

$$\zeta = \left(\frac{f}{N \cdot b \cdot c \cdot \mu} \right)^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{d}{\lambda \cdot l} \right)^2. \quad (24)$$

Для уточнення площі останнього отвору її треба розрахувати за півсумою значень у підкореновому виразі залежності (18) для останнього і передостаннього отворів.

Список літератури

1. **Богословский В.Н.** и др. Отопление и вентиляция. Учебник для вузов.
- 4.2. Вентиляция. – М.: Стройиздат, 1976. - 439с.
2. **Талиев В.Н.** Аэродинамика вентиляции. – М.: Стройиздат, 1979. – 295 с.
3. **Лобаев Б.Н.** Расчет воздухопроводов. – Киев: Гостройиздат, 1959. – 100 с.

УДК 536.24: 697.1

В.П.Корбут, кандидат технічних наук, доцент

Б.В.Давиденко, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЛОВОГО МОДЕЛЮВАННЯ АЕРОДИНАМІКИ ТА ТЕМПЕРАТУРНОГО СТАНУ ПРИМІЩЕНЬ З ТЕПЛОАДХОДЖЕННЯМИ

Розроблено прямий метод розв'язання системи різницевих рівнянь для двовимірних задач руху повітря та конвективного теплообміну у приміщенні, що містить джерела теплонадходжень. Метод придатний для розв'язування задач в одно- та багатозв'язних областях за будь-яких граничних умов. ∞

Для забезпечення належних умов експлуатації приміщень з теплонадходженнями, які б відповідали санітарним або технологічним нормам, необхідно підтримувати в цих приміщеннях певні рівні температури та швидкості руху повітря. Такі умови можуть забезпечуватися системами повітрообміну. Їх проектування, тобто визначення необхідних витрат та температури повітря, схем його подачі та видалення, має здійснюватися на основі точних та надійних методів розрахунку повітряно-температурного

стану в приміщенні. Цей стан залежить як від параметрів роботи системи вентиляції, так і від геометричних та аеродинамічних характеристик приміщення, його теплонапруженості, порядку розташування джерел тепловиділення тощо.

Для визначення кількісних характеристик систем повітрообміну, тобто температури та витрати припливного повітря, розв'язуються рівняння повітряного та повітряно-теплого балансів виходячи з умови, що середня температура в приміщенні не повинна перевищувати певну величину. Такий підхід не дає можливості одержати якісний стан розподілу температури та швидкості повітря по об'єму і відповідні умови на робочих місцях та на ділянках, де розташоване технологічне обладнання. Для розв'язання цієї задачі використовуються методи фізичного моделювання, які передбачають виготовлення висококоштовних теплових моделей та проведення трудомістких досліджень, іноді зі значними похибками. Проте можна також проаналізувати аеродинаміку повітряного потоку та теплообмінні процеси, що протікають у приміщенні, використовуючи відповідні математичні моделі перенесення імпульсу та енергії.

Розглянемо безрозмірну систему рівнянь турбулентного перенесення імпульсу та енергії в нестисливому середовищі для випадку двовимірної задачі:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} + \frac{\partial(U^2)}{\partial X} + \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} \left[N \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[N \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right]; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial F} + \frac{\partial(VU)}{\partial X} + \frac{\partial(V)}{\partial Y} = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial X} \left[N \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[N \left(\frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + H \left(1 - \frac{T_0}{T} \right); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial F} + \frac{\partial(TU)}{\partial X} + \frac{\partial(TV)}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left[A \frac{\partial T}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial Y} \left[A \frac{\partial T}{\partial Y} \right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{де } X &= x / L; Y = y / L; U = u / u_0; V = v / u_0; Re = u_0 L / \nu; F = u_0 \tau / L; \\ H &= g L / u_0^2; \\ P &= (p - p_0 + \rho_0 g y) / (\rho_0 u_0^2); N = (1 + \nu_t / \nu) / Re; \\ A &= (1 / Pr + \nu_t / (\nu Pr_t)) / Re, Pr = \nu / a; \end{aligned}$$

$Pr_t = \nu / a_t$; x, y – прямокутні декартові координати (горизонтальна і вертикальна); τ - час; u, v – проекції вектора швидкості на координатні осі; p – тиск; T – температура; g – прискорення сили тяжіння; L - масштаб довжини; u_0 - масштаб швидкості; p_0 - значення атмосферного тиску при $y=0$; ρ_0 - густина середовища, що відповідає тиску p_0 та температурі повітря на нескінченності T_0 ; ν, ν_t - кінематичні коефіцієнти в'язкості (молекулярної та турбулентної); a, a_t – коефіцієнти теплопровідності (молекулярної та турбулентної).

Рівняння турбулентного перенесення імпульсу в проекціях на горизонтальну (2) та вертикальну (3) осі, а також рівняння енергії (4), записані в консервативній формі, яка забезпечує виконання законів збереження на будь-якій сітці в скінченій області при числовому розв'язку системи рівнянь. Ця система доповнюється рівнянням нерозривності (1). Крім того, для визначення коефіцієнтів турбулентного перенесення ν_t, a_t необхідно прийняти належну для даної задачі модель турбулентності з відповідною системою рівнянь.

Виходячи з характеру повітрообміну, для системи рівнянь (1) - (4) формулюються граничні умови. Повітря подається до приміщення та видаляється з нього через повітропроводи або через аераційні та вентиляційні прорізи в огорожах (відповідно природним або механічним шляхом). Для вентиляційних прорізів задається значення швидкості повітря, для аераційних - значення тиску в площині його перерізу. У прорізах для припливного повітря вважається відомою температура потоку, а в прорізах, через які повітря видаляється з приміщення, нормальний градієнт температури вважається рівним нулю. На поверхнях огорож та джерел теплонадходження задаються значення температури або густини теплового потоку, а швидкість руху повітря вважається рівною нулю.

