНИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

*У цій статті обґрунтовано необхідність проведення всебічного порівняльного аналізу моделей граничних пластичних деформацій, що запропоновані у вітчизняній та закордонній літературі за останні пів століття. Виконано аналіз цитувань деяких найбільш популярних праць з розробки критеріїв руйнування при пластичному деформуванні. На основі деяких найбільш популярних моделей граничних деформацій отримано низку окремих співвідношень, що необхідні для їх подальшого детального аналітичного та числового аналізу в порівнянні з експериментальними даними.*

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

В багатьох галузях промисловості актуальними є задачі оцінювання, прогнозування, моделювання процесів накопичення пошкоджень. Це спонукає до підвищення інтенсивності дослідження та пошуків розв'язків в теорії накопичення пошкоджень серед провідних наукових колективів.

В той же час попередні дослідження [1] показали, що праці у зазначеному напрямі багатьох наукових колективів, зокрема вітчизняних, практично невідомі закордонним науковцям. Звичайно, що подібна ситуація розпорошує сили науковців і знижує ефективність досліджень.

Значна частина наукових праць другої половини ХХ сторіччя, зокрема [2, 3, 4, 5] з розробки моделей руйнування, набули на цей час неабиякої популярності та цитуються в провідних наукових публікаціях. На наш погляд, надпопулярність та актуальність цих праць стала наслідком імплементації програм розрахунків із застосуванням вказаних моделей в сучасні скінченно-елементні комплекси.

Приблизно в той самий період інтенсивні наукові дослідження проводилися й вітчизняними науковцями. Але й до сьогодні відсутні праці з порівняльного аналізу результатів, що опубліковані у вітчизняній та закордонній літературі.

### ОСНОВНА ЧАСТИНА

Аналіз цитувань наукових праць свідчить не тільки про високий рівень відповідних наукових праць, а й певною мірою відображує актуальність відповідних досліджень. Графік на рис. 1 свідчить як про високий рівень цитування згаданих праць, так і про те, що вони й досі залишаються суперпопулярними. Це впливає з аналізу динаміки зміни функцій, які характеризують цитування наукових праць у часі.

Дані, що наведено в табл. 1, свідчать про кореляцію числа посилань на відповідні праці в наукометричних базах Google Scholar та Web of Science.

Звідси випливає висновок про значне підвищення уваги наукової спільноти до питань прогнозування граничного стану матеріалів за різних умов деформування.

В цей самий період аналогічні розробки були отримані науковими школами пострадянських країн. Уяву про ці роботи дають праці [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]. З огляду на закордонні публікації ці праці залишаються непоміченими світовою науковою спільнотою. Більш того ґрунтовний аналіз низки сучасних праць [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] показує, що наукова спільнота й до сьогодні не в повній мірі усвідомлює сутність наукових результатів, отриманих у закордонній літературі та у працях вітчизняних науковців.

Подібна ситуація вимагає ревізії, переосмислення та порівняльного аналізу опублікованих результатів з моделювання граничних деформацій при пластичному деформуванні.

В табл. 2 розглянуто низку найбільш популярних моделей граничного стану при холодному пластичному деформуванні. На основі цих моделей отримано співвідношення для калібровки моделей за експериментальними даними при різних напружених станах. Результати розрахунків за вказаними співвідношеннями представлено на рис. 2. Ці результати та дані дослідження [1] не суперечать висновку про втрату деякими моделями своєї актуальності. Звичайно, залишається історична та пізнавальна цінність таких моделей.

На основі деяких найбільш популярних моделей граничних деформацій отримано низку

окремих співвідношень, що необхідні для їх подальшого детального аналітичного та числового аналізу в порівнянні з експериментальними даними.

Таблиця 1 – Кількість цитувань наукових праць в наукометричних базах

Посилання на статтю із списку літератури	Кількість цитувань в Google Scholar	Кількість цитувань в Web of Science		
		Всього	За 2018 р.	Відсоток цитувань за 2018 р., %
[2]	4282	2528	–	–
[3]	1649	793	–	–
[6]	824	497	91	18
[8]	1167	700	108	15

