УДК 697.94

Н. Я. Мамедов, *канд. техн. наук, доцент,*
Азербайджанский Архитектурно-строительный университет

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАСХОДА ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЗДАНИЙ

Интенсивный рост строительства включает в себя как одно из основных направлений, создание эффективной системы оперативного учета тепловой энергии, разработка и внедрение систем оптимального управления режимами внутреннего микроклимата, обеспечивающих рациональное использование энергоресурсов, повышение качества теплового комфорта, создание банка возможных аварийных ситуаций, разработка интеллектуального элемента системы климатизации эксплуатируемого здания и т.д. Для решения этих проблем иногда используются детерминированные модели, основанные на физических законах, что дает возможность вычислить почти точное значение какой-либо зависящий от времени величины [1].

Однако исследования показывают, что климатизационные процессы имеют детерминированные и случайные составляющие. Как известно, детерминированные составляющие можно моделировать с помощью суперпозиции гармонических колебаний с разными амплитудами и разовыми сдвигами. Однако из конечности моделирования климатизационных процессов и неизвестности характера случайного компонента (параметров окружающей среды) следует, что любая модель не полностью описывает реальную картину.

Большинство методов прогнозирования позволяют оценить только параметры одного уравнения, что не дает возможность учесть синхронные связи между изучаемыми активными факторами и часто обусловлено практическими соображениями [2]. При этом проблема идентификации не играет никакой роли. Поэтому иногда приходится делать некоторые допущения, что позволяет получить результаты на простом инженерном языке. Например, если даже когда ничего не известно об основном механизме генерирования ряда потребления тепловой энергии для климатизации здания, предполагается, что в системе существует достаточная инерция, чтобы гарантировать в будущем такое же поведение, как и в прошлом. Кроме того математический метод выбора подходящего вида функции для тренда из множества себе подобных проводится с помощью субъективно принимаемого критерия. В следствии случайного характера прогнозирующей функции, получаемой в результате применения математико-статистического анализа, условия наилучшего ее приближения к желаемой функции имеют вероятностный характер. При этом из множества функций необходимо выбирать такую, чтобы сумма квадратов отклонений ее значений от фактических данных была минимальной. В силу вышеуказанного сформулируем задачу моделирования климатизационных процессов в следующем виде.

Пусть реализация случайной функции расхода тепловой энергии *q(t)* известна до текущего момента времени *t*. Требуется найти такой оператор *К*, действие которого на функцию *q(t)* давало бы новую функцию *T(t)=Kq(t)* и в некоторый будущий момент времени $(t + \Delta t)$ удовлетворяло бы условию:

$$\sigma^2 = M\{[T(t+\Delta t) - q(t+\Delta t)]\} \to \min \tag{1}$$

Задача, поставленная в таком общем виде, для оператора *К* и свойств функции *q(t)* решается весьма сложно. Однако при некоторых практически приемлемых допущениях можно упрощать поставленную задачу:

1. Оператор *К* – линейный и не зависит от времени.
2. Случайная функция *q(t)* стационарна и известна на неограниченно большом промежутке времени, предшествующему моменту времени *t.*

Второе условие нужно понимать в том смысле, что время, в течение которого ход случайной функции *q(t)* предполагается известным, должно быть достаточно большим, чтобы ордината корреляционной функции за это время превратилась практически в нуль, т.е. временной интервал реализации функции расхода тепловой энергии должен быть больше времени корреляции этой функции. Из вышеуказанных предположений ясно, что математическое ожидание и корреляционные функции случайного процесса тепловой энергии известны. Кроме того предположим, что реализация *q(t)* определена точно, без ошибок измерения.

Если обозначим весовую функцию через $\ell(t)$, функцию *T(t)* можно выразить через функцию *q(t)*:

$$T(t+\Delta t) = \int_0^{\infty} \ell(\tau) q(t-\tau) d\Delta t \tag{2}$$

где τ – временной шаг.

Весовая функция зависит при этом от величины Δt. В этом случае условие оптимальности можно переписать в виде:

$$\sigma^2 = M\left\{\left[\int_0^\infty \ell(\tau)q(t-\tau)d\tau - q(t+\Delta t)\right]^2\right\} \to \min \qquad (3)$$

Если реализация случайной функции *q(t)* проводится без ошибок и ее математическое ожидание и корреляционная функция известны, весовую функцию *ℓ(t)* можно определить следующим образом:

Определяется оптимальная передаточная функция – $L(\omega)$ из следующего уравнения:

$$F(\omega) = L(\omega)\cdot S_{q(t+\tau)q(t+\tau)}(\omega) - e^{i\omega\Delta t} S_{q(t)q(t+\tau)}(\omega) = 0 \qquad (4)$$

ω – угловая частота; $S_{qq}(\omega)$ – спектральная платность случайной функции *q(t)*.

