УДК 628.334

П. М. Енин, *канд. техн. наук, профессор*
Институт последипломного образования Киевского национального университета строительства и архитектуры

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ТЕПЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЕОТЕРМАЛЬНЫХ РЕГАЗИФИКАТОРОВ С СУХИМ, ВЛАЖНЫМ И МЕРЗЛЫМ ГРУНТОМ И ВЫБОР МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Анализ существующих в нашей стране и за рубежом литературных источников, посвященных исследованиям теплового взаимодействия породного массива с подземными выработками, в которых находится жидкая или газообразная среда (флюид) с температурой, отличающейся от температуры массива, свидетельствует, что для решения задач по определению характеристик нестационарного теплообмена в этих условиях могут использоваться два принципиально различных подхода.

В работах первого направления [8, 9, 12, 13] интенсивность процесса определялась с помощью искусственно вводимого коэффициента нестационарного теплообмена K_τ, Вт/(м$^2\cdot$°С). Его можно трактовать, как произведение обычного коэффициента теплопередачи K, определяемого в стационарных условиях по формуле:

$$K=\frac{q}{\left(T_\infty-t_ж\right)},\ \text{Вт/(м}^2\cdot{}^\circ\text{С)},\tag{1}$$

где T_∞ – температура массива пород, °С; $t_ж$ – температура жидкости, °С.
на некоторую функцию $\Phi(r,\tau)$, изменяющуюся во времени и пространстве в соответствии с закономерностями процесса нестационарного теплопереноса, т.е. в зависимости от критериев Фурье Fo и Био Bi:

$$K_\tau=K\cdot\Phi(Fo,Bi),\ \text{Вт/(м}^2\cdot{}^\circ\text{С)},\tag{2}$$

Для определения коэффициента нестационарного теплообмена K_τ различными авторами [8, 12, 13] предложены разные формулы на основе приближенных аналитических решений задач нестационарного теплообмена.

Впервые такое решение получено академиками АН УССР А. Н. Щербанем и О. А. Кремневым [12] с помощью интегральных преобразований Лапласа. Ими получены формулы для вычислений K_τ в различных диапазонах значений критериев Fo и Bi.

При рассмотрении задач, требующих учета фазовых превращений содержащийся в грунте влаги, в работах данного направления дополнительно используется коэффициент агрегатных переходов $K_{агр}$ [4].

Он представляет собой отношение коэффициента нестационарного теплообмена K_τ, определенного при учете фазовых переходов грунтовой воды к значению этого коэффициента, определенного для сухого грунта. Получены аналитические зависимости для $K_{агр}$ [4], которые используются при решении задач, связанных с различными техническими приложениями, когда в грунте образуется мерзлая зона вокруг сооружения.

В указанных выше работах подчеркивается, что аналитическое решение задачи теплового взаимодействия массива пород и подземного сооружения с использованием коэффициентов нестационарного теплообмена K_τ и $K_{агр}$ возможно только для регулярного и квазистационарного режимов теплообмена, характеризующихся большими значениями Fo и Bi.

В нашем случае, при тепловом взаимодействии грунта с ГТР, заполненных жидкой фазой СУГ, наибольший интерес представляет как раз неустановившийся режим нестационарного теплообмена в области $Fo < 1$ и $Bi < 0.1$, определяющий особенности теплового режима геотермальных регазификаторов.

Поэтому рассмотренное направление в решении задач нестационарного теплопереноса, принесшее в свое время определенные успехи и на десятилетия (с 50-х по 80-е годы XX-го века) ставшее основой общепринятой методики для решения задач по прогнозированию и регулированию теплового режима глубоких шахт и рудников, в применении к задаче о тепловом взаимодействии ГТР и грунта является мало продуктивным [5].

Основной недостаток рассмотренного подхода к решению задач нестационарного теплообмена между флюидом в подземных сооружениях и массивом грунта состоит в том, что проблемы нестационарности перенесены на определение значений K_τ. В последнее время указанное направление признано ограниченно применимым.

Работы второго направления [1, 13, 15, 16] содержат прямую постановку задач о нестационарном распределении температур в жидкости внутри подземной выработки и в породном массиве в области теплового влияния этой выработки.