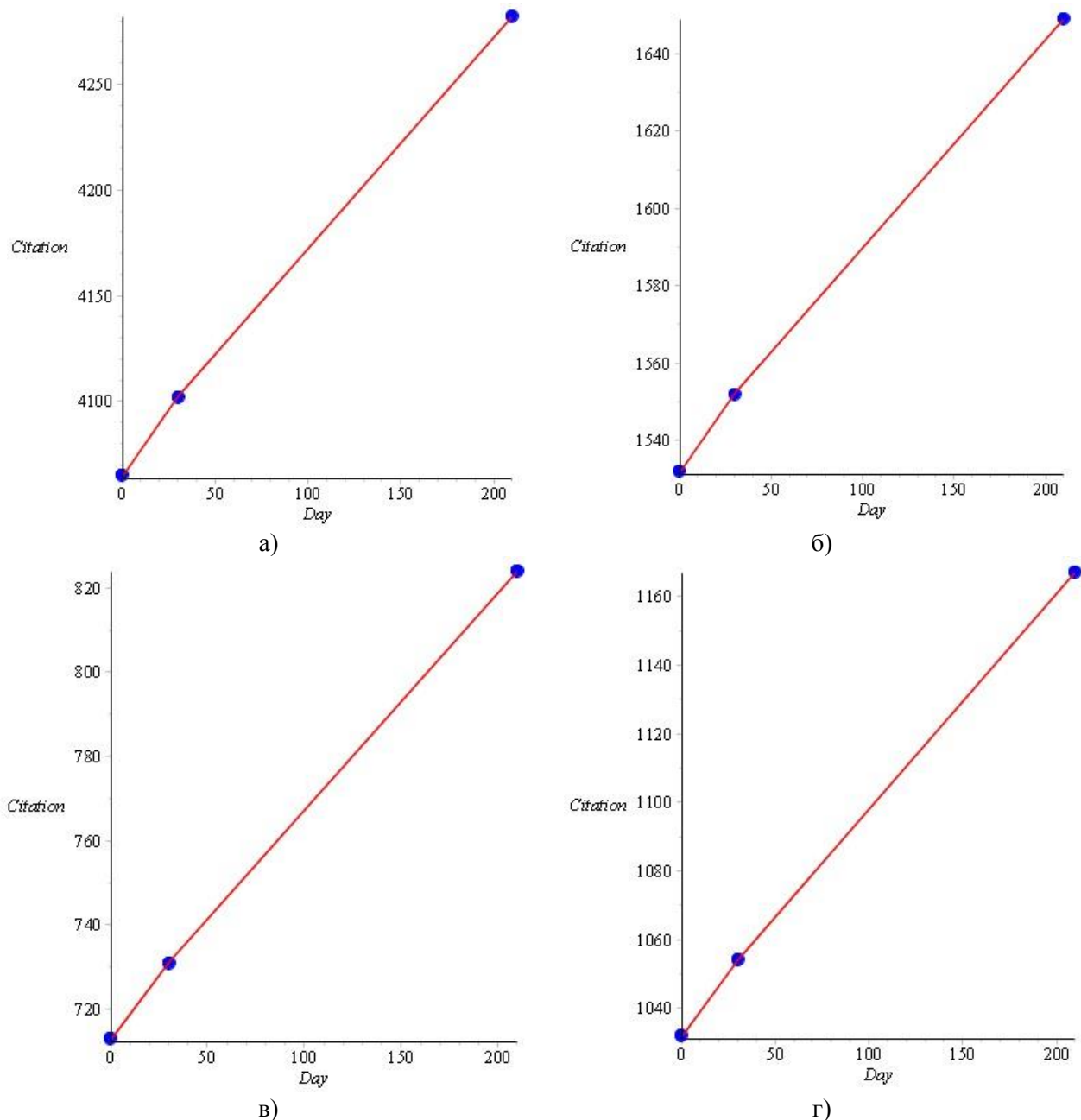


Рисунок 1 – Результати цитування публікацій згідно з даними науково метричної бази Google Scholar: а) – [2], б) – [3], в) – [6], г) – [8]