Розглянемо скінченно різницький метод розв'язання системи рівнянь (1) - (4) застосовуючи рознесену розрахункову сітку для функцій $V(F, Y, X)$,

$U(F, Y, X)$ та $P(F, Y, X)$ [1]. В неявній формі система різницевих рівнянь, що відповідають диференціальним рівнянням (1) - (3), має вигляд:

$$(U_{i,j} - U_{i,j-1})/dX_j + (V_{i,j} - V_{i-1,j})/dY_i = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (U_{i,j} - U_{i,j}^*)/dF + (U_{i,j+1/2}U_{i,j+1/2} - U_{i,j-1/2}U_{i,j-1/2})/dX_{j+1/2} + (V_{i,j+1/2}U_{i+1/2,j} - \\ - V_{i-1,j+1/2}U_{i-1/2,j})/dY_i = (P_{i,j} - P_{i,j+1})/dX_{j+1/2} + [2N_{i,j+1}(U_{i,j+1} - U_{i,j})/dX_{j+1} - \\ - 2N_{i,j}(U_{i,j} - U_{i,j-1})/dX_j]/dX_{j+1/2} + \{N_{i+1/2,j+1/2}[(U_{i+1,j} - U_{i,j})/dY_{i+1/2} + (V_{i,j+1} - \\ - V_{i,j})/dX_{j+1/2}] - N_{i-1/2,j+1/2}[(U_{i,j} - U_{i-1,j})/dY_{i-1/2} + (V_{i-1,j+1} - V_{i-1,j})/dX_{j+1/2}]\}/dY_i; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (V_{i,j} - V_{i,j}^*)/dF + (U_{i+1/2,j}V_{i,j+1/2} - U_{i+1/2,j-1}V_{i,j-1/2})/dX_j + (V_{i+1/2,j}V_{i+1/2,j} - \\ - V_{i-1/2,j}V_{i-1/2,j})/dY_{i+1/2} = (P_{i,j} - P_{i+1,j})/dY_{i+1/2} + \{N_{i+1/2,j+1/2}[(V_{i,j+1} - V_{i,j})/dX_{j+1/2} + \\ + (U_{i+1,j} - U_{i,j})/dY_{i+1/2}] - N_{i+1/2,j-1/2}[(V_{i,j} - V_{i,j-1})/dX_{j-1/2} + (U_{i+1,j-1} - \\ - U_{i,j-1})/dY_{i+1/2}]\}/dX_j + [2N_{i+1,j}(V_{i+1,j} - V_{i,j})/dY_{i+1} - 2N_{i,j}(V_{i,j} - U_{i-1,j})/dY_i]/ \\ /dY_{i+1/2} + H(1 - T_o/T_{i+1/2,j}); \end{aligned} \quad (7)$$

де U_{ij} , V_{ij} , P_{ij} , N_{ij} – сіткові функції безрозмірних складових швидкості, тиску та коефіцієнта турбулентного перенесення, що відповідають вузлам з номером i по вертикалі та номером j по горизонталі; du_i , dx_j – довжини кроків нерівномірної сітки по вертикалі та горизонталі, що мають відповідний номер; dF – крок за часом.

У випадку рознесеної сітки вузли з однаковими номерами для сіткових функцій U_{ij} , V_{ij} , P_{ij} не збігаються. Як це видно з рівняння (6) та (7), вони, крім невідомих U_{ij} та V_{ij} , містять ще й функцію P_{ij} . Для її визначення застосовується рівняння нерозривності (5). Отже, рівняння (5) записуються у вузлах для функцій P_{ij} , рівняння (6) - у вузлах для функцій U_{ij} , а рівняння (7) - у вузлах для функцій V_{ij} .

Згідно з прийнятою неявною схемою, величини, що входять до різницевих рівнянь, належать до поточному кроку за часом, за винятком величин, що мають позначку * і відповідають попередньому часовому кроку. Дробові значення індексу означають, що відповідна величина знаходиться в проміжку між вузловими точками сітки, в яких саме визначаються сіткові функції.

Таким чином, з системи диференціальних рівнянь (1) - (3), складено систему нелінійних алгебраїчних рівнянь (5) – (7) відносно сіткових функцій.

Область, в якій розглядається задача, в загальному випадку - багатозв'язна, через те що частину простору займають елементи обладнання. Для визначення вузлів сітки, що належать до цього простору, вводиться сіткова змінна $\gamma_{i,j}$, яка в цих вузлах дорівнює одиниці. У вузлах, віднесених до області повітряної течії, $\gamma_{i,j} = 0$. Очевидно, рівняння (5) – (7) визначені лише у вузлах, де $\gamma_{i,j} = 0$. В іншому випадку замість рівнянь (5) – (7) приймаються вирази

$$U_{i,j} = 0; \quad V_{i,j} = 0.$$

Рівняння нерозривності (5), так само як і функції $P_{i,j}$, при $\gamma_{i,j} = 1$ не мають сенсу. Проте, з метою узагальнення запису системи різницевих рівнянь, значення $P_{i,j}$ для таких випадків можна брати довільними, тому що їх значення в інших різницевих рівняннях не використовуються.

Для лінеаризації членів рівнянь виду $U \times V$ використовується формула Ньютона

$$U \times V \approx U^* \times V + U \times V^* - U^* \times V^*. \quad (8)$$

Апроксимація членів з дробовими індексами виконується за схемою TVD, яка, наприклад для виразу $V^*_{i,j+1/2} \times U_{i-1/2,j}$ (де значення $V^*_{i,j+1/2}$ вважається відомим з попереднього кроку за часом), має вигляд:

$$V^*_{i,j+1/2} U_{i+1/2,j} = V^*_{i,j+1/2} \{ (1-\beta) \cdot [U_{i+1,j} - \psi^-_{i+1/2,j} (U_{i+2,j} - U_{i+1,j})] + \beta \cdot [U_{i,j} + \psi^+_{i+1/2,j} (U_{i,j} - U_{i-1,j})] \}, \quad (9)$$

де $\beta = 0$ при $V^*_{i,j+1/2} \leq 0$; $\beta = 1$ при $V^*_{i,j+1/2} > 0$.

