УДК 697.92

А. Я. Ткачук, *професор*
Київський національний
університет будівництва
і архітектури

РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ УСЕРЕДНЕНОГО РУХУ В ТУРБУЛЕНТНІЙ ЗОНІ ПЛОСКИХ І ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ПРИСТІННИХ ПРИМЕЖОВИХ ШАРІВ

Пристінні примежові шари — це тонкі зони течій, що формуються поблизу поверхонь (стінок) твердих тіл, в яких реалізується різниця між швидкостями тіла і рідини, що його оточує. Малі товщини примежових шарів порівняно з їх довжинами дозволяють значно спрощувати рівняння руху, що їх описують. Вперше спрощення рівнянь руху в'язкої рідини стосовно двомірних примежових шарів було здійснено Прандтлем. Система рівнянь Прандтля при ламінарному режимі руху щодо простих початкових і граничних умовах дозволяє отримувати інтегральні залежності розподілу швидкості за товщиною примежового шару, а також коефіцієнта гідравлічного опору тертя від числа Рейнольдса. Але після втрати в примежовому шарі стійкості руху і переходу до невпорядкованого турбулентного режиму визначення аналогічних інтегральних залежностей суттєво ускладнюється.

Первісно ламінарний режим руху в примежовому шарі утримується лише до тих пір, доки його товщина не досягне значення, при якому рух втрачає стійкість. Втрата рухом стійкості зумовлює розпад примежового шару на вихори, які під впливом ефекту Магнуса переміщуються в поперечному до стінки напрямку. На вивільнені ними місця до стінки надходить рідина, із якої заново формуються ділянки ламінарного примежового шару. Почерговість процесів формування і розпаду ламінарних ділянок течій зумовлює двоякий (переміжний) режим руху в примежовому шарі.

Із зростанням числа Рейнольдса товщина ділянок з ламінарним режимом руху зменшується і згодом стає значно меншою товщини примежового шару.

В пристінних примежових шарах з розвинутим турбулентним рухом прийнято розрізняти турбулентне ядро, товщина якого практично співпадає з товщиною примежового шару, і тонкий підшар біля стінки, в якому спостерігається переміжний режим руху.

Формування і розпад ламінарних ділянок течій в межах пристінного підшару супроводжується перерозподілом кількості руху між його поступальною і обертальною складовими. Перерозподіл кількості руху у молів рідині, які беруть участь в процесах формування і розпаду на вихорі ламінарних ділянок течій, зумовлює зміни (пульсації) їх компонентів швидкості. Пульсації швидкості призводять до пульсацій тиску та інших гідродинамічних величин.

Нерегулярність генерованих у в'язкому пристінному підшарі пульсацій гідродинамічних величин вимагає опису руху в турбулентних примежових шарах з використанням теорії ймовірності. Серед ймовірнісних характеристик гідродинамічних величин, що безладно пульсують, найбільш доцільно користуватися їх моментами розподілу ймовірності. Саме в цьому разі можливо невпорядкований турбулентний рух розглядати як такий, що складається з регулярного усередненого і накладеного на нього невпорядкованого пульсаційного.

Гідродинамічні величини усередненого руху оцінюються їх статистично точними першими моментами розподілу ймовірності, тобто їх середніми значеннями, а пульсаційного — рештою їх можливих моментів розподілу ймовірності.

Прийнято користуватися математичною моделлю турбулентного руху у вигляді нескінченної системи рівнянь Фрідмана-Келера, яка утримує безліч моментів розподілу ймовірності компонентів швидкості. Через незамкненість будь-якої з підсистем цих рівнянь неможливо отримати на їх основі не тільки загальне, але навіть часткове теоретичне рішення турбулентного руху. Неможливість загального рішення проблеми турбулентності спонукала до відокремленого дослідження усередненого і пульсаційного рухів.