Назва моделі граничного стану		Моделі граничного стану	Моделі граничних деформацій при стаціонарному деформуванні за умов плоского напруженого стану	
Нормалізований критерій Кокрофта–Легема–Оха	Математична модель у загальному вигляді [3, 4, 8]	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\bar{\sigma}} \cdot d\bar{\varepsilon} = C$	(1) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{3 \cdot C}{\left\{ \eta + 2 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \cdot \arccos(0,5 \cdot \eta \cdot (3 - \eta^2)) \right] \right\}}$ , $-1 < \eta \leq 2$	(2)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації під час зсуву	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\bar{\sigma}} \cdot d\bar{\varepsilon} = \varepsilon_k^*$	(3) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\sqrt{3} \cdot \varepsilon_k^*}{\left\{ \eta + 2 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \cdot \arccos(0,5 \cdot \eta \cdot (3 - \eta^2)) \right] \right\}}$ , $-1 < \eta \leq 2$	(4)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації на розтяг	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\bar{\sigma}} \cdot d\bar{\varepsilon} = \varepsilon_p^*$	(5) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\varepsilon_p^*}{\left\{ \eta + 2 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \cdot \arccos(0,5 \cdot \eta \cdot (3 - \eta^2)) \right] \right\}}$ , $-1 < \eta \leq 2$	(6)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації під час двохосьового рівномірного розтягу	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\bar{\sigma}} \cdot d\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{fs}(2)$	(7) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\bar{\varepsilon}_{fs}(2)}{\left\{ \eta + 2 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \cdot \arccos(0,5 \cdot \eta \cdot (3 - \eta^2)) \right] \right\}}$ , $-1 < \eta \leq 2$	(8)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації під час двохосьового нерівномірного розтягу	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{\langle \sigma_1 \rangle}{\bar{\sigma}} \cdot d\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{fs}(1,5)$	(9) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\bar{\varepsilon}_{fs}(1,5)}{\left\{ \eta + 2 \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \cdot \arccos(0,5 \cdot \eta \cdot (3 - \eta^2)) \right] \right\}}$ , $-1 < \eta \leq 2$	(10)
Критерій гідростатичного напруження	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \cdot d\bar{\varepsilon} = C$	(11) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{3 \cdot C}{\eta}$ , $-2 \leq \eta \leq 2$	(12)	
Критерій Кліфта [5]	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon} = C$	(13) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{3 \cdot \sigma_m \cdot C}{\eta}$ , $-2 \leq \eta \leq 2$	(14)	
Модель Г. Деля [11]	-	- $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\varepsilon_c \cdot \varepsilon_k}{\varepsilon_c + \eta \cdot (\varepsilon_c - e \cdot \varepsilon_k)} \cdot e^{-\eta}$ , $-1 \leq \eta \leq 1$	(15)	
Модель Г. Деля [11]	-	- $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\varepsilon_k}{1 + \eta} \cdot e^{-\eta}$	(16)	

Назва моделі граничного стану		Моделі граничного стану	Моделі граничних деформацій при стаціонарному деформуванні за умов плоского напруженого стану	
Критерій Райса-Трейсі	Математична модель у загальному вигляді [2]	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = C$	(17) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = C \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(18)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації на стиск	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = \varepsilon_c^*$	(19) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\varepsilon_c^*}{\sqrt{e}} \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(20)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації на зсув	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = \varepsilon_k^*$	(21) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \varepsilon_k^* \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(22)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації на розтяг	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = \varepsilon_p^*$	(23) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \sqrt{e} \cdot \varepsilon_p^* \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(24)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації під час двохосьового рівномірного стиску	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{fs}(-2)$	(25) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\bar{\varepsilon}_{fs}(-2)}{e} \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(26)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації під час двохосьового нерівномірного стиску	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{fs}\left(-\frac{3}{2}\right)$	(27) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \frac{\bar{\varepsilon}_{fs}\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt[4]{e^3}} \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(28)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації під час двохосьового рівномірного розтягу	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{fs}(2)$	(29) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = e \cdot \bar{\varepsilon}_{fs}(2) \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(30)
	Визначення параметра моделі за результатами граничної деформації під час двохосьового нерівномірного розтягу	$\int_0^{\bar{\varepsilon}_f} \exp\left(\frac{\eta}{2}\right) \cdot d\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{fs}\left(\frac{3}{2}\right)$	(31) $\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \sqrt[4]{e^3} \cdot \bar{\varepsilon}_{fs}\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(32)
Моделі граничних деформацій при стаціонарному деформуванні, що базуються на конструюванні сплайн-функцій [27, 28, 29]		–	$\bar{\varepsilon}_{fs}(\eta) = \varepsilon_k^* \cdot \exp\left(-\eta \cdot \ln\left(\frac{(1-\eta) \cdot \varepsilon_c^*}{2 \cdot \varepsilon_k^*} + \frac{(1+\eta) \cdot \varepsilon_k^*}{2 \cdot \varepsilon_p^*}\right)\right), \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(33)
		–	$\varepsilon_c^* = \varepsilon_k \cdot \left(\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_c}\right)^{\frac{\eta}{2}} \cdot \left(\frac{\varepsilon_p \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_k^2}\right)^{\frac{\eta^2}{2}}, \quad -2 \leq \eta \leq 2$	(34)

