УДК 628.334.159

Г. М. Кононенко
Київський Національний університет
будівництва і архітектури

ТЕРМОГІДРОДИНАМІКА ОДНІЄЇ ЦИРКУЛЯЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

Для невеликих замкнених областей, коли стисливістю порід можна знехтувати, вивчення гідродинаміки циркуляційних систем можна значно спростити, прийнявши нагнітальну свердловину за точкове джерело. Тоді можна ввести δ-функцію, яка описує таку свердловину-джерело. Задача прогнозу динаміки тисків в гідродинамічній системі джерело-стік в замкненій області приводить до розв'язання рівняння

$$\frac{\rho k}{\mu} gradP = -q\delta(\vec{r} - \vec{r}_1), \tag{1}$$

де P – тиск, $\vec{r}_1$ – радіус-вектор джерела, $\vec{r}$ – радіус-вектор точки поля, ρ – густина рідини, k – проникність, μ – в'язкість, q – витрата рідини.

Граничні умови такі

$$P\bigg|_{G_1} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial n}\bigg|_{G_2} = 0. \tag{3}$$

Умова (2) задає постійним тиск на поверхні стоку; умова (3) показує, що через деяку поверхню перетікання рідини не відбувається. Так, для випадку: джерело – нагнітальна свердловина, стік – циліндричний колодязь значного радіуса a та радіус гідродинамічно ізольованої межі області фільтрації рідини b, причому $b >> a$, задача (1)–(3) при постійній проникності формулюється так (рисунок)

$$\frac{\rho k}{\mu} grad\, P = -q\delta(\vec{r} - \vec{r}_1), \tag{4}$$

$$P\bigg|_{a} = 0, \tag{5}$$

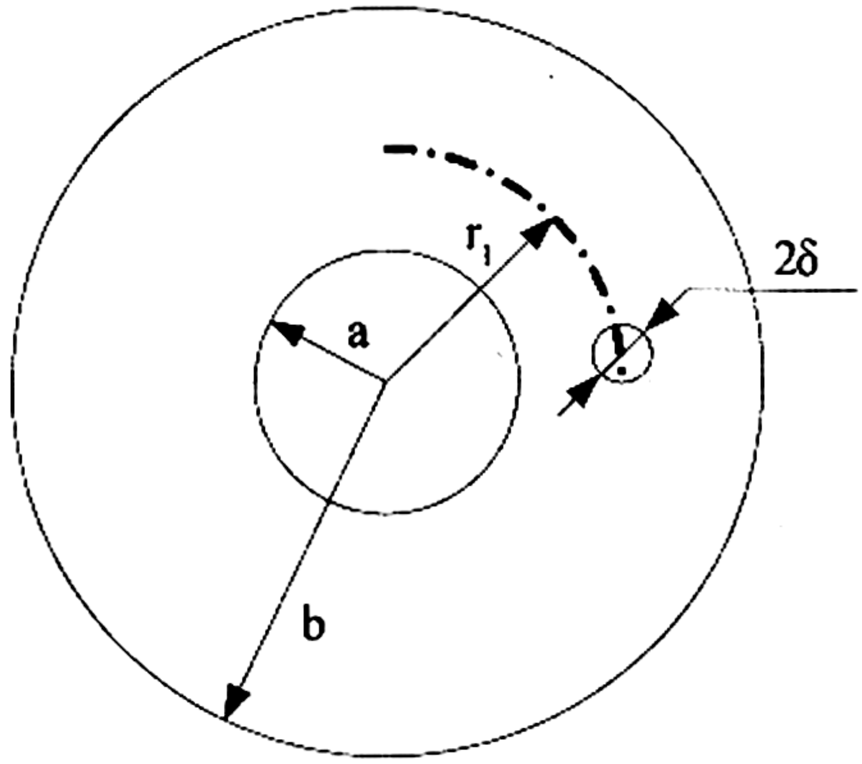

Рисунок. Загальна схема системи.

$$\left.\frac{\partial P}{\partial r}\right|_b = 0. \qquad (6)$$

Розв'язання задачі (4)–(6) будемо шукати у вигляді ряду [1]

$$P = \sum_m A_m(\varphi_1)\, g_m(r, r_1)\, y_m(\varphi) \qquad (7)$$

При цьому $\delta-$функцію, що стоїть в правій части рівняння (4), запишемо в циліндричних координатах