При дослідженні усередненого турбулентного руху прийнято користуватися рівняннями Рейнольдса, які є першою підсистемою рівнянь Фрідмана-Келера. Рівняння Рейнольдса отримані ним шляхом усереднення рівнянь руху в'язкої рідини, в яких компоненти швидкості подані у вигляді суми їх усереднених і пульсаційних складових. Після усереднення цих рівнянь в рівняннях усередненого турбулентного руху з'явився додатковий тензор так званих турбулентних (пульсаційних) напружень, який містить усереднені добутки відповідних компонентів пульсаційних складових швидкості. Оскільки детермінованих зв'язків між усередненими і пульсаційними складовими швидкості не існує, суто теоретичне рішення усередненого турбулентного руху на базі рівнянь Рейнольдса неможливе. Сучасні рішення усередненого турбулентного руху на основі рівнянь Рейнольдса є напівемпіричними, оскільки в них компоненти пульсаційних складових швидкості або їх усереднені добутки подаються через відповідну похідну компоненти усередненої складової швидкості і характерний для течії розмір, з посиланням на почерпнуті із дослідів гіпотези або на підставі аналізу розмірностей. Існують також рішення усередненого турбулентного руху, в яких в'язкість подається у вигляді двох складових: молекулярної та турбулентної. Значення останньої визначається через добуток характерної для течії швидкості на характерний розмір течії або відстань від межі розподілу середовищ, що взаємодіють. Вважається також, що турбулентну в'язкість можливо визначити через інтенсивність пульсаційного руху і таким чином більш узагальнити напівемпіричні рішення усередненого турбулентного руху.

У відомих напівемпіричних теоріях усередненого руху характеристики пульсаційного руху довільно замінюються на характеристики усередненого руху. Фактично посилання на пульсаційний рух в цих теоріях використовується для інтерпретації таких гіпотетичних уявлень, як шлях змішування, турбулентні (пульсаційні) напруження та турбулентна в'язкість. Введення таких уявних понять дало змогу зблизити методології опису турбулентних і ламінарних течій, що, безумовно, є позитивним чинником, але разом з цим послабило увагу дослідників до фізичного аналізу процесу формування усередненого руху.

Те що, незважаючи на нехтування кількісним аналізом пульсаційного руху, напівемпіричні теорії усередненого руху дають можливість отримувати узагальнені характеристики останнього, дає підставу для пошуку опису усередненого руху без посилок на пульсаційний рух, що його супроводжує. Визнання можливості такого опису усередненого руху є одночасно визнанням, що цей рух, маючи статистичне походження, підпорядковується закономірностям класичної гідродинаміки, тобто цей рух є своєрідним гідродинамічним феноменом.

Подання сутності опису усередненого руху на підставі положень класичної гідродинаміки розпочнемо на прикладі пристінного турбулентного примежового шару, що формується біля плоскої пластини, яка обтікається в поздовжньому напрямку рівномірним потенціальним потоком.

Спочатку розглянемо механізм формування усередненого руху в даному примежовому шарі. У в'язкому підшарі внаслідок протидії поступальному рухові в'язких дотичних йому напружень відбувається епізодичне формування ділянок ламінарних примежових підшарів, які при втраті в них стійкості руху трансформуються у вихрові шнури. У формуванні цих первісних вихрових шнурів сили в'язкості беруть безпосередню участь і фактично визначають їх інтенсивність. Оскільки первісні вихроутворення гідродинамічно відокремлюються від оточуючої рідини, то їх можливо розглядати як сторонні тіла, які під впливом поперечної сили (ефекту Магнуса) відокремлюються від пластини і переміщуються в турбулентне ядро примежового шару. Подальша їх взаємодія між собою і потенціальним потоком призводить до формування вторинних структур, завдяки яким здійснюється поперечне молярне перенесення імпульсу, теплоти і домішок.

Формування вторинних вихрових структур в турбулентному ядрі примежового шару здійснюється силами інерційного походження.

Опосередкований вплив в'язкості (через інтенсивність первісних вихорів) на формування вихрових структур в турбулентному ядрі примежового шару дає підставу при описі в ньому усередненого руху посилатися на теореми вихрового руху ідеальної рідини.

