УДК 621 – 83: 681

Ю. В. Білявський, *аспірант*
Київський національний університет
будівництва і архітектури

МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В СКЛАДНИХ ТРУБОПРОВІДНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Проблема нестаціонарних процесів в складних трубопровідних системах існує досить давно. Адже багато широко відомих систем з розподіленими параметрами (наприклад, водопровідні мережі, мережі теплопостачання тощо) містять тисячі елементів та мають досить великі розміри і розрахунок нестаціонарних процесів в таких системах потребує значних обчислювальних ресурсів. Однак на практиці виникає багато задач, наприклад, задача оперативного керування, які потребують швидких обчислювань та передбачення станів системи в режимі реального часу. Хоча збільшення продуктивності обчислювальної техніки й удосконалення обчислювальних алгоритмів і призводить до зменшення часу відліку, але більш перспективним є розробка "швидких" (спрощених) моделей, в яких на зміну систем з розподіленими параметрами приходять системи з зосередженими параметрами займає таке велике значення.

Різні вчені займалися пошуками найоптимальнішого вирішення проблеми нестаціонарних процесів в системах з зосередженими параметрами. Так, наприклад, Новіцький М. М. в своїй праці "Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения" запропонував отримувати системи з зосередженими параметрами(і досліджувати перехідні процеси) за допомогою осереднення рівняння гідравлічного удара за просторових змінних з використанням класичних квадратурних формул; Атавін О. О. і Тарасевич О. М. в роботі "Трубопроводные системы энергетики: модели, приложения, информационные технологии" навпаки доводять, що осереднення цього ж рівняння треба проводити за фізичними процесами.

Тому в даній роботі пропонується невирішена раніше методика побудови "швидких" спрощених моделей, яка грунтується на заміні вихідної системи з розподіленими параметрами різними системами з зосередженими параметрами, що дозволяє значно знизити затрати обчислювальних ресурсів.

Цілями даної статті є доведення доцільності заміни вихідних систем з розподіленими параметрами на системи з зосередженими параметрами та підбирання характеристик нової системи так, щоб парамет-

ри процесів цієї системи були найближчими до параметрів аналогічних процесів в вихідній системі, побудова та розрахунок перехідних процесів в складних трубопровідних системах з зосередженими параметрами; наведення результатів експериментів по співпаданню моделей.

Розглянемо математичну постановку задачі. Трубопровідна система являє собою сукупність вузлів та з'єднуючих їх труб. У вузлах (точка стику труб) можуть бути розташовані насоси, засувки, клапани та інша гідроарматура. Структуру такої трубопровідної системи можна зобразити у вигляді деякого орієнтовного графа Г, вершини якого (чисельність Т) відповідають вузлам системи, а дуги – трубам системи (чисельність дуг С), причому орієнтація дуг визначає позитивний напрямок потоку.

Нехай k – номер дуги (нижній індекс) і j – номер вершини (верхній індекс). Будемо вважати, що для кожної дуги k задана її довжини L_k та визначена координата x (відповідно з орієнтацією дуги). Модифікований таким чином граф Г можна розглядати як узагальнення вісі x.

Нестаціонарні течії в трубопроводах системи описуються рівняннями гідравлічного удару [1,2]:

$$\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \frac{\partial \left(A_k \vec{u}_k\right)}{\partial x} = \vec{f}_k . \tag{1}$$

Тут матриця A_k і вектор f_k залежать від вектора параметрів потока $\vec{u}(x,t)$, координати x і часу t:

$$A_k = \begin{pmatrix} Q_k/\omega_k & \rho a_k^2/\omega_k \\ \omega_k/\rho & Q_k/\omega_k \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ g\omega_k i_k - \lambda_k |Q_k| Q_k / 2 d_k \omega_k \end{pmatrix} \tag{2}$$

d, ω і i – діаметр, площа поперечного перерізу та ухил трубопровіда; λ – коефіцієнт гідравлічного тертя; ρ – густина рідини; a – швидкість розповсюдження хвилі гідравлічного удара.

Позначимо через $\vec{u}^j$ вектор, який складається з параметрів всіх вхідних у вузел і вихідних із вузла j потоків:

$$\vec{u}^{\,j} = \vec{u}^{\,j}_{k_1} \oplus \vec{u}^{\,j}_{k_2} \oplus \ldots \oplus \vec{u}^{\,j}_{k_m}, \tag{3}$$

де $$\vec{u}^{\,j} = \begin{cases} F_k^j\left(\vec{u}_{k,0}\right), \text{якщо k – та труба виходить з вузла j}, \\ F_k^j\left(\vec{u}_{k,L}\right), \text{якщо k – та труба входить у вузел j} \end{cases} \tag{4}$$

Тут $\vec{u}_{k,0} = \vec{u}_k(0,t)$, $\vec{u}_{k,L} = \vec{u}_k\left(L_k, t\right)$, а $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – номери труб, які примикають до вузла j.