В нашем случае ищется нестационарное температурное поле в жидкости, находящейся в скважине ГТР, и грунте путем решения краевой сопряженной задачи нестационарной теплопроводности для двух сред, состоящих в тепловом взаимодействии.

В рамках принятой ранее физической модели теплового взаимодействия жидкой фазы СУГ, находящейся в геотермальном регазификаторе, и грунтом находилось решение уравнений теплопереноса численным методом.

С учетом принятых положений этой модели указанная задача решается в одномерной (плоскорадиальной) постановке.

Для сухого грунта задача формулируется математически с помощью уравнения нестационарной теплопроводности Фурье, которое в одномерном случае имеет вид [6, 7, 11]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}, \tag{3}$$

или в более удобной форме в полярных координатах:

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial t}{\partial r}\right); \qquad \begin{matrix} 0 < r < r_t; \\ 0 < \tau < \tau_t; \end{matrix} \tag{4}$$

$$t\big|_{\tau=0} = t_0(r) = t_{0,ж}; \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial r}\right|_{r=r_c} = 0; \tag{6}$$

$$t\big|_{r=r_t} = T_\infty. \tag{7}$$

Здесь r, м и τ, с – соответственно текущие полярный радиус и время, $t(r, \tau)$, °С – искомое распределение температуры;

$\rho = \begin{cases} \rho_{ж}, 0 \le r \le r_c; \\ \rho_{П}, r_c < r \le r_t; \end{cases}$ кг/м^3 – плотность;

$c_p = \begin{cases} c_{p.ж}, 0 \le r \le r_c; \\ c_{pП}, r_c < r \le r_t; \end{cases}$ Дж/(кг ·°С) – массовая удельная теплоемкость;

$\lambda = \begin{cases} \lambda_{ж}, 0 \le r \le r_c; \\ \lambda_{П}, r_c < r \le r_t; \end{cases}$ Вт/(м ·°С) – теплопроводность;

r_c, м – радиус скважины ГТР; r_t, м – радиус теплового влияния скважины; τ_t, с – время нагрева жидкости до температуры, отличающейся от температуры невозмущенного массива t_∞ на 1%;

$t_0(r)=\begin{cases} t_{0,ж}, 0 \le r \le r_c; \\ T_\infty, r_c < r \le r_l; \end{cases}$, °C – начальное распределение температуры;

T_∞, °C – температура массива грунта в невозмущенном состоянии;

$a=\dfrac{\lambda}{\rho c}$ – температуропроводность.

Индексы "*ж*" и "*п*" относятся к параметрам соответственно жидкости и породы, слагающей грунт.

Приведенная система линейных дифференциальных уравнений нестационарной теплопроводности с принятыми граничными и начальными условиями справедлива также для описания теплового взаимодействия ГТР с влажным грунтом при отсутствии фазовых переходов содержащейся в нем влаги. Для этого в уравнение (4) необходимо подставлять эффективные значения соответствующих теплофизических характеристик талого (влажного) грунта.

Гораздо сложнее выглядит математическое описание процесса нестационарного теплопереноса в случаях, когда при тепловом взаимодействии подземного сооружения с влажным грунтом происходят фазовые превращения содержащейся в нем влаги [2, 4, 8].

Влажность грунта не только изменяет теплофизические характеристики пород. При достижении в процессе охлаждения грунта температуры фазового перехода содержащаяся в нем влага изменяет агрегатное состояние. Это сопровождается выделением при замерзании и поглощением при таянии теплоты фазового перехода воды на подвижной границе фазовых преобразований [6].

При продолжении охлаждения слоев влажного грунта, прилегающих к стенке скважины с низкотемпературной жидкой фазой СУГ, вокруг нее образуется концентрично расположенная цилиндрическая зона мерзлого грунта. Там, где охлаждение не достигло температуры фазовых переходов воды остается зона влажного (талого) грунта с резко отличающимися свойствами [2].