З метою визначення граничних умов для турбулентного ядра доцільно підшар подати у вигляді щільного вихрового прошарку (пелени). Така схематизація підшару не суперечить епізодичному існуванню в підшарі первісних вихрових шнурів, а, головне, дозволяє зблизити подання граничних умов при взаємодії пластини з реальною й ідеальною рідиною, замінивши в останньому випадку розрив дотичної складової швидкості біля пластини вихровим прошарком.

Оскільки інтенсивність вторинних вихрових структур визначається через інтенсивність первісних вихорів, що продукуються у в'язкому підшарі, то подання останнього у вигляді стійкого вихрового прошарку рівнозначне зосередженню в прошарку загального наслідку взаємодії потенціального потоку і поверхні пластини.

При течії ідеальної рідини вихровим шнурам вихрового прошарку біля поверхні пластини, що імітує поверхню розриву дотичної складової швидкості, можливо надати статусу особливостей, які здатні викликати (індукувати) відповідний їм потенціальний потік. Це твердження випливає із теореми гідродинаміки ідеальної рідини: "... всякий безперервний потенціальний рух нестисливої рідини, що заповнює довільну область, можливо розглядати як такий, що викликаний відповідним розподілом вихорів по поверхні, що обмежує цю область" [1].

У примежовому шарі біля плоскої пластини граничні умови в поздовжньому напрямку не змінюються. Це дає підставу подати вихровий прошарок у вигляді щільно розташованих однакових вихрових шнурів. Як відомо, такий нерухомий прошарок викликає (індукує) по обидва від себе боки протилежно спрямовані потенціальні течії з абсолютними значеннями швидкості

$$V = \frac{1}{2}\frac{\Gamma}{a} = \frac{1}{2}\pi V_{об}, \tag{1}$$

де $\Gamma = \pi d V_{об}$ — циркуляція лінійної швидкості обертання вихрових шнурів $V_{об}$, що мають діаметр d; a — відстань між центрами вихрових шнурів, яка при щільному їх розташуванні дорівнює їх діаметрам d.

При розташуванні вихрового прошарку біля твердої поверхні, як це має місце в нашому прикладі, він з причини неможливості викликати зворотний рух рідини біля поверхні пластини змушений сам переміщуватися в тому ж напрямку, що й індукований ним потенціальний потік з протилежного боку і з тією ж швидкістю. Таким чином, загальна швидкість потенціального потоку, індукованого вихровим прошарком, що розташований біля поверхні пластин, дорівнює:

$$V_m = \pi V_{об}. \tag{2}$$

При течіях реальної рідини ковзання вихрових шнурів по поверхні пластини неможливе. Співпадання швидкості рідини вихорів на поверхні пластин зі швидкістю пластини можливе при котінні вихорів по поверхні пластини. При дотриманні цієї умови швидкість поступального руху вихрового прошарку $V_{пр}$ буде дорівнювати лінійній швидкості обертання вихрових шнурів, тобто

$$V_{пр} = V_{об}. \tag{3}$$

Швидкість поступального руху вихрових шнурів $V_{пр}$, якою вони володіють при відокремленні їх від пластини, відповідає усередненій швидкості на границі розподілу примежового шару на підшар і турбулентне ядро $V_{гр}$.

З урахуванням приведених роз'яснень, а також залежностей (2) і (3) отримаємо:

$$\frac{V_{гр}}{V_m} = \frac{1}{\pi}. \tag{4}$$

Таким чином, схема обтікання пластини ідеальною рідиною при подачі розриву дотичної складової швидкості біля пластини вихровим прошарком дала змогу встановити числове значення відношення швидкостей на протилежних границях турбулентного ядра примежового шару. Ряд дослідників турбулентного руху в примежових шарах пропонують відношення цих швидкостей за експериментальними даними приймати як 1/3.

Відношення (4) визначається через число π. Зумовлено це тим, що частинки рідини потенціального потоку, які володіють лише поступальним рухом, у в'язкому підшарі набувають обертальний рух, що призводить до відповідного зменшення їх швидкості поступального руху.

