

УДК 539.3(075)

## Концептуальні основи аналізу тепломасообмінних і деформаційних процесів у полімерних дисперсних тілах для формування мікроклімату музеїв

В. Б. Довгалюк<sup>1</sup>, Ю. В. Човнюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>к.т.н., проф. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, 2280170@ukr.net  
ORCID: 0000-0002-4836-5354

<sup>2</sup>к.т.н., доц. Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна, uchovnyuk@ukr.net

*Анотація.* Для збереження музейних експонатів, серед яких полімерні дисперсні, необхідно забезпечити параметри мікроклімату, що максимально уповільнюють старіння та деградацію. Використовуючи теорію Больцмана-Вольтерри, перший закон термодинаміки для відкритих систем та метод визначення параметрів функцій впливу, обґрунтована адекватна фізико-механічна модель, яка описується системою диференціальних рівнянь для аналізу тепломасообмінних і деформаційних процесів у дисперсних матеріалах. Показано, що при дослідженні впливу теплоти й вологи на деформаційні властивості полімерних матеріалів, більш адекватним є не однобічне врахування впливу тепломасообміну на реологічні процеси, а опис їхнього взаємного впливу один на одного. Такий підхід дозволяє вивчити вплив температурно-вологісного режиму музейних приміщень на процеси навантаження й деформування полімерно-дисперсних матеріалів музейних експозицій. Уведення в систему диференціальних рівнянь, що описують процеси тепломасообміну й деформації в колоїдних капілярно-пористих тілах з урахуванням відносної вологості середовища, у якому знаходиться матеріал, дозволяє максимально точно описати процеси, які відбуваються при музейному зберіганні експонатів. Отримані в роботі результати можуть бути використані для розробки інженерних методів розрахунку систем формування мікроклімату музейних приміщень, як на стадіях проектування відповідних технічних систем, так і в режимах реальної експлуатації останніх.

*Ключові слова:* тепломасообмін, деформація, дисперсність, матеріали.

**Постановка проблеми.** Однією з найбільш важливих задач збереження історичної спадщини є збереження музейних експонатів, серед яких левову частку складають полімерні дисперсні. Відомо, що проблема взаємного впливу тепломасообмінних і деформаційних явищ має безумовний теоретичний та прикладний інтерес, і тому досліджена багатьма вченими. Ця задача важлива для вивчення впливу температурно-вологісного середовища на процеси навантаження і деформування полімерно-дисперсних матеріалів музейних експозицій. Хоча сучасній науці й відома низка теоретичних методів врахування впливу теплоти й вологи на деформаційні властивості, зокрема, дисперсних матеріалів, проте автори вважають більш послідовним не однобічне врахування впливу теплообміну на реологічні процеси, а опис їхнього взаємного впливу один на одного. Зрозуміло, що такий комплексний опис вимагає залучення не тільки механічних, але й термодинамічних закономірностей у їхній взаємодії.

**Актуальність дослідження.** Музейні експонати є автентичними предметами, які наочно відображають історію і культуру народу, його побут, життя, працю, вірування тощо. Вони є безцінними, тому збереження їх є актуальною світовою задачею.

**Останні дослідження та публікації.** У межах спадкової теорії Больцмана-Вольтерри [1] вплив теплоти й вологи на повзучість матеріалів і релаксацію напружень у них враховується, зазвичай, методом фактор-часових аналогій [2, 3] з забезпеченням якісного збігу з експериментальними даними. Теорія сушіння дисперсних матеріалів викладена у [4]. Автори [5, 6] розробили методи вивчення аналізу взаємозв'язку та прогнозування тепломасообмінних і фізико-механічних властивостей дисперсних матеріалів. Анізотропні пружні та пружно-в'язкі матеріали досліджені теоретично в роботах [7, 8]. Метод визначення параметрів функцій впливу викладений у роботі [9]. Результати наведених вище робіт будуть частково використані у даному дослідженні.

**Формулювання цілей статті.** Мета роботи полягає в обґрунтуванні системи диференціальних рівнянь для сумісного опису тепломасообмінних і деформаційних процесів у дисперсних матеріалах. Задля досягнення мети роботи використані математичні моделі, що описують анізотропні пружні й пружно-в'язкі властивості дисперсних матеріалів (середовищ), та метод М.А. Колтунова [9] визначення параметрів функцій впливу.

