УДК 556.0726.532.546+72

Г. М. Кононенко, *канд. техн. наук*
Київський національний університет
будівництва і архітектури

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТЕПЛО- І МАСОПЕРЕНОСУ ПРИ ДВОВИМІРНІЙ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ

Питанню побудови нестаціонарних полів температури та концентрації і розподілу їх в пласті при нагнітанні в нього рідини з температурою або концентрацією забруднень відмінних від фонових присвячено ряд робіт. Але у більшості з них розглядаються в основному одновимірні (лінійні чи радіальні) течії рідини. В реальних умовах мають місце двовимірні течії рідини, що обумовлено геометрією розміщення контурів нагнітання та розвантаження (нагнітальні та експлуатаційні свердловини, водозабори і басейни забруднень в природній течії тощо).

Аналіз математичних моделей переносу тепла і маси в умовах двовимірної фільтрації рідини показує, що основною проблемою є врахування конвективних складових $\vec{v}\, gradT$ або $\vec{v}\, gradC$, де вектор швидкості руху рідини $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$, T і C – відповідно температура і концентрація забруднень.

Як показано в розробках $[1,\ 2]$ в такому випадку можна використати метод зведення двовимірної течії до одновимірної по лініях (стрічках, трубках) течії. Таке зведення можна здійснювати по-різному: використовувати гідродинамічні сітки течії, побудованих графічно, моделюванням течії рідини на суцільному середовищі чи на основі чисельно-різницевих методів, або використовувати рівняння ліній течії (векторних ліній), розв'язок яких можна одержати аналітично або наближеними методами, а також функції комплексного потенціалу течії $\omega = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ та конформні відображення. Основним припущенням в таких моделях є незалежність гідродинамічного поля від полів концентрації і температури – принцип недеформованості ліній течії. При суттєвому впливі цих факторів на гідродинаміку системи можна застосовувати метод деформованих ліній течії.

Нехай розв'язком задачі гідродинаміки в двовимірній області Ω

$$div\,\vec{v} = 0;\ \ \vec{v} = -k\; gradH,\ x,y \in \Omega,\ grad = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}$$

є $$\vec{v}=\left(v_x;v_y\right)=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}.$$

Припустимо, що розв'язок рівняння ліній течії

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}$$

одержано у вигляді функції $C=f\left(x,\hat{z}x\right)$, для якої існує обернена $f^{-1}\left(C,\hat{z}\right)$.

Причому $\hat{z}=y/x;\ v_{\hat{z}}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{v_y-\hat{z}v_x}{f^{-1}\left(C,\hat{z}\right)}$ – координата лінії течії і швидкість вздовж лінії течії.

Через те що

$$\frac{dx}{v_x}=\frac{dy}{v_y}=\frac{d\hat{z}}{v_{\hat{z}}},$$

для визначення часу t досягнення заданого рівня температури чи концентрації в заданій точці поля можна користуватись як складовими швидкостями v_x і v_y, так і повною швидкістю $v_{\hat{z}}$ за напрямом, який збігається з напрямом дотичної до лінії течії. Оскільки в цьому випадку рівняння конвективного теплопереносу і міграції забруднень набувають вигляду рівняння Кельвіна-Ламба [3], яке описує рух частинки разом з течією підземних вод

$$v_x^*\frac{\partial u}{\partial x}+v_y^*\frac{\partial u}{\partial y}+n_e\frac{\partial u}{\partial t}=0, \qquad (1)$$

то

$$\frac{dx}{v_x^*}=\frac{dy}{v_y^*}=\frac{d\hat{z}}{v_{\hat{z}}^*}=-\frac{dt}{n_e}. \qquad (2)$$

В наведених рівняннях $u\left(x,y,t\right)=0$ рівняння фронту мічених частинок (йому відповідає значення $n_e=n$ – активна пористість пласта), рівняння фронту забруднень (йому відповідає значення $n_e=n+N/C$, N – сорбційна ємність породи; С – концентрація забруднень), рівняння теплового фронту (йому відповідає значення $n_e=n+(1-n)C_{ck}/C_p$, $C_{ск}$, C_p – теплоємності відповідно до скелета порід і рідини). Отже, рівняння (1) можна записати так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} grad u = 0,$$

характеристичний вид якого

$$du = 0 \text{ вздовж } \quad t - \int_{\hat{z}_0}^{\hat{z}} \frac{d\eta}{v(\eta)} = \text{const.}$$

Нехай відомий комплексний потенціал течії $\omega(x+iy) = \varphi(x,y) + \psi(x,y)$; тоді

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \ v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Вводячи нові незалежні змінні $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ і враховуючи ортогональність ліній течії та функції течії, одержимо

$$\vec{v} grad u = v_x(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + v_y(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = \nabla\varphi\nabla u = \nabla\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\nabla\varphi + \frac{\partial u}{\partial \psi}\nabla\psi\right) =$$

$$= (\nabla\varphi)^2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \nabla\varphi\nabla\psi\frac{\partial u}{\partial \psi} = v^2(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi}$$

($\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y}$, $\nabla\varphi\nabla\psi = 0$ в силу ортогональності ліній і функцій течії).