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) = \frac{1}{J\left(\frac{x, y}{r, \varphi}\right)}\delta(r - r_1)\,\delta(\varphi - \varphi_1), \qquad (8)$$

($J(\lambda)-$функціональний визначник (якобіан) переходу від декартових координат до циліндричних), а $\delta(\varphi - \varphi_1)$ розкладемо в ряд по ортонормованій системі функцій

$$\delta(\varphi - \varphi_1) = \sum_0^\infty v_k(\varphi)\, v_k(\varphi_1). \qquad (9)$$

При цьому будемо вимагати, щоб $P(\varphi + 2\pi) = P(\varphi)$. Підставляючи (7), (8) та (9) в (4), одержимо

$$\sum_m A_m(\varphi_1)\left[y(\varphi)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial g_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} g_m \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right] = \frac{\mu\, q}{\rho k}\delta(r - r_1)\sum_m v_k(\varphi)\,\bar{v}_k(\varphi_1). \qquad (10)$$

Система ортонормованих функцій у відповідності з розробками [2]

$$\sum_m v_k(\varphi)\,\bar{v}_k(\varphi_1) = \frac{1}{\pi}\sum_m e^{i\,m(\varphi-\varphi_k)} \,. \tag{11}$$

Із співвідношень (10) і (11) випливає, що

$$A_m(\varphi) = \frac{1}{\pi} e^{-i\,m\,\varphi_1} . \tag{12}$$

При $r \neq r_1$ права частина рівняння (10) дорівнює нулю. Тоді, розв'язуючи рівняння

$$y(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{y}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{13}$$

методом відокремлення змінних з врахуванням умови симетрії, знайдемо

$$\frac{1}{y}\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} = -m^2;$$

звідки

$$y_m = e^{i\,m\,\varphi} . \tag{14}$$

Розв'язок рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial g_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r} g_m = 0 \tag{15}$$

будемо шукати у вигляді

$$\begin{cases} A\,r^m + B\,r^{-m}, \; r < r_1 \\ C\,r^m + D\,r^{-m}, \; r > r_1 \end{cases} . \tag{16}$$

Для розв'язання задачі (4)–(6) необхідно знайти коефіцієнти A, B, C і D, як функції від a, b, r', m і підставити (12), (14), (16) в (7). Для одержання цих коефіцієнтів вимагатимемо задоволення граничних умов (5), (6), та врахуємо симетричність функції $g(r, r') = g(r', r)$. Після інтегрування рівняння

$$\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial g_m}{\partial r} - \frac{m^2}{r} g_m = \frac{\mu\,q}{\rho\,k}\delta(r - r_1)$$

в межах від $r_1 - \varepsilon$ до $r_1 + \varepsilon$ $(\varepsilon \to 0)$ одержимо

$$
g_m = \frac{q\mu}{\rho k}\sum_0^\infty \frac{1}{2m\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^{2m}\right]}\begin{cases}\left(\frac{r}{r_1}\right)^m\left[1-\left(\frac{a}{2}\right)^{2m}\right]\left[1+\left(\frac{r_1}{b}\right)^{2m}\right] & r<r_1, \\ \left(\frac{r_1}{r}\right)^m\left[1+\left(\frac{r}{b}\right)^{2m}\right]\left[1-\left(\frac{a}{r_1}\right)^{2m}\right] & r>r_1. \end{cases} \tag{17}
$$

Розкриваючи невизначенність при $m=0$ і підставаляючи (17), (12) і (14) у вираз (7), одержимо

$$
P = \frac{1}{2\pi}\frac{q\mu}{\rho k}\begin{cases}\ln\frac{r}{a}+\sum\limits_1^\infty \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)^m\left(1-\frac{a^{2m}}{r^{2m}}\right)\left(1+\frac{r_1^{2m}}{b^{2m}}\right)\cos m\varphi}{m\left(1+\frac{a^{2m}}{b^{2m}}\right)} & r\le r_1, \\ \ln\frac{r_1}{a}+\sum\limits_1^\infty \frac{\left(\frac{r_1}{r}\right)^m\left(1+\frac{r^{2m}}{b^{2m}}\right)\left(1-\frac{a^{2m}}{r_1^{2m}}\right)\cos m\varphi}{m\left(1+\frac{a^{2m}}{b^{2m}}\right)} & r\ge r_1. \end{cases} \tag{18}
$$