Решая уравнения (4) определяем весовую функцию *ℓ(t)*:

$$\ell(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} L(\omega) d\omega \qquad (5)$$

Следует отметить, что преобразование выражения (2) приводит к интегральному уравнению Винера-Хопфа, решение которого представляется в виде (4). Предполагается, что спектральные плотности являет-ся рациональными функциями частоты ω, что существенно облегчает определение аналитического вида весовых функций *ℓ(t)* и соответственно значения функции расхода тепловой энергии на некоторый будущий момент времени $(t + \Delta t)$.

Как видно из (4) и (5) решение поставленной задачи выражено весьма обобщенными видами, что для каждого конкретного случая требует дополнительное применение индивидуальных подходов. Обычно на практике корреляционные функции, полученные по экспериментальным данным, аппроксимируют аналитическими выражениями, имеющими рациональные спектральные функции.

Проведенные нами исследования показывают, что корреляционные функции параметров окружающей среды, в том числе и расход тепловой энергии в зданиях, содержат гармонические составляющие:

$$R(\tau) = De^{-\alpha\tau}\cos\beta t \qquad (6)$$

где D, α и β – неизвестные коэффициенты.

Этим корреляционными функциям соответствует спектральная плотность:

$$S_{q(t)q(t)}(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{\left(\omega^2-\alpha^2-\beta^2\right)+4\alpha^2\omega^2} \tag{7}$$

В рамках нашего предположения ошибка измерения отсутствует, тогда:

$$R_{q(t)q(t)}(\tau)=R_{q(t)q(t+\tau)}(\tau)=R_{q(t+\tau)q(t+\tau)}(\tau) \tag{8}$$

Следовательно

$$S_{q(t)q(t)}(\omega)=S_{q(t)q(t+\tau)}(\omega)=S_{q(t+\tau)q(t+\tau)}(\omega) \tag{9}$$

Формулу (7) преобразуем в виде:

$$S_{q(t)q(t)}(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2+\omega^2}{[\omega+(\beta+i\alpha)][\omega-(\beta+i\alpha)][\omega+(\beta-i\alpha)][\omega-(\beta-i\alpha)]} \tag{10}$$

Тогда формула (4) запишется в виде:

$$F(\omega)=\frac{D\alpha}{\pi}\cdot\frac{\left[L\left(\omega-e^{i\omega\Delta t}\right]\left[\omega^2+\beta^2+\alpha^2\right]\right.}{[\omega+(\beta+i\alpha)][\omega-(\beta+i\alpha)][\omega+(\beta-i\alpha)][\omega-(\beta-i\alpha)]}\equiv 0 \tag{11}$$

Как видно из (11) знаменатель правой части имеет нули в точках

$$\left.\begin{aligned}\omega_1&=\beta+i\alpha\\ \omega_2&=-\beta+i\alpha\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Так как выражение $\omega^2+\beta^2+\alpha^2$ в этих точках в нуль не обращается, то при этих значениях ω должно быть равна нулю функция $\left[L(\omega)-e^{i\omega\Delta t}\right]$. Отсюда получаем:

$$\left.\begin{aligned}L(\omega_1)&=e^{i\omega_1\Delta t}\\ L(\omega_2)&=e^{i\omega_2\Delta t}\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Выражение $\omega^2+\beta^2+\alpha^2$ имеет нули в верхней полуплоскости в точке $i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Тогда для простоты дальнейшего вычисления принимаем функцию $L(\omega)\left(\omega-i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)$, равной линейной функции $A\omega+B$:

$$L(\omega)\left(\omega-i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)=A\omega+B \tag{14}$$

Откуда

$$L(\omega)=\frac{A\omega+B}{\left(\omega-i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)} \qquad (15)$$

Учитывая (12) и (13) в (14) получим систему для определения коэффициентов *A* и *B*:

$$\left.\begin{aligned} e^{-\alpha\Delta t}\left[\beta+i\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\right]e^{i\beta\Delta t} &= A(\beta+i\alpha)+B \\ e^{-\alpha\Delta t}\left[-\beta+i\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)\right]e^{i\beta\Delta t} &= A(-\beta+i\alpha)+B \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Решив эту систему получим:

$$\left.\begin{aligned} A &= e^{-\alpha\Delta t}\left(\cos\beta\Delta t+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t\right) \\ B &= e^{-\alpha\Delta t}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t-\cos\beta\Delta t\right)i\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Учитывая (17) в (15) и после некоторых элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= A-\frac{A\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-iB}{i\omega+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=e^{-\alpha\Delta t}\left(\cos\beta\Delta t+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t\right)- \\ &-e^{-\alpha\Delta t}\,\frac{2}{i\omega+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\sin\beta\Delta t \end{aligned} \qquad (18)$$