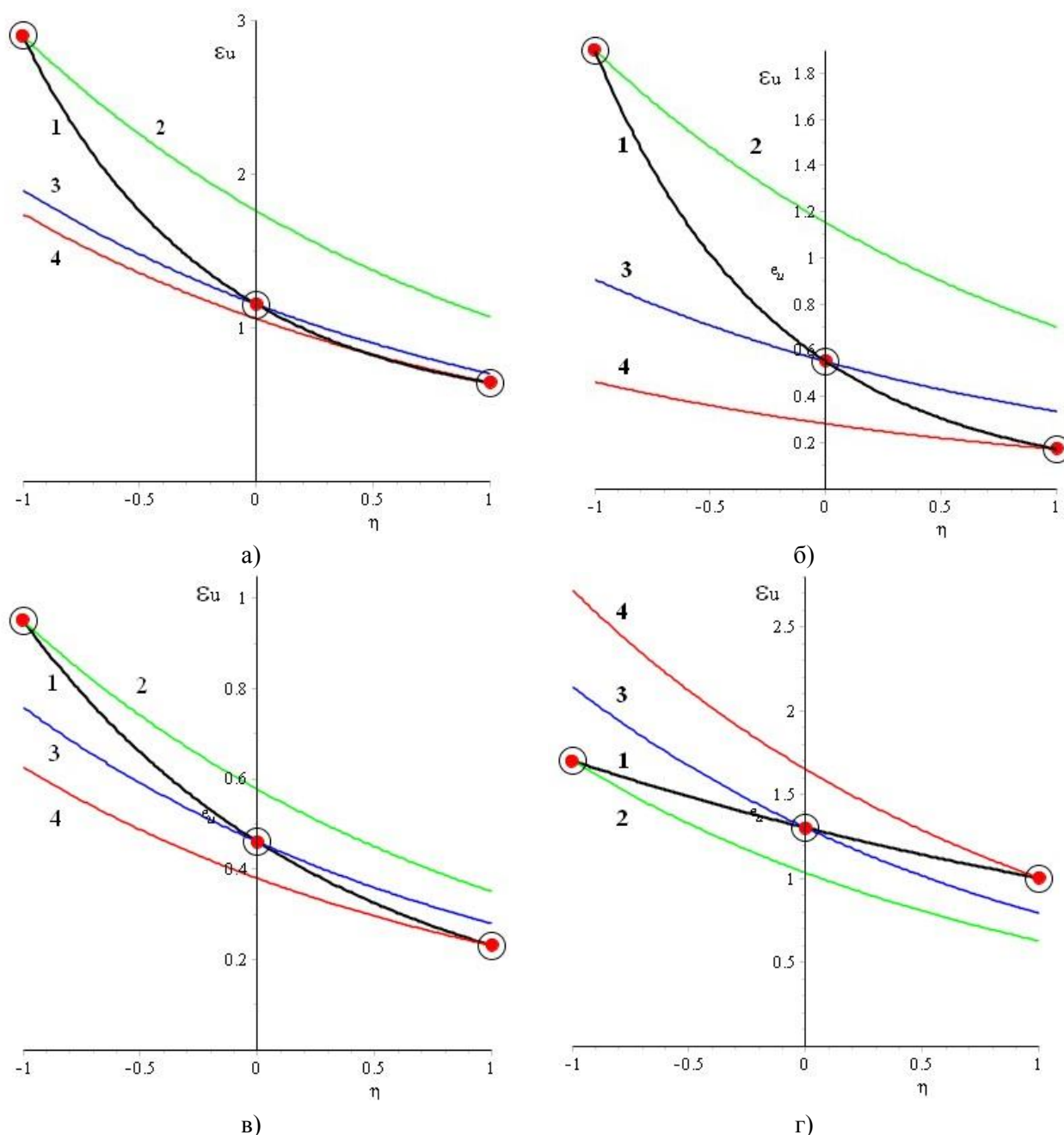


Рисунок 2 – Побудова діаграми пластичності сплаву VT-1 (а), P12 (б), Р6М5 (в), 20-A (г) відповідно до апроксимацій кривої граничних деформацій: 1–4 – відповідно до співвідношень (33), (20), (22), (24), використовуючи експериментальні дані, які представлено в роботі [26]

### ВИСНОВКИ

1. Аналіз динаміки цитувань деяких праць з дослідження моделей граничних деформацій при холодному пластичному деформуванні є опосередкованим показником, що свідчить про актуальність вказаного напрямку.

2. Велика кількість моделей граничних деформацій, що опубліковані в літературі, зумовлює необхідність проведення системного порівняльного аналізу цих моделей у зіставленні з експериментальними даними.