У сучасних напівемпіричних теоріях усередненого турбулентного руху в пристінних примежових шарах вважається, що

$$V_{\text{гр}} = NV_*, \tag{5}$$

де N — коефіцієнт пропорціональності; $\sqrt{\dfrac{\tau_0}{\rho}} = V_*$ — динамічна швидкість; τ_0 — в'язке дотичне напруження біля поверхні пластини; ρ — густина рідини.

Коефіцієнт N прийнято вважати сталим, хоча за даними експериментів його значення знаходиться в межах від 6 до 10.

Якщо в (5) $V_{\text{гр}}$ прийняти у відповідності з (4), то отримаємо:

$$N = \frac{V_{\text{гр}}}{V_*} = \frac{1}{\pi}\frac{V_m}{V_*} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{c}}\ , \tag{6}$$

оскільки, як відомо,

$$\frac{V_m}{V_*} = \sqrt{\frac{2}{c}}\,, \tag{7}$$

де c — локальне значення коефіцієнта опору тертя.

Із залежності (6) випливає, що коефіцієнт N є функцією коефіцієнта опору тертя, а не сталою величиною.

Усереднене значення товщини в'язкого підшару $\Delta_{\text{л}}$ при необхідності можливо визначити із залежності

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{V_*^2}{\nu} = \frac{V}{y} = \frac{V_{\text{гр}}}{\Delta_{\text{л}}}\,, \tag{8}$$

де μ і ν — коефіцієнти, відповідно динамічної і кінематичної в'язкості рідини.

Якщо підставити залежність (6) у (8) отримаємо:

$$\Delta_л = \frac{V_{гр}}{V_*}\frac{\nu}{V_*} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{c}}\frac{\nu}{V} = N\frac{\nu}{V_*}. \tag{9}$$

Визначення товщини ламінарних ділянок в'язкого підшару необхідно при аналізі впливу шорсткості пластини на опір тертя, а також впливу числа Прандтля чи числа Шмідта на процеси відповідно тепло- чи масообміну в турбулентному примежовому шарі.

При описі гідродинаміки усередненого руху в турбулентному ядрі відлік ординати (y) доцільно здійснювати від поверхні розподілу його і в'язкого підшару. Цю поверхню можливо розглядати як уявну пластину, яка рухається в напрямку течії з швидкістю $V_{гр}$, але зберігає дотичне напруження реальної пластини, тобто τ_0.

Для передачі від ядра потоку уявній пластині імпульсу по величині рівного τ_0 необхідно, щоб біля пластини знаходився вихровий прошарок, який би викликав додатково до $V_{гр}$ швидкість рівну V. Зумовлено це тим, що при встановленні $V_{гр}$ не враховувалась втрата імпульсу ядром потоку рівного τ_0. У відповідності з залежністю (2) таку швидкість викликає вихровий прошарок, в якого вихрові шнури мають лінійну швидкість обертання рівну $\frac{1}{\pi}V_*$. Товщина в'язкого підшарку турбулентного ядра, а не підшарку примежового шару у відповідності з залежністю (8) буде становити $\frac{1}{\pi}\frac{\nu}{V_*}$.

Якщо врахувати наведені роз'яснення, граничні умови для турбулентного ядра з боку пристінного підшару мають вигляд:
при

$$y = \Delta_*^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\pi}\frac{\nu}{V_*}\mathrm{V}; \tag{10}$$

$$V = V_{гр}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\pi}(V_m + V_*). \tag{11}$$

