

ДОСЛІДЖЕННЯ КОНВЕКТИВНОГО
ТЕПЛО- І МАСОПЕРЕНОСУ ПРИ ТЕЧІЇ ВОДИ
В ТРИЩИНУВАТОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Задача тепло- і масопереносу при течії води в тріщинуватому середовищі є однією з важких задач конвективного теплообміну в зв'язку з чим реалізується до певної міри спрощені математичні моделі процесу. Розглянемо одну з таких моделей, побудованої на основі теорії тонкого пласта і методу ліній течії [1], [2]. Конвективний теплоперенос відбувається при русі води в однорідному пласті висотою $2h$ при необмеженій товщі порід покрівлі й підшови (вісь аплікату по нормалі до площини руху води xOy):

$$c_0 \frac{\partial T_0}{\partial t} = \lambda_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}, \quad |z| > h; \quad (1)$$

$$\begin{cases} nc_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \alpha(T_2 - T_1) - c_1 \bar{\vartheta} \operatorname{grad} T_1, & x, y \in \Omega; \\ (1-n)c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \alpha(T_1 - T_2) + \lambda \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, & |z| < h; \end{cases} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \bar{\vartheta} = 0; \quad \bar{\vartheta} = -k \operatorname{grad} H; \quad x, y \in \Omega, \quad |z| < h; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} T_0|_{t=0} = T_1|_{t=0} = T_2|_{t=0} = T_+; \quad T_1|_{\omega_H} = T^+; \\ x, y \in \Omega, \quad \omega_H \in \Omega; \end{aligned} \quad (4)$$

$$Q = 2h \int_{\omega_P} \bar{\vartheta}_n ds; \quad \omega_P \in \Omega, \quad (5)$$

де $\bar{\vartheta} = \{\vartheta_x, \vartheta_y\} = \vartheta_x \bar{i} + \vartheta_y \bar{j}$; $\operatorname{grad} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y}$; T — температура (чи концентрація домішок); n — пористість; λ — коефіцієнт теплопровідності (дифузії); c — об'ємна теплоємність; t — час; ω — контур дрени, свердловини чи б'єфа; Q — дебіт; індекси 0, 1, 2, n , p відносяться від-

повідно до порід в масиві, що оточує область фільтрації Ω , води й ґрунту в ній, контурів нагнітання (живлення) й розвантаження (водозабору).

У задачі (1) — (5) перше рівняння — рівняння збереження енергії в шарах, які оточують область фільтрації, система рівнянь (2) — це рівняння конвективного теплопереносу в двофазному середовищі, причому індекс "1" відповідає рухомій рідині, а "2" — блокам породи, яку вона омиває; α — коефіцієнт між фазового теплообміну [3]; рівняння (3) — рівняння гідродинаміки течії за умови (5); T^+ і T_+ — відповідно температура на контурі нагнітання ω_n і початкова температура пласта.

Введемо середню по висоті шару температуру $T_i = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h T_i dz$,

$i = 1, 2$ й зробимо заміни

$$\theta = \frac{T_+ - T}{T_+ - T^+}; \quad z_1 = \frac{z - h}{h}; \quad t_1 = \frac{\alpha t}{c_2(1-n)}; \quad \xi = \frac{\alpha}{c_1} \int_{\omega_H}^{\hat{z}} \frac{d\gamma}{\partial_\gamma};$$

$$\gamma = \frac{\alpha h^2}{\lambda_0(1-n)}; \quad \beta = \frac{c_0}{c_1}; \quad k = \frac{c_1 n}{c_2(1-n)},$$

де $\partial_{\hat{z}} = \frac{\partial_\gamma - \hat{z} \partial_\gamma}{f^{-1}(c, \hat{z})}$; $\hat{z} = \frac{\gamma}{x}$; $c = f(x, \hat{z})$ — рівняння лінії течії; v_x, v_y — розв'язок рівняння (3) при умові (5).

Задача (1) — (5) з врахуванням зроблених заміन набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z_1^2} = \beta \gamma \frac{\partial \theta_0}{\partial t_1}, \quad z_1 > 0; \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} - \theta_1 + \theta_2 &= k \frac{\partial \theta_1}{\partial t_1}, \\ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \theta_2}{\partial z_1} + \theta_1 - \theta_2 &= \frac{\partial \theta_2}{\partial t_1}, \end{aligned} \right\} z_1 = 0; \quad (7)$$

$$\theta_0|_{t_1=0} = \theta_1|_{t_1=0} = \theta_{21}|_{t_1=0} = \theta_0|_{z_1 \rightarrow \infty} = 0; \quad \theta_1|_{\xi=0} = 1. \quad (8)$$