Обмежувачі ψ^+ та ψ^- , згідно з [2,3], розраховуються так:

$$\Psi^+ = 0 \quad \text{при} \quad \delta_0 \cdot \delta_1 \leq 0; \quad \Psi^+ = \frac{d_0}{2 \cdot d_{+1}} \delta_0 \frac{3 \cdot \delta_0 + \delta_{+1}}{(\delta_0 + \delta_{+1})^2} \quad \text{при} \quad \delta_0 \cdot \delta_1 > 0;$$

$$\Psi^- = 0 \quad \text{при} \quad \delta_0 \cdot \delta_{-1} \leq 0; \quad \Psi^- = \frac{d_0}{2 \cdot d_{-1}} \delta_0 \frac{3 \cdot \delta_0 + \delta_{-1}}{(\delta_0 + \delta_{-1})^2} \quad \text{при} \quad \delta_0 \cdot \delta_{-1} > 0,$$

де

$$\delta_{-1} = \frac{U^*_{i+2,j} - U^*_{i+1,j}}{d_{-1}}; \quad \delta_0 = \frac{U^*_{i+1,j} - U^*_{i,j}}{d_0}; \quad \delta_{+1} = \frac{U^*_{i,j} - U^*_{i-1,j}}{d_{+1}};$$

$$d_{-1} = x_{i+2} - x_{i+1}; \quad d_0 = x_{i+1} - x_i; \quad d_{+1} = x_i - x_{i-1}.$$

Схема (9) має більш високий порядок точності апроксимації порівняно з відомою схемою “проти потоку”

$$V^*_{i,j+1/2} U_{i+1/2,j} = V^*_{i,j+1/2} [(1-\beta) \cdot U_{i+1,j} + \beta \cdot U_{i,j}] \quad (10)$$

і при цьому зберігає позитивні властивості схеми (10) щодо стійкості обчислювальної процедури. Проте алгоритм розв’язання системи рівнянь, що складені за неявною схемою з використанням виразу (9), виявляється надто складним. Зважаючи на це, в [4] рекомендовано для визначення членів з дробовим індексом використовувати вираз вигляду

$$U_{i+1/2,j} = U^L_{i+1/2,j} + (U^{*H}_{i+1/2,j} - U^{*L}_{i+1/2,j}), \quad (11)$$

в якому члени з індексом (^L) розраховуються за формулою (10), а члени з індексом (^H) – за формулою (9). При цьому члени з індексом (^{*}) записуються за явною схемою, а без цього індексу – за неявною.

Після лінеаризації рівнянь (6), (7) (за схемою (8) з використанням виразів (9) – (11) та групування подібних членів) одержимо рівняння (6), (7) у вигляді:

$$a^U U_{i+1,j} + b_3^U U_{i,j+1} + b_2^U U_{i,j} + b_1^U U_{i,j-1} + c^U U_{i-1,j} + d_1^U P_{i,j-1} + d_2^U P_{i,j} + q_2^U V_{i,j+1} + q_1^U V_{i,j} + r_2^U V_{i-1,j+1} + r_1^U V_{i-1,j} = f^U \quad (12)$$

$$(1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N-1);$$

$$a^V V_{i+1,j} + b_3^V V_{i,j+1} + b_2^V V_{i,j} + b_1^V V_{i,j-1} + c^V V_{i-1,j} + d_1^V P_{i,j} + d_2^V P_{i+1,j} + q_2^V U_{i+1,j} + q_1^V U_{i+1,j-1} + r_2^V U_{i,j} + r_1^V U_{i,j-1} = f^V \quad (13)$$

$$(1 \leq i \leq M-1; 1 \leq j \leq N,$$

де M, N – кількість кроків розрахункової сітки по вертикальній та горизонтальній координатах відповідно.

Для розв'язання системи рівнянь (5), (12), (13) найчастіше використовується метод ітерацій. Найбільш поширеним з них є метод SIMPLER [5]. Перевагою ітераційних методів вважається їх відносна простота для реалізації на ЕОМ. Проте у ряді випадків збіжність ітераційного процесу буває надто повільною. Тому не втрачає актуальності розробка та удосконалення прямих методів розв'язання системи різницевих рівнянь. Через те, що коефіцієнти рівнянь (12), (13) самі залежать від невідомих величин, їх потрібно уточнювати шляхом ітерацій. Тому навіть у випадку стаціонарної задачі вихідні рівняння доцільно розглядати як нестационарні. При цьому кожний крок за часом можна вважати наступною ітерацією.

Треба зазначити, що система рівнянь (5), (12), (13), складених для всіх вузлів, не є лінійно незалежною [5]. Це є наслідком того, що функції швидкості на границі мають бути заданими з урахуванням інтегральної умови збереження маси для всієї області. Тому одне з рівнянь нерозривності (5) виявляється зайвим. Щоб уникнути некоректності в постановці задачі, потрібно замість рівняння (5) в деякому вузлі для $P_{i,j}$ задати значення цієї функції. При застосуванні прямого методу розв'язання системи різницевих рівнянь доцільно це зробити для деякого j при $i=1$. Якщо зазначений вузол сітки знаходиться біля ділянки границі розрахункової області, що містить аераційний проріз, то значення $P_{1,j}$ в цьому вузлі (за умов задачі) дорівнює нулю. В інших випадках значення $P_{1,j}$ береться спочатку довільне. Далі в

процесі розв'язування воно уточнюється шляхом корекції так, щоб задовольнити відповідні умови на ділянках тих аераційних прорізів, що розташовані на інших границях.