Оскільки V_* становить лише 3,5—4,5 відсотка від V_m, то залежність (11) можливо спростити:

$$V_{гр}^{\mathrm{T}} = \frac{1{,}04}{\pi}V_m = \frac{1}{3}V_m. \tag{12}$$

Як уже зазначалося, вихровий стан руху в турбулентному ядрі підтримується завдяки продукуванню усередненим рухом первісних вихорів. Наявність прямих зв'язків між усередненим рухом і вихровим станом руху дає змогу визначити інтенсивність завихрень або циркуляцію швидкості на відповідних відстанях від прошарку первісних завихрень через згадані відстані, усереднені швидкості і їх похідні в такому вигляді:

$$I \sim y^2 \frac{dV}{dy}; \qquad \Gamma \sim yV, \tag{13}$$

де I — інтенсивність вихорів, що викликають швидкість усередненого руху на відстані y; y — відстань від межі розподілу турбулентного ядра і в'язкого підшару; V — усереднена швидкість на відстані y; $\frac{dV}{dy}$ — перша похідна усередненої швидкості; Γ — циркуляція швидкості по оточуючому контуру тих вихорів, що викликають швидкість осередненого руху на відстані y.

Якщо зіставити інтенсивність вихорів з турбулентною в'язкістю, то отримаємо рівняння

$$\tau_0 = \rho(\chi y)^2 \left(\frac{dV}{dy} \right)^2, \tag{14}$$

з якого випливає

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{\chi} \frac{V_*}{y}. \tag{15}$$

Рівняння (15) відповідає широковідомому логарифмічному закону розподілу усереднених швидкостей в пристінних турбулентних примежових шарах. У рівнянні (14) χ — коефіцієнт пропорційності, що визначається дослідним шляхом і вважається однією із констант турбулентності пристінних примежових шарів.

Подальший аналіз залежності (15) ми не виконуємо, оскільки він достатньо ґрунтовно розглянутий в літературних джерелах. Мета його подання лише в тому, щоб показати можливість отримання логарифмічного розподілу усереднених швидкостей при використанні поняття інтенсивності вихорів, а не уявної турбулентної в'язкості.

При розгляді усередненого руху в турбулентному ядрі з урахуванням його вихрового стану доцільно зіставляти інтенсивність завихрень з циркуляцією швидкості, оскільки ці величини є однорідними кінематичними характеристиками вихрових течій. У відповідності з пропорціями (13) наведені вище міркування дають змогу скласти рівняння

$$\frac{dV}{dy} = n\frac{V}{y}, \tag{16}$$

де n — узагальнений коефіцієнт пропорціональності.

Оскільки інтенсивність завихрень і циркуляція швидкості — величини рівнозначні, то коефіцієнт n буде постійним на всьому перерізі турбулентного ядра.

Надамо рівнянню (16) зручного для інтегрування вигляду:

$$\frac{dV}{V} = n\frac{dy}{y}. \tag{17}$$

Інтегрування рівняння (17) з урахуванням значень V та y на протилежних межах турбулентного ядра дозволяє встановити степеневі закономірності розподілу усередненої швидкості за ординатою (y):

$$V = V_m\left(\frac{y}{\delta}\right)^n \tag{18}$$

і

$$V = V_{\text{гр}}^{\text{T}}\left(\frac{y}{\Delta_*^{\text{T}}}\right)^n. \tag{19}$$

Якщо врахувати (7), (10) і (12), то рівнянню (19) можна надати такий вигляд:

$$V = V_* \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{c}}\pi^2\left(\frac{yV_*}{\nu}\right)^n. \tag{19$'$}$$

Оскільки, як буде встановлено далі, $\sqrt{c} = 0{,}45n$, то рівняння (19′) можна подати ще і так:

$$V = V_* 1{,}0405\frac{\pi^n}{n}\left(\frac{yV_*}{\nu}\right)^n. \tag{19$''$}$$

При $n = \frac{1}{7}$ отримаємо

$$V = 8{,}6V_*\left(\frac{yV_*}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}. \tag{20}$$

Формула (20) відрізняється від відомої експериментальної залежності лише числовим значенням коефіцієнта, який в останній приймається рівним 8,74, що на 1,5 відсотка більше його значення, отриманого аналітичним шляхом.

Надання рівнянню (19) вигляду (20) зроблено лише з метою експериментального підтвердження прийнятності зроблених посилок при аналітичному встановленні граничних умов для турбулентного ядра з боку в'язкого підшару.