**Механічні закономірності та врахування анізотропії дисперсного матеріалу.** Розглянемо спочатку задачу про одноосьове навантаження (чи розтяг) зразків у вигляді невеликих стрижнів (ниток, стрічок, смуг і т. д.) з гідрофільного матеріалу в умовах тепло- й масообміну їх з середовищем. Для ізотропного матеріалу, будемо вважати, що повзучість (п) матеріалів і релаксація (р) напружень у них може бути описана за допомогою спадкових співвідношень БВ (у формулах застосовуються загально прийняті значення [8]):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_{t_0}^t K(t, \tau) \cdot \frac{\sigma(\tau)}{E} d\tau, \quad (1п)$$

$$\sigma(t) = E \cdot \left[ \varepsilon(t) - \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau \right], \quad (1р)$$

де  $\varepsilon(t)$  – деформація;  $\sigma(t)$  – напруження, які залежать від часу ( $t$ );  $E$  – модуль пружності матеріалу стрижня; ( $t_0$ ) – початок відліку часу (зазвичай,  $t_0 = 0$ );  $K(t, \tau)$  – ядро повзучості;  $R(t, \tau)$  – ядро релаксації дисперсійного матеріалу.

У більш загальному випадку анізотропного (наприклад, ортотропного) пружно-в'язкого середовища, на яке діють не тільки механічні, але й температурні поля, лінійні співвідношення між деформаціями та напруженнями мають вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t - \tau) \times \\ \times d\{\varepsilon_{kl}(\tau) - \tilde{\alpha}_{kl} \Delta[T(\tau)]\}; \\ \varepsilon_{ij}(t) - \tilde{\alpha}_{ij} \cdot \Delta[T(\tau)] = \\ = \int_0^t \Pi_{ijkl}(t - \tau) \cdot d\sigma_{kl}(\tau), \end{array} \right. \quad (2)$$

де ( $i, j, k, l$ )=(1-3);  $R_{ijkl}$  – тензор функції релаксації;  $\Pi_{ijkl}$  – тензор функції повзучості;  $\tilde{\alpha}_{ij}$  – тензор коефіцієнтів температурного розширення речовини;  $\Delta[T(\tau)]$  – різниця між поточною  $T(t)$  й початковою температурою;  $\sigma_{ij}(t)$  та  $\varepsilon_{ij}(t)$  – тензори напружень та деформації, відповідно.

Наприклад, для ортотропних матеріалів, які працюють в умовах плоского напруженого стану в стаціонарних температурних полях [ $\Delta T(t)=0$ ], рівняння зв'язку напружень і деформації у розгорнутому вигляді мають вигляд:

$$\sigma_{11}(t) = B_{1111} \cdot \varepsilon_{11}(t) - B_{1111} \times$$

$$\times \int_0^t T_{1111}(t - \tau) \cdot \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + B_{1122} \cdot \varepsilon_{22}(t) - B_{1122} \times \int_0^t T_{1122}(t - \tau) \cdot \varepsilon_{22}(\tau) d\tau; \quad (3)$$

$$\sigma_{22}(t) = B_{2211} \cdot \varepsilon_{11}(t) - B_{2211} \times \int_0^t T_{2211}(t - \tau) \cdot \varepsilon_{11}(\tau) d\tau + B_{2222} \times \varepsilon_{22}(t) - B_{2222} \cdot \int_0^t T_{2222}(t - \tau) \times \varepsilon_{22}(\tau) dt; \quad (4)$$

$$\sigma_{12}(t) = 2 \cdot B_{1212} \cdot \varepsilon_{12}(t) - 2 \times B_{1212} \cdot \int_0^t T_{1212}(t - \tau) \cdot \varepsilon_{12}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

де  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{1212}$  – головні модулі пружності:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{1111} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2}; \\ B_{1122} = \frac{\nu_1 \cdot E_{22}}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2} = \frac{\nu_2 \cdot E_{11}}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2} = B_{2211}; \\ B_{2222} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2}; \\ 2B_{1212} = G = \frac{E_{45}}{2} \cdot (1 - \nu_{45})^{-1}, \end{array} \right. \quad (6)$$

$G$  – модуль зсуву матеріалу,  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{45}$  – модулі пружності вдовж осі 1, вдовж осі 2 й під кутом  $45^\circ$  до осі 1, відповідно; ( $\nu_1, \nu_2$ ) – коефіцієнти Пуассона розтягнутих зразків вдовж осей 1 та 2, відповідно;  $T_{ijkl}$  – функції швидкостей релаксації (у цьому випадку ( $i, j, k, l$ )=(1,2)). Слід зазначити, що рівняння повзучості чи релаксації для анізотропних середовищ будуються аналогічно викладеному вище при  $\sigma_{ij}(t) = \text{const}$  чи  $\varepsilon_{ij}(t) = \text{const}$ . У цьому випадку  $i = 1...3, j = 1...3$ .