3. В цій праці запропоновано методику проведення вказаного аналізу на основі аналітичних перетворень всіх моделей з метою їх представлення в одних й тих самих координатах для описання плоского напруженого стану.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М. Математичні моделі граничних деформацій в залежності від виду напруженого стану / В. М. Михалевич // Теоретичні та практичні проблеми в обробці матеріалів

- тиском і якості фахової освіти : матеріали IX Міжнародної науково-технічної конференції. – Київ ; Херсон, 2018. – С. 98–101.
2. Rice J. R. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress Fields / J. R. Rice, D. M. Tracey // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1969. – No. 3. – P. 201–217.
  3. Cockroft M. G. Ductility and the Workability of Metals / M. G. Cockroft and D. J. Latham // *Journal of the Institute of Metals*. – 1968. – V. 96. – P. 33–39.
  4. Oh S.I. Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing. Part 2. Workability in extrusion and drawing / S. I. Oh, C. C. Chen, S. Kobayashi // *ASME Journal of Engineering for Industry*. – 1979. – V. 101. – P. 36–44.
  5. Fracture prediction in plastic deformation processes / S. E. Clift, P. Hartley, C.E.N. Sturgess, G. W. Rowe // *International Journal of Mechanical Science*. – 1990. . – V. 32. – No. 1. –P. 1–17.
  6. Bai Y. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence / Y. Bai, T. Wierzbicki // *International Journal of Plasticity*. – 2008. – № 24. – P. 1071–1096.
  7. Bao Y. A comparative study on various ductile crack formation criteria. / Y Bao, T. Wierzbicki // *J Eng Mater Technol*. – 2004. – No. 126. – P. 314–324.
  8. Bao Y. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space / Y. Bao, T. Wierzbicki // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2004. –V. 46. – No. 1. –P. 81–98.
  9. Ильюшин А. А. Об одной теории длительной прочности / А. А. Ильюшин // *Механика твердого тела*. – 1967. – № 13. – С. 21–25.
  10. Колмогоров В. Л. Пластичность и разрушение / В. Л. Колмогоров и др. – М. : Металлургия, 1977. – 336 с.
  11. Дель Г. Д. Технологическая механика / Г. Д. Дель. – М. : Машиностроение, 1978. – 174 с.
  12. Дель Г. Д. Пластичность деформированного металла. / Г. Д. Дель // *Физика и техника высоких давлений : сборник*. – 1983. – №11. – С. 28–32.
  13. Огородников В. А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / В. А. Огородников. – К. : Выща шк., 1983. – 200 с.
  14. Матвийчук В. А. Совершенствование процессов локальной ротационной обработки давлением на основе анализа деформируемости металлов : монография / В. А. Матвийчук, И. С. Алиев. – Краматорск : ДГМА, 2009. – 268 с.
  15. Михалеви́ч В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалеви́ч / Вінниця: "УНІВЕРСУМ-Вінниця", 1998 - 195 с.
  16. Mikhalevich V. M. Variational problems for damage accumulation models heritable type / V. M. Mikhalevich, V. O. Kraevskiy // *The nonlinear analysis and application 2009 : materials of the international scientific conference*. – Kyiv : NTUU "KPI", 2009. – P. 109–110.
  17. Lebedev A. A. On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics / A. A. Lebedev, V. M. Mikhalevich // *Strength of Materials N 35 (3)*, Plenum Publishing Corporation (USA), – May - June, 2003, – P. 217–224.
  18. Афонин А. Н. Моделирование разрушения металлов при пластической деформации в DEFORM и LS-DYNA / А. Н. Афонин // *Известия ОрелГТУ. Машиностроение. Приборостроение*. – 2012. – № 1. – С. 52–62. – Режим доступа до роботи: <http://www.artech-eng.ru/images/stories/Stat/DEFORM/Orel1.pdf>.
  19. Боткин А. В. Оценка поврежденности металла при холодной пластической деформации с использованием модели разрушения Кокрофта-Латама / А. В. Боткин, Р. З. Валиев [и др.] // *Деформация и разрушение материалов*. – 2011. – № 7. – С. 17–22.
  20. Боткин А. В. Оценка поврежденности металла при холодной пластической деформации с использованием модели разрушения Кокрофт–Лэтэм и программного комплекса DEFORM 3D / А. В. Боткин, Р. З. Валиев, П. С. Степин // *Инновационные технологии в металлургии и машиностроении : материалы 6-й международной молодежной научно-практической конференции // Уральская научно-педагогическая школа имени профессора А. Ф. Головина*. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012. – С. 102–108.
  21. Прогнозирование разрушения металла в процессе интенсивной пластической деформации длинномерной заготовки равноканальным угловым пресованием конформ / А. В. Боткин, Р. З. Валиев [и др.] // *Вестник УГАТУ*. – 2012. – Т. 16, № 8 (53). – С. 98–103.
  22. Власов А.В. Реализация модели Гурсо–Твергарда–Нидельмана для расчетов процессов холодной объемной штамповки несжимаемых материалов / А. В. Власов, Д. А. Герасимов // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. – 2017. – №8(689). – С. 8–17.
  23. Власов А. В. О применении критерия Кокрофта–Лэтэма для прогнозирования разрушения