Кожен вузел j моделюється системою з розподільними параметрами. Функціонування вузла описується рівняннями вигляду

$$\vec{H}^{\,j}\left(\vec{u}, \vec{\Lambda}^{\,j}, \vec{Z}^{\,j}, t\right) = 0, \tag{5}$$

де оператор $\vec{H}^{\,j}$ представляє собою систему звичайних диференційних і/або алгебраїчних рівнянь. Для однозначного вирішення задачі задаються ще початкові дані (при $t = 0$):

$$\vec{u}_k(x,0) = \vec{u}_{0,k}(x), \quad \vec{\Lambda}^{\,j}(0) = \vec{\Lambda}^{\,j}_0, \quad \vec{Z}^{\,j}(0) = \vec{Z}^{\,j}_0. \tag{6}$$

Для прикладу розглянемо підхід, який базується на осередненні рівнянь (1) за фізичними процесами. На рис. 1 представлена схема моделювання для одиночного трубопровода. Трубопровід розбивається на N ділянок, і в центрі кожної ділянки умовно розміщується деяка ємкість, тиск в якій $\tilde{\rho}$, яка відповідає за пружні властивості своєї ділянки. На самій ділянці враховуються лише інерційні характеристики потока. Таким чином, течія в трубопроводі буде описуватися системою рівнянь

$$\frac{\rho\Delta}{2\omega}\frac{dQ_l}{dt} = \rho_l - \tilde{\rho}_0 + \rho g\left(z_l - z_0\right) - \lambda_l \frac{\Delta}{2d}\frac{\rho|Q_l|Q_l}{2\omega^2}, \tag{12}$$

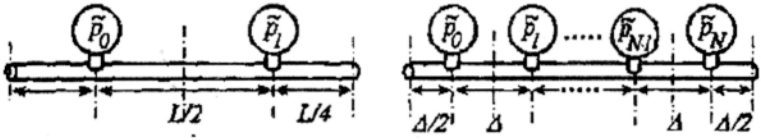
$$\frac{\rho\Delta}{2\omega}\frac{dQ_r}{dt} = \tilde{\rho}_N - \rho_r + \rho g\left(z_N - z_r\right) - \lambda_r \frac{\Delta}{2d}\frac{\rho|Q_r|Q_r}{2\omega^2}, \tag{13}$$

$$\frac{\rho\Delta}{2\omega}\frac{dQ_k}{dt} = \tilde{\rho}_k - \tilde{\rho}_{k-1} + \rho g\left(z_k - z_{k-1}\right) - \lambda_k \frac{\Delta}{2d}\frac{\rho|Q_k|Q_k}{2\omega^2}, \tag{14}$$

при $k = 1, \ldots, N-1$;

$$\frac{\Delta\omega}{\rho a^2}\frac{d\tilde{\rho}_k}{dt} = Q_{k+1} - Q_k, \qquad \text{при } k = 0, \ldots, N-1. \tag{15}$$

Тут $D = L/N$, $Q_k = Q_k(t)$ – витрата на початку k-ї ділянки, $Q_{k+1} = Q_{k+1}(t)$ – витрата в кінці k-ї ділянки, де $k = 0,\ldots, N-1$; $z_1 = z_0, z_1,\ldots, z_N = z_r$ – вертикальні відмітки, а p_1 , p_0 –витрата на лівій і правій кінцівках трубопровіда.



а *б*

Рис. 1. Схема моделювання трубопровода системою з зосередженими параметрами: *а*) $N = 2$; *б*) загальний випадок

Розглянемо спочатку одиночний трубопровід, на лівій кінцівці якого ($x = 0$) розташован насос, який створює початковий тиск ρ_0, а на правій кінцівці ($x = L$) закривається засувка на протязі деякого часу t_c, внаслідок чого в системі розпочинається нестаціонарний процес, інтенсивність якого обернено пропорційна часу закриття засувки t_c. Найбільш інтенсивний процес буде при $t_c < 2L/a$ (т. н. прямий гідравлічний удар).

На рис. 2 представлені результати розрахунку прямого гідравлічного удара для лінійного закона закриття при практично миттєвому закритті засувки (високоінтенсивний гідравлічний удар).

Співвідношення рішення системи рівнянь (1), (2), тобто за "точною" моделлю на основі системи з розподіленими параметрами (крива *1*), з результатами рішення нелінійних систем звичайних диференційних рівнянь (10) 2-го порядку (крива *3*) і 1-го порядку (крива *2*), тобто за моделями систем із зосередженими параметрами, показало, що для високоінтенсивних процесів з наявністю значної високочастотної складової моделі із зосередженими параметрами дають значну помилковість по амплітуді, при цьому модель 1-го порядку має значне розходження і по частоті.

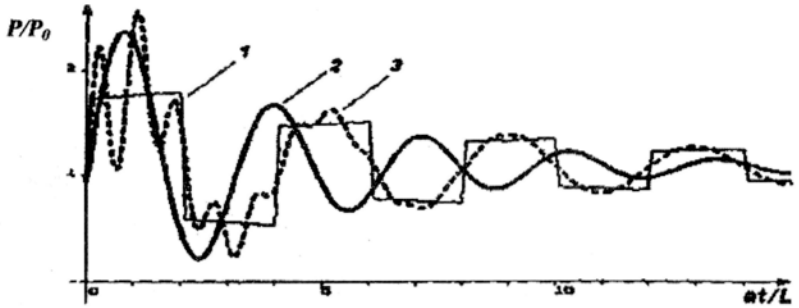


Рис. 2. Тиск у засувці при $t_c = 0{,}1L/a$: *1* – модель з розподіленими параметрами (1), (2); *2* – модель 1-го порядку; *3* – модель 2-го порядку (10)

Модель 2-го порядку має хороший ступінь узгодження по частоті й кращий збіг в середньому з амплітудою коливань (при наявності значних осциляцій).