**Моделювання ядр повзучості та релаксації дисперсних матеріалів.** Розглянемо далі основні методи моделювання ядр повзучості та релаксації дисперсних матеріалів. У роботах [7-11] наведений підхід до вибору ядр при розв'язуванні задач із урахуванням процесів повзучості та релаксації. Якщо розглядаються процеси деформування пружнов'язких середовищ, механічні властивості яких не залежать від часу, тоді в

рівняннях спадкової теорії Больцмана - Вольтерри (БВ):

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \cdot \int_0^t K(t-\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau; \\ \sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) - E \cdot \int_0^t R(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau, \end{cases}$$

де  $\sigma(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  – напруження та деформації в матеріалі в моменті спостереження  $t$  за одноосового напруженого стану;  $\tau$  – момент часу, який передре моменту часу  $t$ ;  $E$  – модуль пружності;  $K(t-\tau)$ ,  $R(t-\tau)$  – так звані функції впливу (або ядра повзучості і релаксації, відповідно).

Ядра  $K(t-\tau)$ ,  $R(t-\tau)$  присутні у вигляді ядер різницевого типу, що є наслідком незалежності властивостей матеріалу від часу. Інакше  $K(t-\tau)$  і  $R(t-\tau)$  ще називають кривими функцій швидкості повзучості та релаксації, відповідно. Зрозуміло, що такі криві можна побудувати за даними диференціювання дослідних кривих повзучості й релаксації. Проте помилки суб'єктивного характеру часто призводять до неправильних або надто грубих результатів. Тому в практичній діяльності використовують аналітичну форму запису функцій впливу, яка має деяке число параметрів, які визначені за допомогою дослідів.

Доволі часто зустрічаються в літературі функції впливу у вигляді експоненти  $A \cdot e^{-\beta t}$  або суми експонент  $\sum_n A_n e^{-\beta_n t}$ . Такі функції не будемо розглядати, оскільки такі функції не описують процес у початковий період – при  $t = 0$  вони мають скінченне значення.

Наведемо умови, яким повинні задовольнити функції  $K(t)$ ,  $R(t)$  [7]:

- 1)  $\lim_{t \rightarrow 0} K(t) = \infty$ ;
- 2) між  $K(t)$  і  $R(t)$  існує співвідношення

$$R(t) - K(t) = \int_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau,$$

тоді оскільки  $K(0) = \infty$ , то й  $R(0) = \infty$ ;

- 3) інтеграл  $\int_0^t K(\tau)d\tau$  повинен збігатися;
- 4) інтеграл  $\int_0^t R(\tau)d\tau$  повинен не перевищувати одиницю.

Такі слабко сингулярні функції добре описують швидкості релаксаційних процесів, якщо до їх складу входить достатня кількість параметрів.

З використанням умови п. 2 можна записати:

$$R(t) = K(t) + \int_0^t K(t-\tau)R(\tau)d\tau. \quad (7)$$

У теорії інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду функція  $R(t)$  називається ядром рівняння

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) - E \cdot \int_0^t R(t-\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau, \quad (8)$$

а функція  $K(t)$  – його резольвентою. Якщо для ядра  $R(t)$  знайдена резольвента  $K(t)$ , тоді рівняння:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \frac{1}{E} \cdot \int_0^t K(t-\tau) \cdot \sigma(\tau) \cdot d\tau \quad (9)$$

називається розв'язком рівняння (8), і навпаки, рівняння (8) буде розв'язком рівняння (9), якщо для ядра  $K(t)$  рівняння (9) знайдена резольвента  $R(t)$ .

У роботі [8] наведений приклад визначення резольвенти за даним ядром. Візьмемо найпростіше і разом з тим доволі загальне слабко сингулярне ядро у вигляді:

$$R(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot t^{\alpha-1}, 0 < \alpha < 1. \quad (10)$$

Перетворення за Лапласом рівнянь (8) і (9) ( $f^*(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt$ ) дає:

$$\frac{1}{E} \cdot \sigma^* = \varepsilon^* \cdot (1 - R^*), E \cdot \varepsilon^* = \sigma^* \cdot (1 + K^*).$$

Звідси

$$K^*(p) = \frac{T^*(p)}{1 - T^*(p)}. \quad (11)$$

Перетворенням Лапласа функції (10) буде:

$$\begin{aligned} R^*(p) &= \int_0^\infty e^{-pt} \cdot \frac{A \cdot e^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}} dt = \\ &= A \cdot \int_0^\infty \frac{e^{-(\beta+p)t}}{t^{1-\alpha}} dt = \frac{A \cdot \Gamma(\alpha)}{(p + \beta)^\alpha}. \end{aligned} \quad (12)$$

де  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функція Ейлера.