Запишемо систему рівнянь (12), (13) у векторній формі:

$$A^U U_{i+1} + B^U U_i + C^U U_{i-1} + D^U P_i + Q^U V_i + R^U V_{i-1} = F^U; \quad (14)$$

$(1 \leq i \leq M);$

$$A^V V_{i+1} + B^V V_i + C^V V_{i-1} + D^V P_i - D^V P_{i+1} + Q^V U_{i+1} + R^V U_i = F^V; \quad (15)$$

$(1 \leq i \leq M-1),$

де $U_i [1:N-1]; V_i [1:N]; P_i [1:N]$ – вектори, складовими яких є відповідні сіткові функції U_{ij}

$(1 \leq j \leq N-1); V_{ij}$ та $P_{ij} (1 \leq j \leq N)$ на i -му кроці по вертикалі; A, B, C, D, Q, R – матриці, що містять коефіцієнти відповідних рівнянь з урахуванням значень сіткової змінної γ_{ij} ; F – вектори правих частин рівнянь (12), (13).

Векторна форма рівняння (5) матиме вигляд

$$K^U U_i + K^V V_i + L^V V_{i-1} = 0, \quad (16)$$

де K, L – матриці коефіцієнтів рівняння (5).

Система векторних рівнянь (14) - (16) розв'язується методом матричної прогонки. Для цього приймаються наступні рекурентні співвідношення для невідомих векторів:

$$U_{i-1} = X^U_{i-1} \cdot U_i + Y^U_{i-1} \cdot V_i + Z^U_{i-1}; \quad (17)$$

$$V_{i-1} = X^V_{i-1} \cdot V_i + Y^V_{i-1} \cdot U_i + Z^V_{i-1}; \quad (18)$$

$$P_i = P'_i + P''_i; \quad (19)$$

$$P''_i = X^P_i \cdot U_i + Y^P_i \cdot V_i + Z^P_i,$$

де X, Y, Z – матриці та вектори, що підлягають визначенню.

Вектор P_i розглядається у вигляді суми двох векторів P'_i та P''_i , при цьому складові P'_{ij} дорівнюють нулю, якщо $\gamma_{i-1,j}=0$, та мають скінченні значення при $\gamma_{i-1,j}=1$. Складові вектора P''_i дорівнюють нулю при $\gamma_{i-1,j}=1$, а при $\gamma_{i-1,j}=0$ вони визначаються у вигляді лінійної залежності від U_j та V_j . Така форма співвідношення для P_i береться тому, що матриці X^P_i, Y^P_i та вектор Z^P_i зазвичай розраховуються на кроці $i-1$, а потім використовуються на кроці i . Якщо на кроці $i-1$ ряду вузлів сітки відповідають значення $\gamma_{i-1,j}=1$ (тобто вони належать до ділянок, що зайняті елементами обладнання), то в цих вузлах різниці рівняння у формі (5) - (7) не записуються і визначити з них співвідношення для P_{ij} неможливо. Тому деякі складові вектора P_i не можуть бути знайдені на кроці $i-1$ у формі лінійної залежності від U_i та V_i . Така залежність для них буде далі знайдена на наступному кроці.

На першому етапі матричної прогонки розраховуються невідомі матриці X, Y та вектори Z , що входять до виразів (17) - (19). Запишемо рівняння (15) з урахуванням співвідношень (18) - (19) та визначимо з нього вектор V_i . Отриманий вираз для V_i матиме вигляд:

$$V_i = S_1^V V_{i+1} + S_2^V U_{i+1} + S_3^V U_i + S_4^V P'_i + S_5^V P_{i+1} + \Phi^V, \quad (20)$$

де

$$S_1^V = -\Omega^V \cdot A^V; \quad S_2^V = -\Omega^V \cdot Q^V; \quad S_4^V = -\Omega^V \cdot D^V; \quad S_5^V = \Omega^V \cdot D^V;$$

$$S_3^V = -\Omega^V \cdot [R^V + C^V \cdot Y^V_{i-1} + D^V \cdot X^P_i];$$

$$\Phi^V = \Omega^V \cdot [F^V - C^V \cdot Z^V_{i-1} - D^V Z^P_i];$$

$$\Omega^V = [B^V + C^V \cdot X^V_{i-1} + D^V Y^P_i]^{-1}.$$

Підставимо співвідношення (17) - (19) у рівняння (14) та виконаємо відповідні перетворення з урахуванням виразу (20). З одержаного рівняння визначимо вектор U_i .

$$U_i = S_1^U U_{i+1} + S_2^U V_{i+1} + S_4^U P'_i + S_5^U P_{i+1} + \Phi^U, \quad (21)$$

де

$$S_1^U = -\Omega^U \cdot (A^U + S_3^U \cdot S_2^V); \quad S_2^U = -\Omega^U \cdot S_3^U \cdot S_1^V; \quad S_4^U = -\Omega^U \cdot (D^U + S_3^U \cdot S_4^V);$$

$$S_5^V = -\Omega^U \cdot S_3^U \cdot S_5^V; \quad S_3^U = Q^U + C^U \cdot Y^U_{i-1} + D^U \cdot Y^P_i + R^U \cdot X^V_{i-1};$$

$$\Phi^U = \Omega^V \cdot [F^U - C^U \cdot Z^U_{i-1} - D^U \cdot Z^P_i - R^U \cdot Z^V_{i-1} - S_3^U \cdot \Phi^V];$$

$$\Omega^U = [B^U + C^U \cdot X^U_{i-1} + D^U \cdot X^P_i + R^U \cdot Y^V_{i-1} + S_3^U \cdot S_3^V]^{-1}.$$

Підставляючи вираз (21) у співвідношення (20), матимемо:

$$V_i = G_1^V V_{i+1} + G_2^V U_{i+1} + G_4^V P'_i + G_5^V P_{i+1} + \Pi^V, \quad (22)$$