При застосуванні інтегрального перетворення Лапласа до задачі (6) — (8) по змінній t_1 , при $z_1 = 0$ одержуємо розв'язок в зображеннях

$$\tilde{\theta}_1 = \frac{1}{s} \exp \left\{ - \left(1 + ks - \frac{1}{s + b\sqrt{s} + 1} \right) \xi \right\}; \quad (9)$$

$$\tilde{\theta}_2 = \frac{\tilde{\theta}_1}{s + b\sqrt{s} + 1}. \quad (10)$$

В останньому виразі параметр b враховує вплив на температурне поле притоку тепла від порід, що оточують область течії, причому

$$b = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

При $b = 0$, тобто при відсутності притоку тепла від порід підоснови та покрівлі зображення (9), (10) наберуть вигляду розв'язків, одержаних в дослідженнях [1].

Повертаючись від зображень (9), (10) до оригіналів (температур) на основі застосування теореми А. М. Ефроса [3] можна отримати залежності для визначення відносних температур води і блоків породи у вигляді

$$\theta_1(\xi, \tau) = U(\xi, \tau, b) = e^{-\xi} \left[1 + \sqrt{\xi} \int_0^{\tau} e^{-u} I_1(2\sqrt{\xi u}) u^{1/2} \cdot \operatorname{erfc} \frac{bu}{2\sqrt{\tau-u}} du \right]; \quad (11)$$

$$\theta_2(\xi, \tau) = V(\xi, \tau, b) = e^{-\xi} \int_0^{\tau} e^{-u} I_0(2\sqrt{\xi u}) \cdot \operatorname{erfc} \frac{bu}{2\sqrt{\tau-u}} du,$$

де $\tau = t_1 - k\xi$.

Як показано у праці [3], зображення (9) можна звести до добутку таких зображень:

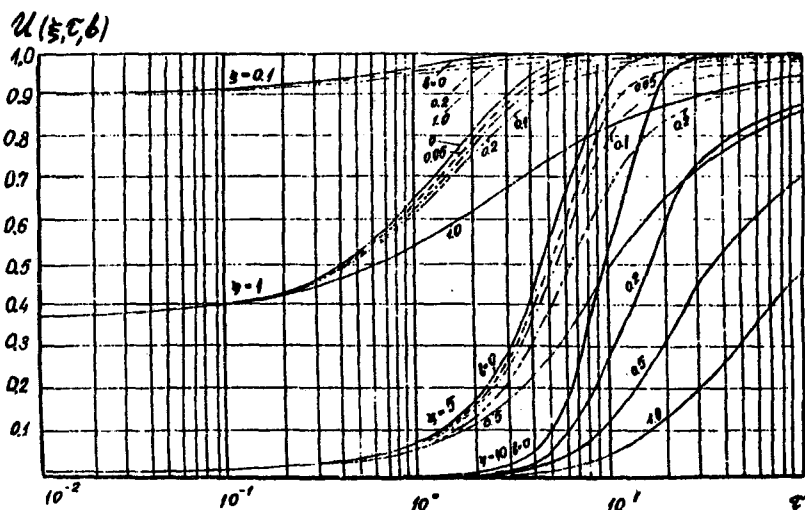
$$\tilde{\theta}_1 = e^{-(1+ks)\xi} \left\{ \frac{1}{q(s)} + \frac{b}{\sqrt{s}q(s)} + \frac{1}{sq(s)} \right\} e^{\frac{\xi}{q(s)}},$$

де $q(s) = s + b\sqrt{s} + 1$.

Тоді залежність для визначення температури води можна подати і у такому вигляді:

$$\theta_1 = U(\xi, \tau, b) = \theta_2 + e^{-\xi} \int_0^{\tau} e^{-u} I_0(2\sqrt{\xi u}) \cdot \frac{b(2\tau-u)}{2\sqrt{\pi(\tau-u)^3}} e^{-\frac{b^2 u^2}{4(\tau-u)}} du. \quad (12)$$

Можна показати, що відповідні розв'язки (11) та (12) тотожні. Оригінал (11) можна одержати з розв'язку (12), інтегруючи його частинами. Значення функції $U(\xi, \tau, b)$ для різних величин τ узагальнених координат часу τ і довжини ξ наведені в таблиці і на рисунку у вигляді графіків.