Учитывая последнее в (5) получим:

$$\begin{aligned} \ell(t) &= \frac{1}{2\pi}e^{-\alpha\Delta t}\left(\cos\beta\Delta t+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t\right)\int_0^\infty e^{i\omega t}d\omega- \\ &-\frac{2}{2\pi}e^{-\alpha\Delta t}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\sin\beta\Delta t\int_0^\infty\frac{2}{i\omega+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{i\omega t}d\omega \end{aligned} \qquad (19)$$

Используя свойства дельта-функции и табличных интегралов [3], получим весовую функцию в виде:

$$\begin{aligned}\ell(t)=&\left[\cos\beta\Delta t+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t\right]e^{-\alpha\Delta t}\delta(t)-\\&-\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\beta}\sin\beta\Delta t\, e^{i\Delta t}e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,t}\end{aligned}\qquad(20)$$

Последний учтя в (2), получим формулу оптимального прогноза в виде:

$$\begin{aligned}q(t+\Delta t)=&\left[\cos\beta\Delta t+\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t\right]e^{-\alpha\Delta t}q(t)-\\&-\frac{2\left(\alpha^2+\beta^2-\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)}{\beta}\sin\beta\Delta t\, e^{-i\Delta t}\int_0^t q(t-\tau)e^{-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\tau\end{aligned}\qquad(21)$$

Формула (21) показывает, что прогнозируемое значение $q(t+\Delta t)$ зависит не только от последнего из известных значений реализаций $q(t+\Delta t)$, но и от значений ее при всех предшествующих значениях аргумента, по которым производится интегрирование. Средний квадрат ошибки прогноза составляет:

$$\sigma^2=\frac{D}{2}\left[1-e^{-2\alpha\Delta t}\left(\cos(\beta\Delta t)-\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t\right)^2\right]\qquad(22)$$

Как видно из формулы (22), точность прогноза экспоненциально зависит от длины упреждения Δt и возрастает при увеличении периода упреждения и стремится к половине среднеквадратического отклонения исследуемого временного ряда.

Следует отметить, что в практике обычно в качестве расхода тепловой энергии используются наблюдения, проводившиеся в различные моменты времени. При этом в качестве реализации, соответствующих одинаковым условиям, принимаются наблюдения, проводившиеся в аналогичных в некотором смысле временных интервалах и фиксированное значение случайной функции составляет случайные последовательности, которые по определенности можно рассматривать как величины непрерывного типа. Как известно, в этом случае математическое ожидание, корреляционные функции и спектральные плотности остаются в силе, за исключением того, что аргументы функций могут принимать только целочисленные значения [4]. В связи с этим статистические характеристики случайной функции расхода тепловой энергии, определенные по экспериментальным данным, являются приближенными и могут отличаться от истинных значений математического ожидания и корреляционной функции.

Для уменьшения влияния ограниченности числа и записи интервала реализации при определении математического ожидания и дисперсии, а также влияний ошибки приближенных вычислений корреляционное функции и последующей её аппроксимации в виде (6), предлагаем следующую методику прогнозирования расхода тепловой энергии.

Пусть имеем данные расхода тепловой энергии, зафиксированные в течение n числа временных интегралов: $q(t)$, $q(t-1)$, $q(t-2)$, …, $q(t-n)$, с заканчивающимся временем, обозначенным через t. Прогнозируемое значение $q(t+\Delta t)$ определяем как линейную комбинацию этих значений:

$$q(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k q(t-k) \quad (23)$$

Коэффициент $\varphi_к$ определяется как значение оптимальной передаточной функции (20) при замене в ней t на $(t–к)$.

Следует отметить, что формула (23) является приближенным значением функции (2) на ограниченном интервале интегрирования, вычисленная методом прямоугольников. Она по сути своей записи похожа на авторегрессионные модели. Рекурсивная зависимость прогнозируемых значений от предыдущих фактических данных повышает адаптируемость данного метода.

Следует отметить, что точность предлагаемой модели всегда будет не ниже точности любой другой модели, что представляет существенный интерес при оценке той точности, которую требует практика. Кроме того предложенная прогнозная модель временного ряда тепловой энергии на основе корреляционной и спектральной функции позволяет автоматизировать вычисление при использовании её на практике с применением специальных приборов-корреляторов.

Выводы

Предложена прогнозная модель временного ряда тепловой энергии на основе решения задачи синтеза математического оператора, переводящего значение случайной функции до текущего момента времени в некоторый будущий момент с использованием корреляционной и спектральной теории случайных функций. Показано, что точность предлагаемой модели всегда будет не ниже точности любой другой модели, что представляет существенный интерес при оценке той точности, которую требует практика.

Литература

1. *Табунщиков Ю. А., Бродач М. М.* Математическое моделирование и оптимизация тепловой эффективности зданий. М.: АВОК-ПРЕСС, 2002, 194 с.

2. *Сейдж Ж. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982, 392 с.

3. *Бендат Дж., Пирсон А*. Измерение и анализ случайных процессов. М.: Мир, 1974, 250 с.

4. *Бендат Дж., Пирсон А*. Применение корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983, 312 с.