де

$$G_1^V = S_1^V + S_3^V S_2^U; \quad G_2^V = S_2^V + S_3^V S_1^U; \quad G_4^V = S_4^V + S_3^V S_4^U; \quad G_5^V = S_5^V + S_3^V S_5^U;$$

$$\Pi^V = \Phi^V + S_3^V \Phi^U.$$

Наступним етапом розрахунку є вилучення з виразів (21) та (22) векторів P'_i та P_{i+1} . Як це впливає з виразу (19), вектор P'_i буде в (21) та (22) лише тоді, коли хоча б одна з сіткових змінних $\gamma_{i-1,j}$ дорівнюватиме одиниці, тобто, якщо горизонталь сітки з номером $i-1$ перетинає ділянку розрахункової області, що зайнята обладнанням, а наступний вузол сітки з номером i належить області потоку. Для вилучення P'_i необхідно скористатися рівнянням нерозривності (5). Зважаючи на те, що складові вектора P'_i за визначенням дорівнюють нулю при $\gamma_{i-1,j} = 0$, рівняння (5) розглядатиметься не для всіх j ($1 \leq j \leq N$), а для тих $j_1 \leq j \leq j_2$, для яких $\gamma_{i-1,j} = 1$. Виходячи з цього, запишемо векторне рівняння (16) у вигляді:

$$\Gamma_{i-1} (K^U_i U_i + K^V_i V_i + L^V_i V_{i-1}) = 0; \quad (23)$$

де Γ_{i-1} - діагональна матриця, що містить відповідні значення сіткової змінної $\gamma_{i-1,j}$.

У рівняння (23) замість векторів U_i та V_i підставляються вирази (21), (22). Для V_{i-1} можна було б скористатися виразом (18), але, зважаючи на те, що вузлові точки сітки для функцій $V_{i-1,j}$ у цьому випадку належать поверхням обладнання, стінки або прорізу, замість V_{i-1} у рівняння (23) доречно підставити вектор V_{i-1}^Γ , всі складові якого дорівнюють нулю, крім тих, що містять задані значення $V_{i-1,j}$ на відповідній поверхні. Таким чином, з рівняння (23) після перетворень матимемо:

$$G_4^P P'_i = G_1^P U_{i+1} + G_2^P V_{i+1} + G_5^P P_{i+1} + \Pi^P, \quad (24)$$

де

$$G_1^P = -\Gamma_{i-1} \cdot (K^U_i \cdot S_1^U + K^V_i \cdot G_2^V);$$

$$G_2^P = -\Gamma_{i-1} \cdot (K^U_i \cdot S_2^U + K^V_i \cdot G_1^V);$$

$$G_5^P = -\Gamma_{i-1} \cdot (K^U_i \cdot S_5^U + K^V_i \cdot G_5^V);$$

$$\Pi^P = -\Gamma_{i-1} \cdot (K^U_i \cdot \Phi^U + K^V_i \cdot \Pi^V + L^V_i \cdot V^\Gamma_{i-1});$$

$$G_4^P = \Gamma_{i-1} \cdot (K^U_i \cdot S_4^U + K^V_i \cdot G_4^V).$$

З останнього виразу необхідно визначити вектор P'_i . Проте ранг матриці G_4^P буде такий самий, як і матриці Γ_{i-1} (в загальному випадку менший за N). Визначити P'_i шляхом обертання матриці G_4^P неможливо, бо вона містить суцільно нульові елементи у рядках з номерами j' , що не входять до інтервалу $j_1 \leq j \leq j_2$. Таку саму форму мають і інші матриці G^P , що входять до виразу (24). З означення вектора P'_i випливає, що його складові з номерами j' повинні дорівнювати нулю, тому у виразі (24) матрицю G_4^P можна замінити на $G_0^P = G_4^P + E - \Gamma_{i-1}$, ранг якої буде дорівнювати N (E – одинична матриця розміром $N \times N$). Така матриця G_0^P на головній діагоналі у строках з номерами j' буде містити замість нулів одиниці. Це еквівалентно тому, що у вузлах з номерами j' задаються рівняння виду $P'_{i,j'} = 0$. Тоді з перетвореного виразу (24) можна визначити вектор P'_i :

$$\mathbf{P}'_i = \mathbf{S}_1^P \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{S}_2^P \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{S}_5^P \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{\Phi}^P, \quad (25)$$

де $\mathbf{S}_1^P = (\mathbf{G}_0^P)^{-1} \mathbf{G}_1^P$; $\mathbf{S}_2^P = (\mathbf{G}_0^P)^{-1} \mathbf{G}_2^P$; $\mathbf{S}_5^P = (\mathbf{G}_0^P)^{-1} \mathbf{G}_5^P$; $\mathbf{\Phi}^P = (\mathbf{G}_0^P)^{-1} \mathbf{\Pi}^P$.

Виконавши перетворення виразів (21) та (22) з урахуванням (25), матимемо:

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{H}_1^U \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{H}_2^U \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{H}_5^U \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{\Theta}^U; \quad (26)$$

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{H}_1^V \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{H}_2^V \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{H}_5^V \mathbf{P}_{i+1} + \mathbf{\Theta}^V, \quad (27)$$

де

$$\mathbf{H}_1^U = \mathbf{S}_1^U + \mathbf{S}_4^U \mathbf{S}_1^P; \quad \mathbf{H}_1^V = \mathbf{G}_1^V + \mathbf{G}_4^V \mathbf{S}_2^P;$$

$$\mathbf{H}_2^U = \mathbf{S}_2^U + \mathbf{S}_4^U \mathbf{S}_2^P; \quad \mathbf{H}_2^V = \mathbf{G}_2^V + \mathbf{G}_4^V \mathbf{S}_1^P;$$

$$\mathbf{H}_5^U = \mathbf{S}_5^U + \mathbf{S}_4^U \mathbf{S}_5^P; \quad \mathbf{H}_5^V = \mathbf{G}_5^V + \mathbf{G}_4^V \mathbf{S}_5^P;$$

$$\mathbf{\Theta}^U = \mathbf{\Phi}^U + \mathbf{S}_4^U \mathbf{\Phi}^P; \quad \mathbf{\Theta}^V = \mathbf{\Pi}^V + \mathbf{G}_4^V \mathbf{\Phi}^P.$$

