

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ТЕРМОКОНВЕКТИВНОГО ФРОНТУ ПІД ЧАС РОБОТИ СИСТЕМ СВЕРДЛОВИН

Відомо [1], що під час дослідження тепло- і масопереносу в умовах руху теплоносіїв основним є встановлення гідродинамічної картини течії і закономірностей переміщення частинок рідини від контуру живлення (нагнітання) до контуру розвантаження (водозабору) вздовж окремих ліній току. Якщо вказане вище вирішено, то легко одержати закон переміщення термоконвективного фронту, забруднень або концентрацій солей від початкового стану до поточного. Це дає можливість побудувати динаміку фронтів, їх конфігурацію, а також обчислити температуру або концентрацію забруднень на контурі розвантаження. Очевидним є й те, що чим точніше при цьому враховується гідродинаміка течії, тим точнішим буде результат реалізації математичної моделі переносу тепла чи маси.

У праці [2] показано, що динаміку термоконвективних фронтів можна вивчати на основі методу характеристичних функцій течії і ліній (трубок, смуг) току. В основі методу лежить повна аналогія між переміщенням контуру частинок рідини і відповідних фронтів.

Дійсно, розглянемо баланс теплоти в елементі трубки току нескінченно малої довжини  $dl$ , яку проходить тепловий конвективний фронт за час  $dt$ . В цей елемент з витратою теплоносія  $Q$  поступає теплота  $T C_p Q dt$ , а залишає  $T_0 C_p Q dt$ ; в елементі з площею поперечного перерізу  $\omega$  і пористістю порід  $\Pi_0$  залишається теплота  $(T - T_0) \omega C_{\Pi} dl$ , де  $C_{\Pi} = C_p \Pi_0 + C_{ок}(1 - \Pi_0)$ . Отже, рівняння балансу в елементі трубки току наступне:

$$(T - T_0) C_p Q dt = (T - T_0) \omega dl [C_p \Pi_0 + (1 - n_0) C_{\Pi}].$$

Виконавши необхідні перетворення, одержимо

$$Q dt = \omega dl [n_0 + (1 - n_0) C_{\Pi} / C_p],$$

звідки швидкість переміщення термоконвективного фронту буде виражатися такою формулою:

$$V_{\text{ТКФ}} = \frac{dl}{dt} = \frac{Q}{\omega [n_0 + (1-n_0)C_{\Pi}/C_p]}$$

Враховуючи, що  $Q/\omega$  — швидкість течії на конвективному фронті і позначивши  $n_0 + (1-n_0)C_{\Pi}/C_p = n_e$  ( $n_e$  — ефективна пористість порід пласта при конвективному переносі теплоти), маємо  $V_{\text{ТКФ}} = V/n_e$ .

Отже, швидкість переміщення термоконвективного фронту пропорційна швидкості руху рідини на ньому. Аналогічно можна довести, що й швидкість фронту забруднень в рідині  $V_c$  пропорційна швидкості руху рідини:  $V_c = V/\Pi_c$ , де  $\Pi_c = \beta/[n_0(1+\beta)]$ ,  $\beta$  — коефіцієнт, що враховує кінематику сорбції середовища. Це означає, що фронти різної природи подібні, але зміщені в часі.

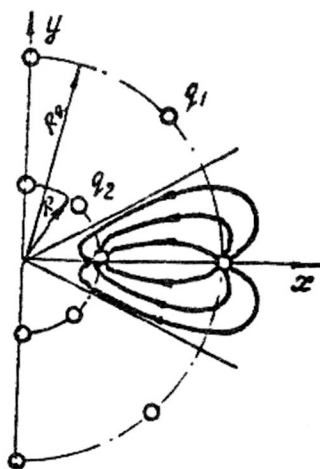


Рис. 1

Розглянемо переміщення фронту “мічених” частинок теплоносія між кільцевими батареями  $n$  нагнітальних і  $n$  експлуатаційних свердловин (рис. 1) в необмеженому однорідному пласті. Відмінностями між в'язкостями рідин нехтуємо, а свердловини батарей вважаємо рівнодебітними. Характеристична функція течії буде мати такий вигляд:

$$W(Z) = -\frac{q_1}{2\pi} \left[ \ln(Z^n - R_1^n) - S \ln(Z^n - R_2^n) \right], \quad (1)$$