За формулою (18) можна розрахувати поле тисків та швидкостей в області фільтрації при нагнітанні рідини через точкову свердловину. При цьому під q вважатимемо витрату рідини на одиницю висоти пласта. Цей же розв'язок можна використовувати для знаходження тиску, який необхідно задавати на свердловині для забезпечення витрати рідини q. Якщо радіус свердловини $\delta \ll r_1$ і $\delta \ll a$, то з точністю до членів другого порядку малості цей тиск дорівнює тому тискові, який одержимо за формулою (18) при $r=r_1-\delta$ і $\varphi=0$.

Враховуючи розклад $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots=\ln(1-x)$ при $x\in(-1;1)$ і те, що $r_1-\delta\approx r_1$, одержимо цей розв'язок у вигляді

$$
P=\frac{1}{2\pi}\frac{q\mu}{\rho k}\ln\frac{r_1^2-a^2}{a\delta}\frac{b^2-a^2}{b^2-r_1^2}. \tag{20}
$$

При роботі циркуляційної системи в необеженому пласті ($b\to\infty$ або при $b/r_1\ge 10$) розв'язок приймає вигляд

$$P=\frac{1}{2\pi}\frac{q\mu}{\rho k}\ln\frac{r_1^2-a^2}{a\delta} \tag{21}$$

Так, при $\mu=1$ *спуаз,* $\rho=1$ г/см^3, $a=30$ *м,* $b=240$ *м,* $r_1=180$ *м* тиск на нагнітальній свердловині одержано таким (q – см^3/см/с; *k-дарсі*): при радіусі свердловини $\delta=0{,}1$ *м* $P = 1{,}704\frac{q}{k}$, при радіусі свердловини $\delta=0{,}2$ *м* $P = 1{,}480\frac{q}{k}$, при радіусі свердловини $\delta=1$ *м* $P=1{,}240\frac{q}{k}$, для необмеженого пласта ($b\to\infty$) і $\delta=0{,}1$ *м,* $\delta=0{,}2$ *м,* $\delta=1$ *м* одежуємо відповідно $P = 1{,}474\frac{q}{k}$, $P=1{,}363\frac{q}{k}$, $P = 1{,}107\frac{q}{k}$.

Нижче наведені значення необхідного перепаду тиску P при $r_1=100$ *м*, і різних значеннях $a=n\delta$ і b/r_1.

b/r_1	1,5	2,0	5,0	10,0	20,0	∞
			$\delta=0{,}05$ *м*			
$n=1$	2,5130	2,4652	2,4259	2,4210	2,4198	2,4194
$n=10$	2,1465	2,0988	2,0597	2,0546	2,0534	2,0530
$n=20$	2,0360	1,9884	1,9491	1,9442	1,9430	1,9426
$n=50$	1,8902	1,8425	1,8032	1,7983	1,7971	1,7967
$n=100$	1,8148	1,7318	1,6926	1,6877	1,6865	1,6780
			$\delta=0{,}1$ *м*			
$n=1$	2,2924	2,2446	2,2053	2,2004	2,1992	2,1988
$n=10$	1,9259	1,8781	1,8388	1,8339	1,8327	1,8323
$n=20$	1,8155	1,7677	1,7285	1,7235	1,7226	1,7220
$n=50$	1,6692	1,6214	1,5823	1,5774	1,5762	1,5758
$n=100$	1,4251	1,3781	1,3395	1,3347	1,3336	1,3332

Одержані результати добре узгоджуються з даними досліджень [1] і [4].