Для вилучення з виразів (26), (27) вектора \mathbf{P}_{i+1} скористаємося рівнянням нерозривності (5), але таким, що складене для вузлів з номерами $i+1$. Виходячи з того, що для деяких номерів j сіткові змінні $\gamma_{i+1,j}$ можуть дорівнювати одиниці, векторне рівняння (16) запишемо у вигляді:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma}_{i+1}) (\mathbf{K}_{i+1}^U \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{K}_{i+1}^V \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{L}_{i+1}^V \mathbf{V}_i) = 0. \quad (28)$$

Підставляючи \mathbf{V}_i з виразу (27) у (28), одержимо рівняння для визначення \mathbf{P}_{i+1} у вигляді:

$$\mathbf{H}_5^P \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{H}_1^P \mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{H}_2^P \mathbf{V}_{i+1} + \mathbf{\Theta}^P, \quad (29)$$

де $\mathbf{H}_1^P = -(\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma}_{i+1}) \cdot (\mathbf{K}_{i+1}^U + \mathbf{L}_{i+1}^V \cdot \mathbf{H}_2^V)$;

$\mathbf{H}_2^P = -(\mathbf{E} - \mathbf{\Gamma}_{i+1}) \cdot (\mathbf{K}_{i+1}^V + \mathbf{L}_{i+1}^V \cdot \mathbf{H}_1^V)$;

$$\Theta^j = -(E - I_{i+1}^-) \cdot L_{i+1}^V \Theta^V;$$

$$H_5^P = (E - \Gamma_{i+1}) \cdot L_{i+1}^V \cdot H_5^V.$$

Як це впливає з останніх виразів, деякі рядки матриць H^P , а саме ті, що мають номери j , для яких $\gamma_{i+1,j}=1$, можуть складатися виключно з нульових елементів. В такому випадку ранг матриці H_5^P буде меншим за N . Зважаючи на те, що складових вектора P_{i+1} з такими номерами за визначенням не існує, їх можна формально взяти будь-якими, наприклад такими, що дорівнюють нулю. Це дає можливість у рівнянні (29) замість матриці H_5^P використати матрицю $H_0^P = H_5^P + \Gamma_{i+1}$, ранг якої вже буде дорівнювати N . Таким чином, з перетвореного рівняння (29) матимемо:

$$P_{i+1} = X_{i+1}^P \cdot U_{i+1} + Y_{i+1}^P \cdot V_{i+1} + Z_{i+1}^P, \quad (30)$$

де $X_{i+1}^P = (H_0^P)^{-1} H_1^P$; $Y_{i+1}^P = (H_0^P)^{-1} H_2^P$; $Z_{i+1}^P = (H_0^P)^{-1} \Theta^P$.

Підставляючи P_{i+1} з виразу (30) у співвідношення (26) та (27), отримаємо:

$$U_i = X_i^U \cdot U_{i+1} + Y_i^U \cdot V_{i+1} + Z_i^U; \quad (31)$$

$$V_i = X_i^V \cdot V_{i+1} + Y_i^V \cdot U_{i+1} + Z_i^V, \quad (32)$$

де

$$X_i^U = H_1^U + H_5^U X_{i+1}^P; \quad Y_i^U = H_2^U + H_5^U Y_{i+1}^P; \quad Z_i^U = \Theta^U + H_5^U Z_{i+1}^P;$$

$$X_i^V = H_1^V + H_5^V Y_{i+1}^P; \quad Y_i^V = H_2^V + H_5^V X_{i+1}^P; \quad Z_i^V = \Theta^V + H_5^V Z_{i+1}^P.$$

З порівняння виразів (30)–(32) та (17)–(19) впливає, що співвідношення між невідомими векторами на кроках i та $i+1$ подібні до аналогічних співвідношень на кроках $i-1$ та i . Тобто ці співвідношення можна використовувати як рекурентні для розрахунку невідомих матриць X , Y та векторів Z для кожного кроку $i > 1$. Для $i=1$ X , Y та Z визначаються з граничних умов.

На другому етапі матричної прогонки розраховуються невідомі вектори U_i , V_i та P_i . Для цього використовуються рекурентні співвідношення (17)–(19). Виходячи з того, що вектори U_{M+1} , V_M (або відповідні співвідношення для них) мають бути відомими з граничних умов для $i = M$, можна за їх значеннями обчислити вектори на кроці $i = M-1$, а потім послідовно на всіх інших кроках до $i = 1$. Таким чином визначаються поля швидкостей та тиску для поточного моменту часу.