- при холодной объемной штамповке // Известия ТулГУ. Техн науки. – 2017. – Вып. 11, ч. 1. – С. 46–59.
24. Диаграмма предельных деформаций при горячей листовой штамповке металлов: обзор моделей материала, критериев вязкого разрушения и стандартных испытаний / А. В. Казанцев, И. Э. Келлер, Д. С. Петухов, В. Н. Трофимов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2017. – Т. 21, № X. – С. 1–X. doi: 10.14498/.
25. Матвеев М. А.. Оценка вероятности разрушения металла при горячей пластической деформации с помощью критерия Кокрофта–Латама // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 109–126.
26. Параметры модели, формирующей карту материала в процессах обработки давлением / В. А. Огородников, Л. И. Алиева, В. М. Кожушаный, И. А. Деревенько // Обработка материалов давлением : сб. науч. тр. – Краматорск : ДГМА. – 2011. – № 1 (26). – С. 91–98.
27. Михалевич В. М. Аппроксимация кривых предельной деформации сплайн-функциями / В. М. Михалевич, Л. И. Алиева // Обработка металлов давлением : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА. – 2010. – № 3(24). – С. 3–10.
28. Михалевич В. М. Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні: монографія / В. М. Михалевич, Ю. В. Добранюк. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 180 с.
29. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev and Yu. V. Dobranyuk // Strength of Materials. – 2011. – V. 43, Number 6. – P. 591–603, DOI: 10.1007/s11223-011-9332-7.

#### REFERENCES

1. Mykhalevych V. M. Matematychni modeli hranychnykh deformatsii v zalezhnosti vid vydu napruzhenoho stanu / V. M. Mykhalevych // Materialy IX Mizhnarodnoi naukovy-tekhnichnoi konferentsii «Teoretychni ta praktychni problemy v obrobsi materialiv tyskom i yakosti fakhovoi osvity» (29.05-02.06.2018r.) / Kyiv – Kherson, 2018. – 98-101.
2. Rice J. R, Tracey D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress Fields / J. R Rice, D. M. Tracey // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1969, no. 3. pp. 201–217.
3. Cockroft M. G. and D. J. Latham, —“Ductility and the Workability of Metals,” Journal of the Institute of Metals, Vol. 96, 1968, pp. 33-39.
4. Oh S.I. Ductile fracture in axisymmetric extrusion and drawing. Part 2. Workability in extrusion and drawing / S. I. Oh, C. C. Chen, S. Kobayashi // ASME Journal of Engineering for Industry, 1979. vol. 101. pp. 36-44.
5. Clift S. E. Fracture prediction in plastic deformation processes / S. E. Clift, P. Hartley, C.E.N. Sturgess, G. W. Rowe // International Journal of Mechanical Science, 1990. vol. 32, no. 1. pp. 1-17.
6. Bai Y. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence/ Y. Bai, T. Wierzbicki // International Journal of Plasticity, № 24. P. 1071–1096.
7. Bao Y. A comparative study on various ductile crack formation criteria. / Y Bao, T. Wierzbicki // J Eng Mater Technol 2004, N 126, pp. 314–324.
8. Bao Y., Wierzbicki T. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space // International Journal of Mechanical Sciences, 2004. vol. 46, no. 1. pp. 81-98.
9. Ilyushin A. A. Ob odnoy teorii dlitelnoy prochnosti / A. A. Ilyushin // Mehanika tverdogo tela. — 1967. - №13. – S. 21–25.
10. Kolmogorov V. L. Plastichnost i razrushenie / V. L. Kolmogorov i dr. — M. : Metallurgiya, 1977. — 336 s.
11. Del H. D. Tekhnolohycheskaia mekhanika / H. D. Del. - M. : Mashynostroenye, 1978. - 174 s.
12. Del G. D. Plastichnost deformirovannogo metalla. / G. D. Del // V sb.: Fizika i tehnika vyisokih davleniy. - 1983. - №11. - S. 28-32.
13. Ogorodnikov V. A. Otsenka deformiruемости металлов при obrabotke davleniem / V. A. Ogorodnikov. - K. : Vyischa shk., 1983. - 200 s.
14. Matviychuk V. A. Sovershenstvovaniye protsessov lokal'noy rotatsionnoy obrabotki davleniyem na osnove analiza deformiruyemosti metallov: monografiya / V. A. Matviychuk, I. S. Aliyev. – Kramatorsk: DGMA, 2009. – 268 s.
15. Mykhalevych V. M. Tenzorni modeli nakopychennia poskodzhen / V. M. Mykhalevych / Vinnytsia: "UNIVERSUM- Vinnytsia", 1998 - 195 s.
16. Mikhalevich V. M. Variational problems for damage accumulation models heritable type [Text] / V. M. Mikhalevich, V. O. Kraevskiy // The nonlinear analysis and application 2009 : materials of the