Нехай тепер коефіцієнт фільтрації в обмеженій зоні залежить від радіуса $k=A/r^{\alpha}$. Підставляючи це значення k у формулу (1), замість (4) одержимо

$$\frac{k\rho A}{\mu}div\frac{1}{r^{\alpha}}grad\,P=-q\delta(r-r_1)\,. \tag{22}$$

При цьому граничні умови залишаються попередніми виду (5) і (6), а розв'язок будемо шукати у вигляді (7). Повторюючи дії, аналогічні попереднім, для j_m і A_m одержимо тіж значення (12), (14), а для g_m при $r \neq r_1$ замість співвідношення (15) одержимо рівняння

$$\frac{1}{r^{\alpha-1}}\frac{d^2 g_m}{dr^2}+\frac{1-\alpha}{r^{\alpha}}\frac{dg_m}{dr}-m^2\frac{g_m}{r^{\varepsilon+1}}=0. \tag{23}$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$g_m=\begin{cases} Ar^{n_1}+Br^{n_2}, & \text{при } r<r_1 \\ Cr^{n_1}+Dr^{n_2}, & \text{при } r>r_1, \end{cases} \tag{24}$$

де

$$n_1=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4m^2}}{2},\quad n_2=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4m^2}}{2}.$$

Підставляючи розв'язок (24) у рівняння

$$\frac{1}{r^{\alpha-1}}\frac{d^2 g_m}{dr^2}+\frac{1-\alpha}{r^{\alpha}}\frac{dg_m}{dr}-m\frac{g_m}{r^{\alpha+1}}=\frac{\mu q}{A\rho k}\delta(r-r_1), \tag{25}$$

інтегруючи ліву та праву частини у межах від $r_1-\varepsilon$ до $r_1+\varepsilon$ $(\varepsilon\to 0)$ і задовольняючи граничні умови (5), (6) та умову симетрії функції $g(r,r_1)$, одержимо

$$g_m=\frac{\mu q}{\rho A}(rr_1)^{\alpha_1}\frac{1}{2\gamma\left(1+\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma+\alpha_1}\left(\frac{a}{b}\right)^{2\gamma}\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{a^{2\gamma}}{r^{2\gamma}}\right)\left(\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma+\alpha_1}\cdot\frac{r_1^{2\gamma}}{b^{2\gamma}}+1\right) & \text{при } r<r_1 \\ \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\gamma}\left(1+\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma+\alpha_1}\cdot\frac{r^{2\gamma}}{b^{2\gamma}}\right)\left(1-\frac{a^{2\gamma}}{r_1^{2\gamma}}\right) & \text{при } r>r_1, \end{cases}$$

де

$$\gamma=\frac{\sqrt{\alpha^2+4m^2}}{2};\quad \alpha_1=\frac{\alpha}{2}.$$

Нехтуючи другим доданком у знаменнику при малих значенях відношення a/b, одержимо вираз для визначення тиску в довільній точці області фільтрації

$$P = \frac{1}{2\pi}\frac{q\mu}{\rho\sqrt{k(r)k(r_1)}}\begin{cases}\dfrac{2}{\alpha}\left(\dfrac{r}{r_1}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1-\left(\dfrac{a}{r}\right)^{\alpha}\right)+ \\ \dfrac{2}{\alpha}\left(\dfrac{r_1}{r}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\left(1-\left(\dfrac{a}{r_1}\right)^{\alpha}\right)+\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&+\sum_1^{\infty}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\gamma}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{2\gamma}\right)\left(\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma+\alpha_1}\left(\frac{r_1}{b}\right)^{2\gamma}+1\right)\cos m\varphi, \quad r \le r_1 \\ &+\sum_1^{\infty}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{\gamma}\left(1+\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma+\alpha_1}\left(\frac{r}{b}\right)^{2\gamma}\right)\left(1-\left(\frac{a}{r_1}\right)^{2\gamma}\right)\cos m\varphi, \quad r \ge r_1 .\end{aligned} \tag{26}$$

За формулою (26) можна розрахувати поле тисків в заданій обмеженійобласті фільтрації. Але нас також цікавить перепад тиску на свердловинах, необхідний для забеспечення заданої витрати q. При радіусі свердловини $\delta << a, r_1$ для цього досить покласти $r = r_1 - \delta$, $\varphi = 0$, $k(r) \cong k(r_1)$. Враховуючи, що при $\alpha \le 5$ та $m \ge 10$ $\gamma \cong m$, перепад тиску можна розраховувати за формулою