де  $Z = x + iy$ ;  $S = q_2/q_1$ ;  $q_1$  та  $q_2$  — дебіти експлуатаційної і нагнітальної свердловин;  $R_1$  і  $R_2$  — радіуси кільцевих батарей. В полярних координатах  $\rho$  і  $\varphi$  вираз (1) набуде вигляду:

$$F(\rho, \varphi) = W(Z) = -\frac{q_1}{\pi} \left\{ \ln \left[ (\rho^n \cos n\varphi - R_1^n) + i\rho^n \sin n\varphi \right] - \right. \\ \left. - s \ln \left[ (\rho^n \cos n\varphi - R_2^n) + i\rho^n \sin n\varphi \right] \right\}, \quad (2)$$

де  $\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\varphi = \arctg y/x$ .

З виразу (2) розподіл тиску в пласті і рівняння сім'ї ліній току одержують у вигляді:

$$P(\rho, \varphi) = -\frac{q_1 \mu}{4\pi K} \left[ \ln(\rho^{2n} - 2R_1^n \rho^n \cos n\varphi + R_1^{2n}) - \right. \\ \left. - s \ln(\rho^{2n} - 2R_2^n \rho^n \cos n\varphi + R_2^{2n}) \right] + P_0; \quad (3)$$

$$C = \arctg \frac{\rho^n \sin n\varphi}{\rho^n \cos n\varphi - R_1^n} - S \arctg \frac{\rho^n \sin n\varphi}{\rho^n \cos n\varphi - R_2^n}, \quad (4)$$

де  $P_0$  — початковий тиск в пласті;  $K$  — проникність пласта;  $\mu$  — в'язкість теплоносія;  $C$  — параметр сім'ї ліній току.

З виразу (4) в точці  $\rho = R_1$ ;  $\varphi = 0$  можна встановити, що  $C = \alpha$  ( $\alpha$  — кут охопту фронтом “мічених” частинок контура експлуатаційної свердловини). Знайдемо швидкість частинок рідини вздовж окремої лінії току, продиференціювавши вираз (3), маємо:

$$V = -\frac{nq_1}{2\pi\rho} \left[ \frac{\rho^n (\rho^n - R_1^n \cos n\varphi)}{\rho^{2n} - 2R_1^n \rho^n \cos n\varphi + R_1^{2n}} - \right. \\ \left. - S \frac{\rho^n (\rho^n - R_2^n \cos n\varphi)}{\rho^{2n} - 2R_2^n \rho^n \cos n\varphi + R_2^{2n}} \right]. \quad (5)$$

З іншого боку,  $dt = nd\rho/V$ , де  $t$  — час переміщення частинки рідини вздовж будь-якої лінії току.

Інтегруючи по  $t$  від нуля до  $t$  і по  $\rho$  від  $\rho_2$  до  $\rho$ , а також, вводячи безрозмірний час  $\tau = q_1 t / \pi n_0 R_1^2$  і  $r = R_2/R_1$ , одержимо залежність для

обчислення відносного часу переміщення частинок теплоносія від початкового  $\rho_2$  до поточного  $\rho$  положення

$$\tau = -\frac{2(1-r^n)}{n^2} \int_{\xi_2}^{\xi} \frac{\sin \varphi_2 \sin(\alpha + S\varphi_2) \sin^{\frac{n+2}{n}} \times}{\left\{ (1-r^n)^2 \sin^2 \varphi_2 \sin^2(\alpha + S\varphi_2) + \right.} \rightarrow$$

$$\left. \times [\alpha - (1-S)]\varphi_2 \right\}^{\frac{n-1}{n}} \rightarrow$$

$$\left[ \cos \varphi_2 \sin(\alpha + S\varphi_2) - r_1^n \sin \varphi_2 \cos(\alpha + s\varphi_2) \right]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Вираз (6) дає змогу проаналізувати деякі практично важливі випадки переміщення фронту частинок, наприклад при  $S=1$  ( $q_1=q_2$ ), при  $\alpha=0$  і  $\alpha=\pi/n$  (вздовж головної і нейтральної лінії току) тощо.