international scientific conference, Kyiv, April 02-04th 2009. – Kyiv : NTUU "KPI", 2009. – P. 109-110.

17. Lebedev A. A. On the Choice of Stress Invariants in Solving Problems of Mechanics/ A. A. Lebedev, V. M. Mikhalevich // Strength of Materials N 35 (3) , Plenum Publishing Corporation (USA), May - June, 2003, 217-224.

18. Afonin A. N. Modelirovanie razrusheniya metallov pri plasticheskoy deformatsii v DEFORM i LS-DYNA / A. N. Afonin // Izvestiya OrelGTU. Mashinostroenie. Priborostroenie.- 2012.- №1.- S. 52-62. – Rezhim dostupu do roboti: <http://www.artech-eng.ru/images/stories/Stat/DEFORM/Orel1.pdf>.

19. Botkin A. V. Otsenka povrezhdennosti metalla pri holodnoy plasticheskoy deformatsii s ispolzovaniem modeli razrusheniya Kokrofta-Latama / A.V. Botkin, R.Z. Valiev [i dr.] // Deformatsiya i razrushenie materialov. 2011. № 7. S. 17–22.

20. Botkin A. V. Otsenka povrezhdennosti metalla pri holodnoy plasticheskoy deformatsii s ispolzovaniem modeli razrusheniya Kokroft-Letem i programmnoy kompleksa DEFORM 3D / A. V. Botkin, R. Z. Valiev, P. S. Stepin // Innovatsionnyie tehnologii v metallurgii i mashinostroenii : materialy 6-y mezhdunarodnoy molodezhnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Innovatsionnyie tehnologii v metallurgii i mashinostroenii. Uralskaya nauchno-pedagogicheskaya shkola imeni professora A. F. Golovina», [g. Ekaterinburg, 29 oktyabrya - 1 noyabrya 2012 g.]. — Ekaterinburg : Izd-vo Ural. un-ta, 2012. - S. 102-108.

21. Botkin A. V. Prognozirovanie razrusheniya metalla v protsesse intensivnoy plasticheskoy deformatsii dlinnomernoy zagotovki ravnokanalnyim uglovyim pressovaniem konform / Botkin A.V., Valiev R.Z. [i dr.] // Vestnik UGATU. 2012. T. 16. № 8 (53). S. 98–103.

22. Vlasov A.V., Gerasimov D.A. Realizatsiya modeli Gurso – Tvergarda – Nidelmanna dlya raschetov protsessov holodnoy ob'emnoy shtampovki neszhimaemykh materialov // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie. 2017. №8(689). S. 8-17.

23. Vlasov A.V. O primeneniі kriteriya Kokrofta-Letema dlya prognozirovaniya razrusheniya pri holodnoy ob'emnoy shtampovke. // Izvestiya TulGU. Tehnicheskie nauki – 2017 vyip.11, ch.1 – С 46-59.

24. Kazantsev A. V., Keller I. E., Petuhov D. S., Trofimov V. N. Diagramma predelnykh deformatsiy pri goryachey listovoy shtampovke metallov: obzor modeley materiala, kriteriev vyzkogo razrusheniya i standartnykh ispytaniy // Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 2017. T. 21, № x. S. 1-h. doi: 10.14498/.

25. Matveev M. A.. Otsenka veroyatnosti razrusheniya metalla pri goryachey plasticheskoy deformatsii spomoschyu kriteriya Kokrofta— Latama // Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbPU. Estestvennyie i inzhenernyie nauki. 2017. T.23. № 2. S. 109–126.

26. Parametry modely, formyuyushchey kartu materyala v protsesakh obrabotky davlenym. / V. A. Ohorodnykov, L. Y. Alyeva, V. M. Kozhushany, Y. A. Dereven'ko // Obrabotka materyalov davleniem. – Kramatorsk: DHMA, 2011. – №1 (26). – S 91-97.