$$P = P_1 + \delta P, \tag{27}$$

де

$$P_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{q\mu}{\rho\, k(r_1)}\left(\frac{2}{\alpha}\left(1-\left(\frac{a}{r_1}\right)^{\alpha}\right)+\ln\frac{r_1}{\delta}\frac{b^2-a^2}{b^2-r_1^2}\frac{r_1^2-a^2}{r_1^2}\right), \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\delta P = \frac{1}{2\pi}\frac{q\mu}{\rho\, k(r_1)}&\sum_1^{10}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\gamma}\left(1-\left(\frac{a}{r_1}\right)^{2\gamma}\right)\left(\frac{\gamma-\alpha_1}{\gamma+\alpha_1}\left(\frac{r_1}{b}\right)^{2\gamma}+1\right)- \\ &-\sum_1^{10}\frac{1}{m}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{m}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{2m}\right)\left(\left(\frac{r_1}{b}\right)^{2m}+1\right).\end{aligned} \tag{29}$$

За формулами (27), (28) та (29) знайдемо перепад тиску, необхідний для нагнітання у пласт q ($см^3/см.с$) за таких умов: $A = 100$, $a = 30$, $b = 240$, $r_1 = 180$, $\rho = 1$, $\mu = 1\,спз$:

$\alpha = 2$

$$\delta = 10\,см,\ P = 1{,}32\frac{q}{k};\ \delta = 20\,см,\ P = 1{,}24\frac{q}{k};\ \delta = 100\,см,\ P = 0{,}95\frac{q}{k};$$

при $\delta = 10$ *см* та $b \to \infty$ $P = 1{,}17\dfrac{q}{k}$.

$\alpha = 4$

$$\delta = 10\,см,\ P = 1{,}16\frac{q}{k};\ \delta = 20\,см,\ P = 1{,}04\frac{q}{k};\ \delta = 100\,см,\ P = 0{,}79\frac{q}{k};$$

при $\delta = 10$ *см* та $b \to \infty$, $P = 1{,}01\dfrac{q}{k}$.

Для реальних умов при $r_1 = 6a$, $k(r_1) \approx 5 \cdot 10^{-3}$ *дарсі*, потужності пласта 250 *м*, витраті рідини 1000 $м^3$/*доба* (q = 0,46 $см^3/(см.с)$ одержані наступні перепади тисків (в *атм*) на свердловинах:

$\delta(м)/k(д)$	0,1	0,2	1,0	0,1 ($b \to \infty$)
$k = const$	156	137	114	134
$k = \dfrac{A}{r^2}$	122	114	87	108
$k = \dfrac{A}{r^4}$	107	95	73	93

Якщо відбір рідини здійснюється кількома свердловинами з координатами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_n$ і витратами $q_1, q_2, ..., q_n$, то тиск на i-тій свердловині P_i можна знайти як суму тиску, який необхідно було б задати в цій свердловині, якби решта свердловин не працювали (формула (20), коли $k = const$, та формули (28)–(30), коли k відповідає степеневому закону) і тиску, який в точці r_i зумовлюють решта свердловин. Цей тиск дорівнює суперпозиції тисків (n-1) свердловин, а знаходити їх можна за формулами (18) при $k = const$) та (27) для степеневого закону зміни k. При цьому у виразах (18) і (21) під r_1 вважають відстань від центра області фільтрації до однієї з (n–1) свердловин, під r – відстань i-ої свердловини, φ – кут між напрямами на i-ту довільну свердловину.

Теплові дослідження гідродинамічної системи можна провести на основі запропонованого нами в [5] і [6] методу ліній течії.

Використана література

1. *Гусейн-заде М.А.* Особенности движения жидкости в неоднородном пласте. – М.: Недра, 1965. – 276 с.

2. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики: Справочное руководство. – М.: Физматгиз, 1960. – 618 с.

3. *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. – М.: Наука, 1964. – 206 с.

4. Проектирование водозаборов подземных вод / За ред. Ф.М.Бочевера – М.: Стройиздат, 1976. – 292 с.

5. *Кононенко Г.М.* Методы расчета тепло- и массопереноса при фильтрации жидкости в пористой и трещиноватой средах // Математическое исследование процессов фильтрации и тепломассопереноса: Сб. науч. тр. – К.: Наукова думка, 1978. – С. 111–122.

6. *Кононенко Г. М.* Тепло-и массоперенос в системах извлечения тепла земной коры // 4-й національний конгрес з теоретичної і прикладної механіки (Варна 14–18 вересня 1981 р.). – Софія: АН Болгарії, 1981. – С. 801–807.