При зіставленні (18) і (19) отримаємо рівняння

$$\frac{V_{\text{гр}}}{V_m} = \left(\frac{1}{\pi}\frac{\nu}{V_*\delta}\right)^n = \frac{1}{3}, \tag{21}$$

яке дозволяє встановити залежність показника степеня n від числа Рейнольдса $\frac{V_*\delta}{\nu}$.

Для встановлення залежності показника степеня n від відношення $\frac{V_*}{V_{\text{гр}}}$, яке у відповідності з залежністю (6) є функцією коефіцієнта опору тертя, скористаємося рівністю похідних усередненої швидкості $\frac{dV}{dy}$ при $y \to 0$, при турбулентному і ламінарному режимах руху.

Згідно з рівнянням (16) при турбулентному режимі руху

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)^{\text{Т}}_{y\to 0} = n\frac{V_{\text{гр}}}{y}. \tag{22}$$

При ламінарному режимі руху мінімальна швидкість, завдяки якій передається імпульс від потоку стінці, що дорівнює τ_0, становить величину V_*. Таким чином

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)^{Л}_{y\to 0} = \frac{V_*}{y}. \tag{23}$$

При порівнянні правих частин рівнянь (22) і (23) отримаємо

$$n = \frac{V_*}{V_{\text{гр}}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{c} = 2{,}22\sqrt{c} \tag{24}$$

і відповідно

$$\sqrt{c} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}n = 0{,}45n \tag{25}$$

та

$$V_* = nV_{\text{гр}} = \frac{n}{\pi}V_m. \tag{26}$$

Якщо в рівнянні (21) V_* прийняти у відповідності з (26) отримаємо

$$\frac{1}{3\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{\nu}{V_m\delta}\right)^n = \left(\frac{1}{\text{Re}_\delta}\right)^n, \tag{27}$$

де Re_δ — число Рейнольдса примежового шару.

Значення величини $\left(\frac{1}{n}\right)^n$ змінюється від 1,32 при $n = \frac{1}{7}$ до 1,22 при $n = \frac{1}{13}$, а тому його можливо прийняти сталим, що дорівнює 1,27, без суттєвого впливу на кінцевий результат. З урахуванням такого спрощення отримаємо

$$\frac{1}{3{,}8} = \left(\frac{1}{\text{Re}_\delta}\right)^n. \tag{27'}$$

Якщо в рівнянні (27′) значення n прийняти за залежністю (24), то після логарифмування цього рівняння отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{\lg \text{Re}_\delta}{\lg 3{,}9} = 3{,}83\ \lg \text{Re}_\delta. \tag{28}$$

Через складнощі визначення фактичної товщини примежового шару δ її прийнято визначати через такі інтегральні характеристики примежового шару, як товщина витіснення δ^*, або товщина втрати імпульсу δ^{**}. При степеневому законі розподілу усередненої швидкості за товщиною примежового шару (залежність (24) вирази фактичної його товщини через згадані вище товщини мають такий вигляд:

$$\delta = \frac{n+1}{n}\delta^* \tag{29}$$

та

$$\delta = \frac{n+1}{n}(2n+1)\,\delta^{**}. \tag{30}$$

Якщо в залежностях (29) і (30) значення n прийняти за залежністю (24), то одержимо

$$\delta = \frac{\left(\sqrt{c} + \sqrt{2}/\pi\right)}{\sqrt{c}}\delta^* \qquad (29')$$

та

$$\delta = \frac{\left(\sqrt{c} + \sqrt{2}/\pi\right)}{\sqrt{c}}\left(\sqrt{2}\pi\sqrt{c} + 1\right)\delta^{**}. \qquad (30')$$

Товщину втрати імпульсу при користуванні інтегральним рівнянням імпульсів можна визначити через довжину примежового шару. Так при незмінній швидкості потенціального потоку вздовж пластини і турбулентному стані руху в примежовому шарі з самого початку його формування зв'язок між товщиною втрати імпульсу і відстанню від переднього ребра пластини X має вигляд

$$\delta^{**} = \frac{c}{2}X. \qquad (31)$$

Із (30) і (31) знайдемо

$$\frac{\delta}{X} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\left(\sqrt{c} + \frac{2}{\pi}\right)}{\sqrt{c}}\left(\sqrt{2}\pi\sqrt{c} + 1\right)\frac{c}{2}, \qquad (32)$$

де α — кут розширення примежового шару.