Якщо занести вираз (12) до рівняння (11), матимемо зображення резольвенти:

$$K^*(p) = \frac{A \cdot \Gamma(\alpha)}{(p + \beta)^\alpha - A \cdot \Gamma(\alpha)}. \quad (13)$$

Щоб знайти резольвенту  $K(t)$ , використаємо теорему про зміщення, на основі якої оригінал функції (13) буде:

$$K(t) = e^{-\beta t} \cdot \tilde{K}(t), \quad (14)$$

де  $\tilde{K}(t)$  – оригінал функції

$$\tilde{K}^*(p) = \frac{A \cdot \Gamma(\alpha)}{p^\alpha - A \cdot \Gamma(\alpha)}. \quad (15)$$

Праву частину рівності (15) можна подати у вигляді суми спадної геометричної прогресії:

$$\tilde{K}^*(p) = \sum_{n=1}^{\infty} [A \cdot \Gamma(\alpha) / p^\alpha]^n. \quad (16)$$

Легко впевнитися, що зображенням функцій  $f(t) = t^{k-1} / \Gamma(k)$ ,  $k > 1$ , є функція  $f^*(p) = 1/p^k$ . Відповідно, оригіналом функції (16) буде [9]:

$$\tilde{K}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A \cdot \Gamma(\alpha)]^n t^{n\alpha-1}}{\Gamma(\alpha_n)}, \quad (17)$$

а шуканою резольвентою, згідно з (14),

$$K(t) = \frac{e^{-\beta t}}{t} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A \cdot \Gamma(\alpha)]^n \cdot t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha_n)}. \quad (18)$$

Ряд у формулі (18) рівномірно збігається за  $t$  на будь-якому скінченному інтервалі часу. Можна показати, що для великих значень  $t$  резольвента має асимптотичну формулу:

$$K(t) \approx \frac{1}{\alpha} \cdot [A \cdot \Gamma(\alpha)]^{1/\alpha} \cdot e^{([A \cdot \Gamma(\alpha)]^{1/\alpha} - \beta) \cdot t}. \quad (19)$$

З формули (19) випливає, що при достатньо великих значеннях  $t$  при:

$$\text{а) } \frac{\beta^2}{A \cdot \Gamma(\alpha)} > 1, \quad K(t) \rightarrow 0, \quad (20)$$

тобто швидкість деформації повзучості при  $\sigma = const$  прямує до нуля ( $K(t) = (E/\sigma_k) \cdot d\varepsilon(t)/dt$ ,  $\sigma(t) = \sigma_k = const$ ). Це відповідає випадку обмеженої повзучості, коли деформація набуває скінченного постійного значення. У цьому випадку

маємо справу зі стійким процесом деформування:

$$\text{б) } \frac{\beta^\alpha}{A \cdot \Gamma(\alpha)} < 1, \quad K(t) \rightarrow \infty, \quad (21)$$

що означає, згідно з залежністю

$$K(t) = \frac{E}{\sigma_k} \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{d\tau}, \quad \sigma(t) = \sigma_k = const$$

зростання швидкості деформації до нескінченності. Це так званий випадок необмеженої повзучості. Тут процес деформування нестійкий:

$$\text{в) } \frac{\beta^2}{A \cdot \Gamma(\alpha)} = 1, \quad K(t) \rightarrow const, \quad (22)$$

що відповідає випадку усталеної повзучості, де починаючи з деякою  $t$  швидкість деформування  $\dot{\varepsilon} = ds(t)/dt = const$ . Ділянка кривої повзучості є прямою лінією. На цій ділянці маємо т. з. байдужий процес деформування.

У випадках (б) та (в) спостерігається ефект незворотності.

**Визначення механічних характеристик нестабільних (дисперсних) матеріалів.** Вище розглядалися процеси деформування пружнов'язких середовищ, механічні властивості яких не залежать від часу. У рівняння спадкової теорії БВ для таких середовищ входять ядра різницевого типу, що є наслідком незалежності властивостей від часу.

Більш загальним є випадок, коли властивості матеріалу залежать від деякого скалярного фізичного параметра  $B$ , який у свою чергу є функцією часу (але не просторових координат!). Під параметром  $B$  розумітимемо у подальшому будь-який фактор, який справляє вплив на механічні властивості матеріалу (температура, вологість та ін.). У найбільш загальному випадку миттєвий модуль пружності залежить від значення параметра  $B$  в момент спостереження, у той час як параметри ядра релаксації можуть залежати від значень  $B$  як у момент спостереження, так і у момент  $\tau$ , який передує моменту спостереження ( $0 \leq \tau \leq t$ ).