27. Mihalevich V. M. Approksimatsiya krivyykh predelnoy deformatsii splayn-funktsiyami / V. M. Mihalevich, L. I. Alieva // Obrabotka metallov davleniem: sbornik nauchnykh trudov. - Kramatorsk : DGMA. - 2010. - №3(24). - S. 3-10.

28. Mykhalevych V. M. Modelyuvannya napruzhenno-deformovanoho ta hranychnoho staniv poverkhni tsylindrychnykh zrazkiv pry tortsevomu stysnenni: monohrafiya / V. M. Mykhalevych, Yu. V. Dobranyuk. – Vinnytsya: VNTU, 2013. – 180 s. ISBN 978-966-641-532-8.

29. Mikhalevich V. M. Modeling of plastic deformation in a cylindrical specimen under edge compression / V. M. Mikhalevich, A. A. Lebedev and Yu. V. Dobranyuk // Strength of Materials. – Volume 43, Number 6 (2011), P. 591–603, DOI: 10.1007/s11223-011-9332-7.

**В. М. Михалевич<sup>1</sup>, Ю. В. Добранюк<sup>1</sup>, В. О. Красевський<sup>1</sup>**

## **ПОРІВНЯЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ ГРАНИЧНИХ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ**

<sup>1</sup>Вінницький національний технічний університет

У цій статті обґрунтовано необхідність проведення всебічного порівняльного аналізу моделей граничних пластичних деформацій, які запропоновані у вітчизняній та закордонній літературі за останні пів століття. Виконано аналіз цитувань деяких найбільш популярних праць з розробки критеріїв руйнування при пластичному деформуванні. На основі деяких найбільш популярних моделей граничних деформацій отримано велику кількість окремих співвідношень, що необхідні для



їх подальшого детального аналітичного та числового аналізу в порівнянні з експериментальними даними.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, показник напруженого стану, накопичена деформація, накопичені пошкодження.

*Михалевич Володимир Маркусович*, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, e-mail: vmykhal@gmail.com

*Добранюк Юрій Володимирович*, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, e-mail: dobranukyuriy@gmail.com.

*Краєвський Володимир Олександрович*, кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики, Вінницький національний технічний університет, e-mail: kraila@ukr.net

**V. Mykhalevych<sup>1</sup>, Yu. Dobraniuk<sup>1</sup>, V. Kraevskiy<sup>1</sup>**

## COMPARATIVE STUDY OF BORDER PLASTIC DEFORMATIONS MODEL'S

<sup>1</sup>Vinnitsya national technical university

This article substantiates the need for a comprehensive comparative analysis of limiting plastic strains model's, which are proposed in domestic and foreign literature over the past half century. The citation analysis of some of the most popular works devoted to the development of fracture criteria during plastic strain was performed. On the basis of some of the most popular models of limited strains, a large number of individual relations were obtained, which are necessary for their subsequent detailed analytical and numerical analysis in comparison with experimental data.

**Key words:** stress-strain state, stress state parameter, accumulated strain, accumulated damage.

*Mykhalevych Volodymyr*, Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Higher Mathematics, the Vinnitsya National Technical University, e-mail: vmykhal@gmail.com

*Dobraniuk Yuriy*, Candidate of Science (Engineering), assistant professor of Department of Higher Mathematics, the Vinnitsya National Technical University, e-mail: dobranukyuriy@gmail.com

*Kraevskiy Volodymyr*, Candidate of Science (Engineering), assistant professor of Department of Higher Mathematics, the Vinnitsya National Technical University, e-mail: kraila@ukr.net

**В. М. Михалевич<sup>1</sup>, Ю. В. Добранюк<sup>1</sup>, В. А. Краевский<sup>1</sup>**

## СРАВНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ПРЕДЕЛЬНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

<sup>1</sup>Винницкий национальный технический университет

В этой статье обоснована необходимость проведения всестороннего сравнительного анализа моделей предельных пластических деформаций, которые предложены в отечественной и зарубежной литературе за последние полвека. Выполнен анализ цитируемости некоторых наиболее популярных работ, посвященных разработке критериев разрушения при пластическом деформировании. На основе некоторых наиболее популярных моделей предельных деформаций получено большое количество отдельных соотношений, необходимых для их последующего детального аналитического и численного анализа по сравнению с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, показатель напряженного состояния, накопленная деформация, накопленные повреждения.

*Михалевич Владимир Маркусович*, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Винницкий национальный технический университет, e-mail: vmykhal@gmail.com

*Добранюк Юрий Владимирович*, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Винницкий национальный технический университет, e-mail: dobranukyuriy@gmail.com

*Краевский Владимир Александрович*, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики, Винницкий национальный технический университет, e-mail: kraila@ukr.net