Для решения краевой задачи сопряженного нестационарного теплообмена в этих условиях в дополнение к ранее упомянутой физической модели теплопереноса в рассматриваемой системе приняты следующие положения:

- мерзлый и талый грунты, как и сухой, представляют собой однородное изотропное твердое тело, к которому применимо уравнение молекулярной теплопроводности;

– мерзлый и талый грунты характеризуются эффективными значениями теплофизических характеристик, которые определяются льдистостью пород в первом случае и их влажностью во втором;
– льдистость пород тождественна их влажности;
– теплофизические характеристики мерзлого и талого грунтов не зависят от температуры;
– на границе мерзлой и талой зон имеет место градиент температуры, обусловленный выделением или поглощением скрытой теплоты фазовых переходов влаги.

При указанных дополнительных положениях физической модели описывающей нестационарный теплообмен геотермального регазификатора и влажного грунта, претерпевающего фазовые переходы содержащейся в нем влаги составляются уравнения нестационарной теплопроводности в одномерной постановке отдельно для талой (непромерзающей) и мерзлой зон грунта [4].

Математическая формулировка задачи имеет вид:

– для талой зоны при $\tau \le \tau_з$, т.е. для условий, существующих до промерзания грунта (в области от стенки скважины до радиуса теплового влияния):

$$\frac{\partial T_T}{\partial \tau} = a_T \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_T}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} \right); r_c \le r \le r_i, \tag{8}$$

$$\lambda_T \left. \frac{\partial T_T}{\partial r} \right|_{r=r_c} = \alpha \left(T_T \big|_{r=r_c} - t_ж \right), \tag{9}$$

$$T_T \big|_{r=r_i} = T_\infty = const, \tag{10}$$

– для талой зоны при $\tau \le \tau_з$, т.е. для части вышеуказанной области, на которую вообще не распространяется промерзание:

$$\frac{\partial T_T}{\partial \tau} = a_T \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_T}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T_T}{\partial r^2} \right); \ \xi \le r \le r_i, \tag{11}$$

$$T_T \big|_{r=\xi(\tau)} = 0, \tag{12}$$

$$T_T \big|_{r=r_i} = T_\infty = const. \tag{13}$$

До начала промерзания ($\tau \le \tau_з$) решение уравнений (8)–(10) будет совпадать с решением краевой задачи нестационарной теплопроводности для сухого грунта с использованием эффективных значений теплофизических характеристик влажного грунта [1].

Начиная с $\tau = \tau_з$, необходимо учитывать влияние фазовых переходов грунтовой влаги на температурное поле в породном массиве и изменение теплофизических свойств пород в мерзлом и талом состояниях.

Уравнение нестационарной теплопроводности для мерзлой зоны при $\tau > \tau_з$, т.е. для образовавшегося льдопородного цилиндра имеет вид:

$$\frac{\partial T_M}{\partial \tau} = a_M \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T_M}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 T_M}{\partial r^2} \right); r_c \le r \le \xi\,, \tag{14}$$

$$\lambda_M \left. \frac{\partial T_M}{\partial r} \right|_{r=r_c} = \alpha \left(T_M \big|_{r=r_c} - t_ж \right), \tag{15}$$

$$T_T \big|_{r=\xi(\tau)} = 0\,. \tag{16}$$

Граничные условия дополняются условием Стефана на перемещающейся границе изменения агрегатного состояния содержащейся в грунте влаги с радиусом ξ. Это условие отражает выделение или поглощение здесь теплоты фазового перехода воды, содержащейся в единице массы влажного грунта $Q_ф = \sigma \rho_в W_е$.

Условие на границе мерзлого и талого грунта (условие Стефана) имеет вид:

$$\left(\lambda_M \frac{\partial T_M}{\partial r} - \lambda_T \frac{\partial T_T}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=\xi} = Q_ф \frac{\partial \xi}{\partial \tau}; \tag{17}$$

$$\xi \big|_{r=r_з,\,\tau=\tau_з} = r_з\,. \tag{18}$$

В приведенных выше уравнениях приняты следующие обозначения: a_M, a_T – температуропроводность соответственно мерзлого и талого грунта; λ_M, λ_T – теплопроводность мерзлого и талого грунта; T_M, T_T – температура мерзлого и талого грунта; ξ – текущий радиус границы промерзания грунта, $Q_ф$ – теплота фазового перехода для единицы массы влажного грунта; σ – удельная теплота фазового перехода воды при замерзании и оттаивании; $\rho_в$ – плотность воды; $W_е$ – естественная влажность грунта; r_c – радиус скважины; $r_т$ – радиус теплового влияния скважины.