При  $R_2=0$  з виразу (6) одержимо формулу переміщення фронту частинок з внутрішнього боку кільцевої батареї експлуатаційних свердловин при їх взаємодії з центральною нагнітальною свердловиною (рис. 2) з сумарним дебітом  $q_2 = Snq_1$  ( $0 < S \leq 1$ ). При  $s=1$  (втрати теплоносія за межі області течії відсутні) тривалість переміщення частинок теплоносія від контура нагнітання до контура розвантажування вздовж довільної лінії току обчислюється за формулою:

$$t(\alpha) = \frac{\pi n_0 R_1^2}{q_1 n} \left[ 1 - \frac{\cos \alpha}{2^n n \sin^{\frac{n+2}{n}} \alpha} \int_0^{2\alpha} (1 - \cos \xi)^{\frac{1}{n}} d\xi \right]. \quad (7)$$

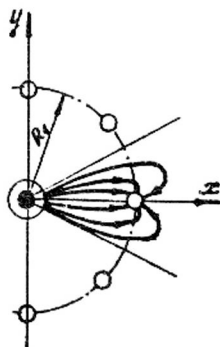


Рис. 2

При  $\alpha=0$  (вздовж головної лінії току)  $\tau = n/(n+2)$ , де  $n$  — кількість свердловин в круговій батареї.

Значення безрозмірного часу для схеми течії (рис. 2) наведені в таблиці.

$\alpha$ $n$	0	5	10	15	20	25	30	35
1	0,333	0,334	0,337	0,343	0,350	0,360	0,373	0,388
2	0,500	0,501	0,504	0,508	0,515	0,525	0,535	0,550
3	0,600	0,601	0,603	0,607	0,613	0,621	0,630	0,643
4	0,666	0,667	0,669	0,672	0,678	0,684	0,693	0,703
5	0,714	0,714	0,716	0,720	0,724	0,730	0,738	0,746
6	0,750	0,750	0,752	0,754	0,758	0,764	0,771	0,779
10	0,800	0,800	0,801	0,804	0,807	0,811	0,817	0,823

	40	45	50	60	70	80	100
1	0,407	0,429	0,456	0,527	0,629	0,777	1,348
2	0,566	0,586	0,609	0,688	0,715	0,852	1,210
3	0,657	0,673	0,692	0,740	0,804	0,888	1,154
4	0,716	0,730	0,746	0,787	0,840	0,909	1,122
5	0,757	0,769	0,784	0,819	0,864	0,923	1,102
6	0,788	0,799	0,812	0,843	0,882	0,934	1,087
10	0,831	0,840	0,850	0,875	0,907	0,948	1,068

	110	120	130	140	150
1	1,924	2,945	4,948	9,466	22,130
2	1,520	2,000	2,794	4,274	7,413
3	1,371	1,690	2,191	3,049	4,742
4	1,290	1,531	1,897	2,500	3,634
5	1,239	1,433	1,722	2,186	3,034
6	1,204	1,367	1,605	1,982	2,658
10	1,157	1,280	1,457	1,320	2,211

Таким чином, маючи одержані результати по тривалості переміщення частинок теплоносія вздовж певних ліній току легко відслідкувати динаміку термоконвективного фронту або фронту концентрації забруднень, підставивши замість пористості пласта  $n_0$  ефективні пористості  $n_e$  або  $n_c$ .

### Використана література

1. Кононенко Г. Н. Комбинированные модели тепло- и массопереноса: принципы построения, структура, алгоритмы и методы их реализации. — К., 1985. — 64 с. (НАН України. Ін-т математики; 85—95).
2. Кононенко Г. Н., Вознюк Л. Ф. Приближенные методы исследования тепло- и массопереноса в системах извлечения тепла Земли. — К., Наукова думка, 1975. — 139 с.