Знайдені U_{ij} та V_{ij} використовуються для розв'язку рівняння енергії (4), яке у різницевій формі має вигляд:

$$\begin{aligned} (T_{i,j} - T_{i,j}^*)/dF + (U_{i,j}T_{i,j+1/2} - U_{i,j-1}T_{i,j-1/2})/dX_j + (V_{i,j}T_{i+1/2,j} - V_{i-1,j}T_{i-1/2,j})/dY_i = \\ = [A_{i,j+1/2}(T_{i,j+1} - T_{i,j})/dX_{j+1/2} - A_{i,j-1/2}(T_{i,j} - T_{i,j-1})/dX_{j-1/2}]/dX_j + \\ + [A_{i+1/2,j}(T_{i+1,j} - T_{i,j})/dY_{i+1/2} - A_{i-1/2,j}(T_{i,j} - T_{i-1,j})/dY_{i-1/2}]/dY_i. \end{aligned} \quad (33)$$

Для різницевої апроксимації рівняння (4) використовуються ті самі вузли, що й для різницевого рівняння нерозривності (5), для яких характерним є те, що відстані між найближчими до поверхонь обладнання або огорож вузлами та самими поверхнями дорівнюватимуть половинам кроків по відповідних координатах. Зважаючи на це, граничні умови на вертикальних поверхнях у різницевій формі запишемо у вигляді:

- умови першого роду

$$(T_{i,j} + T_{i,j+1})/2 = T_w; \quad (34)$$

- умови другого роду

$$(T_{i,j} - T_{i,j+1})/dX_{j+1/2} = q_w / (C_p \rho u_0 A_{i,j+1/2}), \quad (35)$$

де j – номери найближчих до поверхні обладнання вузлів у просторі повітряного потоку, $j+1$ – номери наступних вузлів, що вже належать ділянці, зайнятій обладнанням, T_w – температура поверхні, q_w – густина теплового потоку, C_p – питома теплоємність повітря.

Аналогічно запишуться граничні умови на горизонтальних поверхнях. За допомогою виразів (34), (35) з рівняння (33) вилучаються сіткові функції температури для вузлів, що не належать до простору повітряного потоку. В

цих вузлах значення сіткові функції температури можуть бути будь-якими, наприклад нульовими, тому що на результати розрахунку вони вже не впливатимуть.

Використовуючи для апроксимації конвективних членів TVD метод з застосуванням виразів, аналогічних співвідношенням (9), (11) задачі руху, одержимо після перетворень рівняння (33) у такому вигляді

$$\text{для } \gamma_{ij} = 0: \quad a^T T_{i+1,j} + b_3^T T_{i,j+1} + b_2^T T_{i,j} + b_1^T T_{i,j-1} + c^T T_{i-1,j} = f^T; \quad (36)$$

$$\text{для } \gamma_i: \quad T_{i,j} = 0 \quad (1 \leq i \leq M; 1 \leq j \leq N).$$

У векторній формі ці рівняння матимуть вигляд:

$$A^T T_{i+1} + B^T T_i + C^T T_{i-1} = F^T \quad (37) \\ (1 \leq i \leq M).$$

де $T_i [1 : N]$ – вектори, складовими яких є сіткові функції T_{ij} ; A^T , B^T , C^T – матриці, що містять коефіцієнти рівнянь (37); F^T – вектор правих частин цих рівнянь.

Для розв'язку системи векторних рівнянь використовується матрична прогонка. Співвідношення між векторами T_i та T_{i-1} задаються у вигляді:

$$T_{i-1} = X^T_{i-1} \cdot T_i + Z^T_{i-1}; \quad (38)$$

При цьому вихідні значення X^T_0 та Z^T_0 можуть бути нульовими, тому що граничні умови для $i=1$ вже враховано у перетворених рівняннях (36). Виконавши підстановку виразу (38) у рівняння (37), одержимо вирази для розрахунку X^T_i та Z^T_i на будь-якому кроці i :

$$X^T_i = -\Omega^T A^T;$$

$$Z^T_i = \Omega^T (F^T - C^T Z^T_{i-1}),$$

де $\Omega^T = [B^T + C^T \cdot X^T_{i-1}]^{-1}$.

Після визначення матриць X^I_i та векторів Z^T_i за співвідношеннями (38) розраховуються вектори T_i . Таким чином визначається поле температур на поточному часовому кроці. На наступному часовому кроці, після коригування коефіцієнтів різницевих рівнянь, обчислювальна процедура повторюється.

Викладеним методом проведено числове моделювання повітряно-теплого режиму приміщення головного корпусу ТЕС. Результати моделювання наведено в статті В.П. Корбути “Формування теплових умов та повітряного режиму в теплонапружених відділеннях ТЕС та АЕС”, що опублікована в цьому збірнику. Задача розглядалася як стаціонарна. Її розв’язок виконувався на сітці з кількістю вузлів 111×72 . Для одержання кінцевого результату достатньо було здійснити 27 ітерацій. Ці результати задовільно узгоджуються з результатами фізичного моделювання.

Інший приклад розглянуто на рисунках 1, 2, де відображено поля швидкостей і температур в електротехнічному приміщенні, що має розміри вертикального перерізу $4,5 \times 6$ м. Джерелами теплонадходження є вертикальні стативи з електронним обладнанням. Охолодження приміщення проводиться шляхом подачі повітря, що має температуру 16°C , через повітропровід, який розміщено у верхній частині приміщення. Швидкість повітря на виході з повітропроводу становить $2,8$ м/с. Густина теплового потоку на поверхнях стативів $q = 150$ Вт/м². Надлишкове тепло з приміщення видаляється з повітряним потоком, що виходить через проріз в нижній частині лівої огорожі. Значення швидкостей повітряного потоку (м/с) в об’ємі приміщення відображені на відповідних ізотермах рисунка 1, а значення температури ($^\circ\text{C}$) – на відповідних ізотермах рисунка 2.

Задача розв’язується як двовимірною на сітці з кількістю вузлів 67×90 . Коефіцієнти турбулентного перенесення обчислюються із застосуванням k - ϵ моделі турбулентності [6]. В результаті розв’язання задачі визначено області, в яких температура і швидкість повітря мають максимальні і мінімальні значення. Знайдено також розподіл температури по поверхнях стативів. (В даному випадку температура поверхні не перевищує 29°C .) Виходячи з одержаних результатів, можна зробити висновок про відповідність параметрів повітряно – температурного режиму в приміщенні

нормативним показникам, а також про працездатність прийнятої системи організації повітрообміну.