Однак по мірі зниження інтенсивності процеса (при послабленні його високочастотної складової) ступінь узгодження швидко зростає, і навіть для прямого гідравлічного удара меньшої інтенсивності обидві моделі дають достатнє узгодження по амплітуді, а модель 2-го порядку дає майже співпадаючий з "точним" рішенням результат.

Для ще менш інтенсивних процесів (наприклад, непрямого гідравлічного удара, $t_c > 2L/a$) результати розрахунків за моделлю з розподіленими параметрами і за моделлю 2-го порядку з зосередженими параметрами практично співпадають.

На рис. 3–4 показані результати розрахунку гідравлічного удара в простому трубопроводі за моделлю (12)–(15).

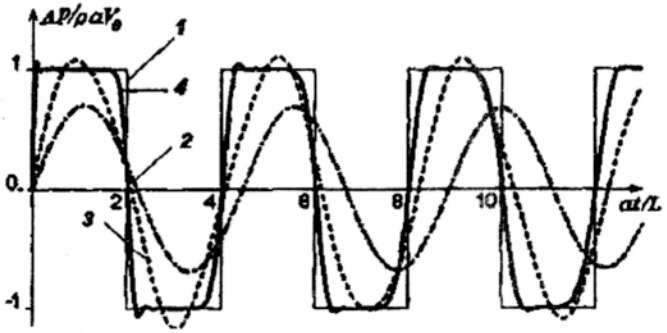


Рис. 3. Тиск у засувці (миттєве закриття):

1 – "точне" рішення (модель з розподіленими параметрами (1)–(2)); *2* – модель (12)–(15) з $N = 1$; 3 – модель (12)–(15) з $N = 2$; 4 – модель (12)–(15) з $N = 20$

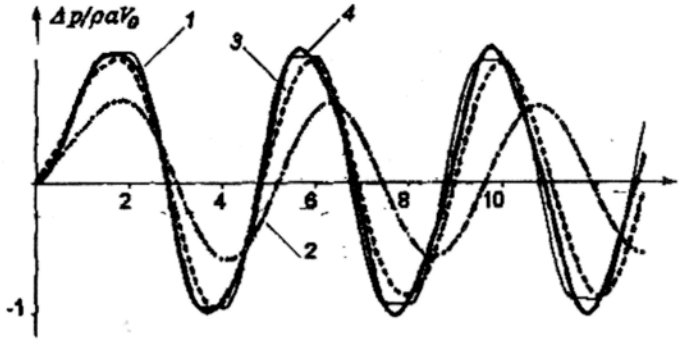


Рис. 4. Тиск у засувці (повільне закриття):

1 – "точне" рішення (модель з розподіленими параметрами (1)–(2)); *2* – модель (12)–(15) з $N = 1$; *3* – модель (12)–(15) з $N = 2$; *4* – модель (12)–(15) з $N = 20$

Результати розрахунків показують, що вже при $N = 2$ є добре узгодження по частоті й по амплітуді (в середньому), тобто модель типу (12)–(15) з 7 зосередженими параметрами вже достатньо точно описує нестаціонарний процес з різкими градієнтами; при зниженні інтенсивності процеса ступінь узгодження зростає, як це можна побачити з рис. 4. Із рисунків 3–4 також можна побачити, що із зростанням N рішення за моделлю з зосередженими параметрами стає все більш точним.

Висновки: Для великих трубопровідних систем слід очікувати швидкої дисіпації високочастотної складової і виположування фронта збудження за рахунок інтерференції й дисперсії хвиль у внутрішніх вузлах. Тому використання моделей на основі систем з зосередженими параметрами в цьому випадку є правильним.

Вказана методика була використана для розрахунку нестаціонарних процесів в системі технологічних трубопроводів АЕС (близько 2000 труб).

Представлений підхід дозволяє створювати спрощені ("швидкі") моделі систем з розподіленими параметрами, при цьому вихідні системи диференційних рівнянь в часткових похідних замінюються на системи звичайних диференційних рівнянь, що дозволяє значно скоротити час розрахунків. Проведені розрахунки на тестових задачах і реальних системах довели, що для процесів, які протікають достатньо плавно така заміна практично рівнозначна.

Використана література

1. *Григоровський Є. П.* Електротехніка, електроніка та електропривід, – К.: УМК ВО України, 1991.

2. *Вершинин А. Е.* Применение микропроцессоров для автоматизации технологических процессов, – Л.: Энергоиздат, 1996.

3. *Попкович Т. С.* Автоматизация систем водоснабжения и водоотведения, – М.: Высшая школа, 1986.