Отже, рівніння (1) можна записати так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v^2(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0,$$

яке в характеристичному виді можна подати так:

$$dt = 0 \text{ вздовж } \ t - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi^*}{v^2(\xi^*,\eta)} = \text{const.}$$

Запропонований метод ліній течії дає можливість досліджувати поля температури і концентрації забруднень при двовимірній течії рідини на основі залежностей, одержаних для випадку лінійного потоку рідини простим введенням узагальнених змінних Больцмана. Якщо для лінійного потоку узагальнені змінні довжини ξ і часу τ мали вигляд

$$\xi = \frac{\alpha x}{C_p v};\ \xi = \frac{\alpha}{C_p}\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{v(z)};\ \tau = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)}\left(t - n\frac{x}{v}\right),\ \tau = \frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)}\left(t - n\int_{x_0}^{x}\frac{dz}{v(z)}\right),$$

то для двовимірної течії –

$$\xi=\frac{\alpha}{C_p}\int_{\hat{z}_0}^{\hat{z}}\frac{dz_1}{v(z_1)};\quad \xi=\frac{\alpha}{C_p}\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi_1}{v^2(\xi_1,\eta)};\quad \tau=\frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)}\left(t-n\int_{\hat{z}_0}^{\hat{z}}\frac{dz_1}{v(z_1)}\right)$$

$$\tau=\frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)}\left(t-n\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{d\xi_1}{v^2(\xi_1,\eta)}\right),$$

де $x_0,\hat{z}_0,\xi_0$ – координати контура нагнітання (живлення); α – коефіцієнт міжфазового теплообміну.

Вирази для визначення узагальнених змінних ξ і τ можна одержати і для стрічки течії. Нехай в стрічці (трубці) течії з поперечним перерізом $f(s)$ і параметром $q=\psi_{i+1}-\psi_i$ протікає конвективний теплоперенос з міжфазовим теплообміном. Рівняння збереження теплової енергії для скелета породи пласта і рідини мають вигляд:

$$nC_p\frac{\partial\theta_1}{\partial t}=-\frac{C_pq}{f(s)}\frac{\partial\theta_1}{\partial s}-\alpha(\theta_1-\theta_2);\tag{3}$$

$$C_{ck}(1-n)\frac{\partial\theta_2}{\partial t}=\alpha(\theta_1-\theta_2),\tag{4}$$

де s – дугова координата трубки течії.

Будемо розглядати змінний об'єм трубки течії вздовж дугової координати

$$V_i=\int_{s_0}^{s}f(\lambda)d\lambda$$

і перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$nC_p\frac{\partial\theta_1}{\partial t}+C_pq\frac{\partial\theta_1}{\partial V_i}+\alpha(\theta_1-\theta_2)=0.\tag{5}$$

Ввівши у рівняння (4) і (5) узагальнені змінні $\xi=\frac{\alpha}{C_pq}\int_0^{V_i}dV=\frac{\alpha}{C_p}\frac{V_i}{q}$; $\tau=\frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)}(t-\frac{n}{q}\int_0^{V_i}dV)=\frac{\alpha}{C_{ck}(1-n)}(t-n\frac{V_i}{q})$, одержимо відомі рівняння

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}=\theta_2-\theta_1; \quad \frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}=\theta_1-\theta_2,$$

розв'я зання яких розглянуто в роботі [2].

Література

1. *Кононенко Г. М.* Аналитические и численные решения одно- и двумерных краевых задач конвективного теплопереноса: Препринт 81.4. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1981. – 64 с.

2. *Кононенко Г. М., Securityнюк Л. Ф.* Приближенные методы исследования тепло- и массопереноса в системах извлечения тепла Земли. – К.: Наукова думка, 1975. – 139 с.

3. *Маскет М.* Течение однородных жидкостей в пористой среде. – М.: Гостоптехиздат, 1949. – 625 с.