Рівнянню (32) з урахуванням (24) можна надати такий вигляд:

$$\frac{\delta}{X} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{n+1}{n}(2n+1)\left(\frac{n}{\pi}\right)^2. \qquad (32')$$

Варто уваги, що при $n = \frac{1}{7}$ залежність (32')

$$\frac{\delta}{X} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{49} = n^2.$$

При $n < \frac{1}{7}$ значення $\operatorname{tg}\alpha$ дещо більше ніж n^2. Проте слід пам'ятати, що залежність (32) отримана на основі інтегрального рівняння імпульсів, яке рекомендується для застосування при наближених розрахунках примежового шару. При цьому його застосування при розрахунках турбулентних примежових шарів менше обґрунтовано ніж при розрахунках ламінарних примежових шарів.

З урахуванням вищенаведених міркувань залежності (32') надамо простий вигляд

$$\frac{\delta}{X} = \operatorname{tg}\alpha = n^2 = \left(\frac{V_*}{V_{\text{гр}}}\right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho V_{\text{гр}}^2}. \tag{33}$$

Із рівняння (33) випливає, що тангенс кута розширення примежового шару дорівнює відношенню дотичного напруження на межі розподілу турбулентного ядра і пристінного підшару до кількості руху на цій межі в поздовжньому напрямку.

Рівняння (33) з врахуванням (24) дозволяє товщину примежового шару подати в такому вигляді:

$$\delta = n^2 X = \frac{\pi^2}{2} cX = 4{,}93 cX. \tag{34}$$

Якщо в рівнянні (28) товщину примежового шару прийняти у відповідності з (34), то отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = 3{,}76 \lg 4{,}93 \mathrm{Re}_x c = 3{,}83 \lg \mathrm{Re}_x c + 2{,}5. \tag{35}$$

Значення c, отримані за формулою (35), практично співпадають з відомою формулою Кармана

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = 4{,}15 \lg \mathrm{Re}_x c + 1{,}7. \tag{36}$$

В (35) і (36) $\mathrm{Re}_x = \dfrac{V_m X}{\nu}$, число Рейнольдса визначене за швидкістю потенціального потоку і довжиною примежового шару.

Просте фізичне тлумачення залежності (33) і співпадання отриманого на її основі рішення з експериментальними даними дає підставу для її використання в інженерних розрахунках.

Завершуючи розгляд усередненого руху в турбулентному ядрі примежового шару біля плоскої пластини зробимо деякі узагальнення.

Запропонована нами розрахункова модель дала змогу аналітичним шляхом встановити закономірності усередненого руху, розрахунки за якими практично співпадають з експериментальними даними. Посилки, що покладені в основу цієї моделі, мають більш реалістичне фізичне обґрунтування, ніж посилки відомих напівемпіричних рішень усередненого турбулентного руху в примежових шарах. Ми усвідомлюємо, що приведені тлумачення деяких із прийнятих нами посилок можливо подати в більш досконалому вигляді. Проте для цього необхідні додаткові теоретичні і експериментальні дослідження усередненого турбулентного руху при складніших граничних умовах.

Отримані закономірності усередненого руху в турбулентному примежовому шарі на пластині можна застосовувати при аналізі турбулентного руху в прямих ділянках трубопроводів, а також частково в плоских і вісесиметричних струминних примежових шарах.

Як це можливо здійснити стосовно турбулентних течій в трубопроводах, покажемо на прикладі круглого трубопроводу.

Оскільки товщина примежового шару в круглій трубі після досягнення нею величини радіуса труби r_0 залишається незмінною, то в залежності (18) необхідно δ замінити на r_0. Таким чином розподіл усередненої швидкості в круглій трубі підпорядковується закономірності

$$V = V_m\left(\frac{y}{r_0}\right)^n. \tag{37}$$

Залежність (19) лишається незмінною.