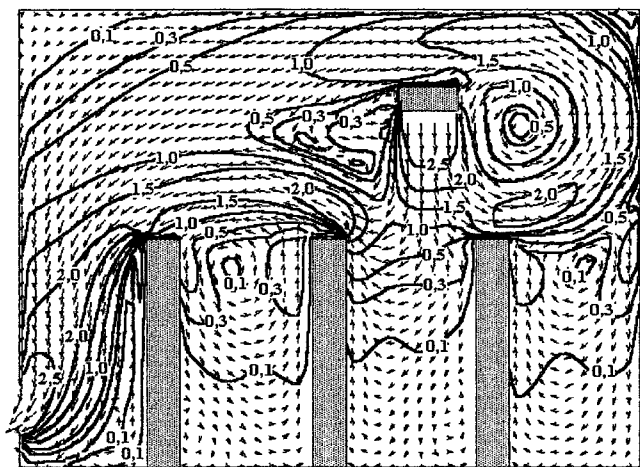


Рис. 1. Поле швидкостей повітряного потоку в електротехнічному приміщенні

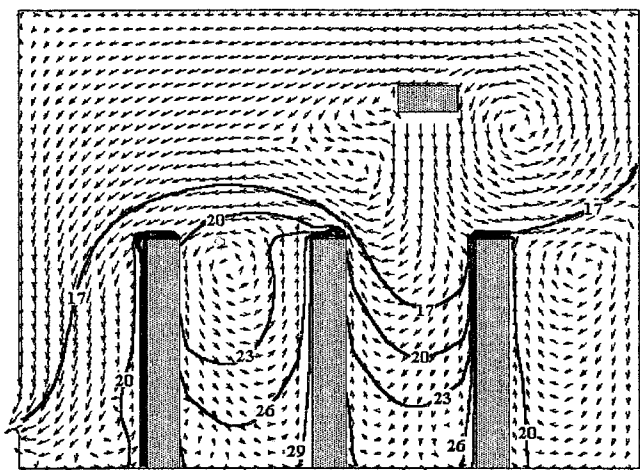


Рис. 2. Температурне поле повітряного потоку в електротехнічному приміщенні

ВИСНОВКИ

1. Для двовимірних задач течії повітря, що супроводжується конвективним теплообміном, розроблено прямий метод розв'язання відповідних скінченно-різницевих рівнянь. Метод придатний для одержання розв'язків задач в одно- та багатозв'язних областях за будь-яких граничних умов.
2. На відміну від багатьох відомих методів розв'язання різницевих рівнянь перенесення імпульсу, розроблений прямий метод дає змогу на кожному ітераційному кроці отримувати розв'язок всієї системи лінеаризованих рівнянь перенесення разом з рівнянням нерозривності. При цьому ітерації виконуються лише для уточнення значень коефіцієнтів лінеаризованих рівнянь. Застосування цього методу дає можливість одержувати розв'язання задачі з мінімальною кількістю ітерацій при гарантованій стійкості обчислювального процесу.
3. До недоліків прямого методу можна віднести відносну складність розрахункового алгоритму та потребу в значному об'ємі оперативної пам'яті ЕОМ при його реалізації.
4. Розроблений метод застосовується для дослідження повітряно-теплових режимів у приміщеннях, що містять джерела теплонадходження. Аналіз результатів числового розв'язку задачі дає можливість оцінити працездатність системи організації повітрообміну. В загальному випадку вибір найбільш придатної системи виконується на основі результатів варіантних розрахунків.

Список літератури

1. **Пейре Р., Тейлор Т. Д.** Вычислительные методы в задачах механики жидкости. – Л.: Гидрометеиздат, 1986.– 352 с.
2. **Zijlema M., Wesseling P.** Higher order flux-limiting methods for steady-state, multidimensional, convection-dominated flow / Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-95- 131, 1995. – 28 p.
3. **Приходько А.А., Кудинов П.И.** Численное моделирование устойчивой и неустойчивой термогравитационной циркуляции в замкнутых объемах

произвольного поперечного сечения // Тепломассоперенос – 2000, Минск, АНК «ИТМО им. А.В. Лыкова» НАНБ, 2000.– т.1 С. 36–43.

4. **Khosla P. K., Rubin S. G.** A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. // Comput.Fluids.– 1974.– V.2.– P. 207–209.

5. **Патанкар С.** Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

6. **Фрост У., Моуден Т.** (ред.) Турбулентность. Принципы и применения. – М.: Мир, 1980. – 536 с.

УДК 629.113.06:628.83

С.С. Жуковський, кандидат технічних наук, доцент

П.Л.Зінич, кандидат технічних наук, доцент

О.В.Черноус, інженер-магістр

О.Р. Кулиняк, інженер

НУ «Львівська політехніка»

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВІТРЯНИХ ПОТОКІВ МІСЦЕВИХ ВСМОКТУВАЧІВ

Виконано експериментальні дослідження розподілення швидкостей і статичних тисків повітряних потоків місцевих всмоктувачів різної поперечної форми. Виявлено, що зона дії статичних тисків є меншою за зону дії відносних швидкостей при їх взаємопов'язаності.

Зіставлення результатів досліджень ефективності роботи місцевих всмоктувачів показало найвищу ефективність еліптичних всмоктувачів.

Наведено аналітичні залежності для розрахунку основної швидкості і довжини зони дії місцевих всмоктувачів, що дає змогу оптимізувати їх як за кількістю всмоктуваного повітря, так і за конструктивною формою.

Локалізація шкідливостей у місці їх виділення і мінімізація забруднення внутрішнього повітря приміщень є завданням місцевих систем вентиляції (СВ). Одним з найважливіших елементів цих СВ є всмоктувачі. Їх конструкція, за ефективних аеродинамічних характеристик, повинна забезпечувати якомога більшу зону дії при мінімальній кількості всмоктуваного повітря. Відомі конструкції місцевих всмоктувачів не завжди відповідають цим вимогам.