Нестационарное распределение температур в жидкой фазе СУГ и в грунте находят путем численного решения вышеприведенных дифференциальных уравнений. При этом для численного решения, как правило, используется метод конечных разностей (МКР).

Сущность метода конечных разностей заключается в замене производной реальной функции, описывающей некий процесс, ее приближенным значением, выраженным через конечную разность значений функций в отдельных точках, взятых с оптимальным шагом разбивки в сеточной области [2].

Исходное уравнение процесса при этом заменяется системой сеточных уравнений для совокупности точек (узлов) в указанной области, при решении которой следует обеспечивать условия сходимости и устойчивости.

Условие сходимости состоит в необходимости получения такого результата, чтобы разность между истинным значением функции и точным решением сеточной системы уравнений при неограниченном измельчении сетки равномерно стремилась к нулю.

Условие устойчивости заключается в том, что разность между точным и приближенным решениями системы сеточных уравнений должна стремиться к нулю при неограниченном увеличении количества узлов в рассматриваемой сеточной области.

При решении сложных краевых задач нестационарного теплопереноса обеспечение этих условий наталкивается на существенные вычислительные трудности [1, 4].

В связи с ростом числа операций, которое необходимо выполнить при решении задач методом МКР, потребное время для решения подобных задач на ЭВМ значительно увеличивается. Попытки преодолеть указанную сложность приводят к использованию либо весьма грубых приближений (методов итераций или прогонки), либо к построению искусственных сеточных областей, обеспечивающих быстрое «улавливание» реальной функции.

Проблем, связанных с обеспечением сходимости и устойчивости численного решения задач нестационарного теплопереноса, лишен метод конечных элементов (МКЭ), который в последнее время интенсивно развивается и находит широкое применение при математическом моделировании различных процессов с самыми сложными начальными и граничными условиями [3, 11].

Сущность метода конечных элементов сводится к выделению в плоскости теплопереноса достаточно тонкого слоя, позволяющего пренебречь теплообменом по высоте, разбивке его на отдельные конечные элементы (блоки), составлению дифференциальных уравнений теплового баланса для соседних элементов, адекватно описывающих процессы нестационарного теплообмена между ними, и решению полученной системы уравнений методами вариационного исчисления [3].

Разбивка (триангуляция) выделенного двумерного слоя на отдельные элементы по радиусу производится неравномерно с целью заведомого увеличения частоты попадания в области значимых изменений температурных полей рассматриваемой системы. Пример триангуляции интересующей нас области нестационарного теплопереноса приведен на рис. 1.

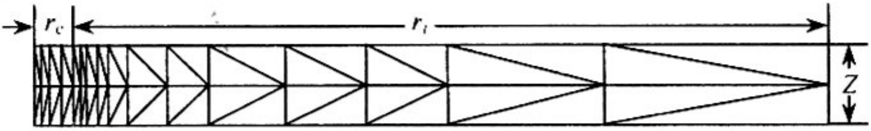

Рис. 1. Пример триангуляции области нестационарного теплопереноса в жидкой фазе СУГ и грунте, примыкающем к скважине ГТР

Здесь r_c – радиус скважины ГТР; r_t – радиус области теплового влияния скважины на грунт; Z – высота выделенного для расчетов слоя, при этом $Z << r_t$. Наиболее частой разбивка слоя на элементы выполнена в области скважины, заполненной жидкой фазой СУГ, а также в слоях грунта, непосредственно примыкающих к стенке скважины, где ожидаются наиболее значительные изменения температуры.

Высокая оперативность метода МКЭ выгодно отличает его от традиционного метода конечных разностей (МКР) и позволяет в кратчайшие сроки проводить большой объем вычислений, варьируя необходимое количество независимых переменных. Этому способствует специально разработанный для задачи о тепловом взаимодействии геотермальных регазификаторов с грунтом пакет программного обеспечения расчетов на ЭВЦМ.