При гідравлічних розрахунках трубопроводів прийнято користуватися не максимальною швидкість V_m, яка спостерігається в центрі труби, а середньою V_c, яка дорівнює відношенню об'ємної витрати L до площі поперечного перерізу труби $A = \pi r_0^2$, тобто

$$V_c = \frac{L}{\pi r_0^2} = \frac{2}{r_0^2}\int_0^{r_0} V(r_0 - y)dy = 2\int_0^1 V\left(1 - \frac{y}{r_0}\right)d\frac{y}{r_0}. \tag{38}$$

Якщо підставити у залежності (38) значення V за формулою (37) отримаємо

$$\frac{V_c}{V_m} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \tag{39}$$

і відповідно

$$V_m = V_c\frac{(n+1)(n+2)}{2}. \tag{39'}$$

При визначенні втрат тиску на прямих ділянках труб прийнято користуватися коефіцієнтом опору тертя λ, відповідно якому дотичне напруження на внутрішні поверхні труби τ_0 визначаються по такій залежності:

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{4}\frac{\rho V_c^2}{2}. \quad (40)$$

Дотичне напруження на поверхні пластини, яке прийнято подавати через коефіцієнт опору тертя c визначається залежністю

$$\tau_0 = c\frac{\rho V_m{}^2}{2}. \quad (41)$$

При зіставленні (40) і (41) отримаємо

$$c = \frac{\lambda}{4}\left(\frac{V_c}{V_m}\right)^2 \quad (42)$$

та

$$\lambda = 4c\left(\frac{V_m}{V_c}\right)^2. \quad (43)$$

Якщо підставити в (24) значення c за (42) отримаємо

$$n = \frac{\pi}{\sqrt{8}}\frac{V_c}{V_m}\sqrt{\lambda} = 1{,}11\,\frac{V_c}{V_m}\sqrt{\lambda} = a\sqrt{\lambda}. \quad (44)$$

Значення відношення $\frac{V_c}{V_m}$ і параметра a при різних показниках степені n наведено в таблиці.

Таблиця

Значення $\frac{V_c}{V_m}$ і параметра a

n	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	1/12
$\frac{V_c}{V_m}$	0,816	0,836	0,853	0,866	0,877	0,886
a	0,909	0,928	0,950	0,960	0,973	0,984

3 — 1-2086

Як видно з таблиці, відношення $\frac{V_c}{V_m}$ припустимо в межах n від 1/7 до 1/12 прийняти сталим і рівним 0,85. Таке спрощення може призвести до 4,1% похибки визначення показника степеня n, яка менша за похибку при його експериментальному визначенні. Якщо врахувати припустимість цього припущення, формула (44) набуде простого вигляду:

$$n = 0{,}944\sqrt{\lambda}\,, \tag{44'}$$

що практично співпадає з аналогічними експериментальними залежностями, в яких значення a приймається в межах 0,9—1,0 [2, 3].

Рівняння (21) стосовно круглої труби потребує зміни V_* на V_c у правій частині у відповідності з відомою залежністю $V_* = V_c\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$ та δ на r_0.

Після таких змін залежність (21) набуде вигляду:

$$\left(\frac{1}{\pi}\frac{\nu}{V_c r_0}\sqrt{\frac{8}{\lambda}}\right)^{0{,}944\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{3}\,.$$

Після логарифмування отримуємо таку залежність:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1{,}98\lg \mathrm{Re}_d\sqrt{\lambda} - 0{,}51\,, \tag{45}$$

де Re_d — число Рейнольдса, визначене за середньою швідкістю потоку V_c і діаметром труби d.

Використана література

1. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.—Л.: Гостехиздат, 1947.

2. *Альтшуль А. Д., Киселев П. Г.* Гидравлика и аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1975.

3. *Хиенце И. О.* Турбулентность. — М.: Физматгиз, 1963.