τ	b						
	0	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
$\xi = 0.1$							
0	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048	0.9048
0.01	0.9057	0.9057	0.9057	0.9057	0.9057	0.9057	0.9057
0.05	0.9093	0.9092	0.9092	0.9092	0.9091	0.9089	0.9086
0.1	0.9135	0.9134	0.9134	0.9133	0.9131	0.9126	0.9118
0.3	0.9285	0.9284	0.9280	0.9276	0.9268	0.9247	0.9219
0.5	0.9409	0.9407	0.9403	0.9393	0.9378	0.9340	0.9239
0.7	0.9511	0.9509	0.9499	0.9488	0.9468	0.9416	0.9352
0.9	0.9596	0.9593	0.9581	0.9567	0.9542	0.9478	0.9401
1.0	0.9632	0.9629	0.9616	0.9602	0.9574	0.9504	0.9422
3.0	0.9945	0.9941	0.9923	0.9902	0.9863	0.9764	0.9643
5.0	0.9992	0.9988	0.9975	0.9958	0.9926	0.9841	0.9724
6.0	0.9997	0.9994	0.9982	0.9967	0.9939	0.9860	0.9754

τ	b						
	0	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
$\xi = 1.0$							
0	0.3679	0.3679	0.3679	0.3679	0.3679	0.3679	0.3679
0.01	0.3715	0.3715	0.3715	0.3715	0.3715	0.3714	0.3713
0.05	0.3861	0.3860	0.3859	0.3857	0.3855	0.3846	0.3834
0.1	0.4038	0.4037	0.4033	0.4029	0.4021	0.4000	0.3968
0.3	0.4702	0.4698	0.4682	0.4663	0.4627	0.4532	0.4407
0.5	0.5301	0.5293	0.5225	0.5185	0.5155	0.4976	0.4754
0.7	0.5839	0.5827	0.5780	0.5723	0.5619	0.5358	0.5045
0.9	0.6321	0.6305	0.6242	0.6167	0.6030	0.5691	0.5295
1.0	0.6543	0.6525	0.6454	0.6370	0.6217	0.5842	0.5408
3.0	0.9061	0.9022	0.8871	0.8694	0.8373	0.7615	0.6778
5.0	0.9767	0.9730	0.9587	0.9417	0.9102	0.8329	0.7426
10.0	0.9994	0.9972	0.9883	0.9773	0.9560	0.8970	0.8170
$\xi = 10$							
1	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019	0.0017	0.0012	0.0008
3	0.0306	0.0299	0.0271	0.0241	0.0193	0.0108	0.0051
5	0.1198	0.1161	0.1026	0.0885	0.0667	0.0324	0.0130
7	0.2719	0.2625	0.2289	0.1944	0.1426	0.0648	0.0241
9	0.4547	0.4387	0.3813	0.3223	0.2346	0.1044	0.0376
10	0.5449	0.5259	0.4575	0.3879	0.2822	0.1256	0.0450
30	0.9996	0.9858	0.9309	0.8640	0.7382	0.4486	0.2030
50	1.0000	0.9907	0.9539	0.9082	0.8188	0.5818	0.3183
70	1.0000	0.9931	0.9668	0.9259	0.8526	0.6507	0.3976
90	1.0000	0.9935	0.9679	0.9361	0.8729	0.6943	0.4552
100	1.0000	0.9939	0.9698	0.9399	0.8903	0.7107	0.4786

Підкреслимо, що розв'язки задачі (1) — (5) одержані для довільної, що дуже важливо, плоскої течії рідини, яка характеризується в кожній точці області Ω вектором швидкостей $\vec{v}(v_x, v_y)$, хоча вказані розв'язки можна застосовувати і для одномірної течії (плоскопаралельної чи плоскорадіальної), а також для течії рідини, для якої аналітично вектор швидкостей знайти не вдається. В цьому випадку можна використати запропонований нами метод ліній або смуг течій [1], побудувавши

графічно або з допомогою моделювання потенціальних течій гідродинамічну сітку руху води. Це дає змогу побудувати миттєві теплові поля рідини і блоків порід, температуру рідини на контурі розвантажування (водозабір, експлуатаційна свердловина тощо) і оцінити вплив теплопритоку від порід підшви та покрівлі.

Використана література

1. Кононенко Г. М. Исследование тепло- и массопереноса при фильтрации жидкости. — К., 1983. — 64 с. Препр. (АН УРСР Ін-т математики; 83-2).

2. Кононенко Г. М. Комбинирование модели тепло- и массопереноса: принцип построения, структура, алгоритмы и методы их реализации. — К., 1985. — 64 с. (АН УРСР Ін-т математики; 85—95).

3. Кононенко Г. М. Про один розв'язок задачі тепло- і масопереносу / Математичні методи в науково-технічних дослідженнях: Зб. наук. праць — К.: Ін-т математики НАН України, 1996. — С. 156—162.