Полученный с помощью МКЭ массив данных о нестационарном температурном поле в жидкой фазе СУГ внутри ГТР и в окружающем грунте служит основой для последующего анализа общих закономерностей процесса их теплового взаимодействия.

Выводы

Показано, что описанные в литературе исследования теплового взаимодействия породного массива с подземными выработками, содержащими флюид с отличной температурой, используют для решения указанной задачи два принципиально отличающихся подхода.

В одном из них проблемы, связанные с нестационарностью процесса, перенесены на определение коэффициента нестационарного теплообмена, входящего в уравнение стационарной теплоотдачи на стенке подземной выработки. Указано на определенные ограничения применимости этого подхода в случае теплового взаимодействия геотермальных регазификаторов СУГ с грунтом вследствие того, что значительная доля в нем приходится на иррегулярный и регулярный режимы теплообмена.

Сущность второго подхода состоит в непосредственном нахождении сопряженного нестационарного распределения температуры в двух средах путем численного решения уравнения нестационарной теплопроводности.

Для случая теплового взаимодействия геотермальных регазификаторов СУГ с сухим и влажным грунтом ищется решение данного уравнения в одномерной постановке.

На основании анализа недостатков широко применяющегося численного решения методом конечных разностей (МКР) предложено использовать более эффективный метод конечных элементов (МКЭ).

Раскрыта сущность этого прогрессивного метода, позволяющего за счет разработанного пакета программного обеспечения для быстродействующих ЭВЦМ получить большой массив данных при изменении основных независимых переменных.

Литература

1. *Галицын А. С.* Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. – К.: Наукова думка, 1983. – 253 с.

2. *Гречилев С. Е., Чистотинов Л. В., Шур Ю. Л.* Криогенные физикогеологические процессы и их прогноз. – М.: Недра, 1980. – 187 с.

3. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.

4. *Косолапов В. Н., Чугунов В. А., Лапин А. В.* Расчет температурного поля горных пород с учетом фазовых переходов содержащейся в грунте влаги // Прогноз и регулирование теплового режима в горных выработках. Якутск, Изд-во Якутского филиала СО АН СССР, 1987. – С. 16–20.

5. *Кудряшов Б.Б., Саламатин А.М., Чугунов В.А.* Границы применимости коэффициента нестационарного теплообмена. – Л.: Изд-во ЛГИ. 1975.

6. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. Справочник. – М.: Энергия, 1971.

7. *Лыков А.В., Михайлов Ю.А.* Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 535 с.

8. *Лялько В.И.* Методы расчета тепло- и массопереноса в земной коре. – К.: Наукова думка, 1974. – 125 с.

9. *Пудовкин М. А., Чугунов Д. А., Саламатин А.А.* Задачи теплообмена в приложении к теории бурения скважин. – Казань: Изд-во Казанск. Гос. Ун-та, – 1977. – 160 с.

10. *Стаскевич Н.Л., Вигдорчик Д. Я.* Справочник по сжиженным углеводородным газам . – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 388 с.

11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.

12. *Щербань А. Н., Кремнев О. А.* Научные основы расчета и регулирования теплового режима глубоких шахт. – К.: Изд-во АН УССР, 1959, Т. 1 – 430 с.; Т. 2 – 347 с.

13. *Щербань А. Н., Добрянский Ю. П., Травкин В. С.* Нестационарный теплообмен с горным массивом, окружающим выработку // Физ.-техн. Проблемы разработки полезных ископаемых. – К.: Наукова думка, 1978. – С. 75–79.

14. *Энкашев М. М.* Решение однофазной сопряженной задачи теплопроводности для горной выработки методом интегральных соотношений // Физ. процессы горного производства. – М.: Энергия, 1978. - С. 24–29.

15. *Jordan D.* The Numerical solution of underground heat transfer problems -- Int journ. Rock Mech. Sci., 1965, #2. – PP. 111-131.

16. *Amano K., Mizuta J., Hiramatzu J.* An improved method of prediction underground climate – Int journ. Rock Mech. Sci., 1982, #19. – PP. 31-38.