Зв'язок між напруженнями й деформаціями в загальному випадку стає неінваріантним відносно початку відліку часу та набуває вигляду:

$$\sigma(t) = E(t) \cdot \varepsilon(t) - \int_0^t R(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Якщо параметр  $B$  залишається постійним у процесі деформування, то ядро  $R$  у рівнянні (23) знову стає різницеvim, але на відміну від ядра звичайного (7) залежить від  $B$  як від параметра:

$$\sigma(t) = E(B) \cdot \varepsilon(t) - \int_0^t R(B, t - \tau) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau. \quad (24)$$

Приймаємо ядро рівняння (24) у формі [12]:

$$R(B, t - \tau) = \frac{A_0(B) \cdot e^{-\beta_0(B) \cdot (t-\tau)}}{(t - \tau)^{1-\alpha}}, \quad \alpha = \text{inv}(B). \quad (25)$$

З даним дисперсним матеріалом слід виконати експерименти на повзучість (релаксацію) за різних значень параметра  $B$ , які зберігаються в кожному експерименті й змінюються від експерименту до експерименту. Тоді згідно з методикою, викладеною в [7, 10], можна визначити функції  $E(B)$ ,  $A_0(B)$ ,  $\beta_0(B)$  та константу  $\alpha$ .

На сьогодні невідома методика, яка б дозволяла визначити ядро релаксації при  $B = B(t)$ . У цьому випадку слід постулювати вид ядра  $R(t, s)$  таким чином, щоб при  $B = \text{const}$  воно збігалось з ядром (25). Зрозуміло, що вигляд ядра  $R(t, s)$ , який задовольняє вказаній вимозі, не буде єдиним. Скористуємось цією свободою вибору виду ядра  $R(t, s)$  й задаємо ядро релаксації при  $B = B(t)$  таким чином, щоб рівняння (23) після деякого перетворення змінних звелось до найпростішого виду. З цією метою у випадку  $B = B(t)$  приймаємо

$$R(t, s) = \frac{A_1(t, s) \cdot e^{-\beta(t,s) \cdot (t-s)}}{(t - s)^{1-\alpha}}, \quad (26)$$

де

$$\begin{cases} \beta(t, s) = \frac{1}{t - s} \cdot \int_s^t \beta_0(B(\tau)) d\tau; \\ A_1(t, s) = \bar{A}(B(s)) \cdot \frac{\beta_0(B(s))}{\beta^{1-\alpha}(t, s)}; \\ \bar{A}(B) = \frac{A_0(B)}{\beta_0^\alpha(B)}. \end{cases} \quad (27)$$

Легко зрозуміти, що при  $B = \text{const}$  ядро (26) збігається з ядром (25).

Перетворення часу

$$\begin{aligned} 0,05 \cdot t' &= \int_0^t \beta_0(B(\tau)) d\tau, \\ 0,05 \cdot s' &= \int_0^s \beta_0(B(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

приводить рівняння (23) з ядром (26) до вигляду:

$$\begin{aligned} \sigma(t') &= \\ E(t') \cdot &\left[ \varepsilon(t') - \int_0^{t'} \frac{(0,05)^\alpha \cdot \bar{A}(s')}{E(t')} \times \right. \\ &\left. \times \frac{e^{-0,05 \cdot (t'-s')}}{(t' - s')^{1-\alpha}} \cdot \varepsilon(s') d(s') \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Слід зазначити, що при:

$$E = \text{inv}(B) \text{ та } \bar{A}(B) = \frac{A_0(B)}{\beta_0^\alpha(B)} = \text{inv}(B) \quad (30)$$

рівняння (29) перетворюється на наступне:

$$\begin{cases} \sigma(t') = E \cdot \varepsilon_k \cdot \left[ 1 - \int_0^{t'} R(\tau) d\tau \right], \\ \varepsilon(t') = \varepsilon_k = \text{const}, \\ R(\tau) = -\frac{1}{E \cdot \varepsilon_k} \cdot \frac{d\sigma(t')}{dt'}, \quad t' \equiv \tau. \end{cases} \quad (31)$$

Тобто має місце або температурно-часова аналогія [2,3,7], або вологісно-часова аналогія [13].

Як приклад, у табл. 1 з роботи [7] наведено залежності параметрів  $E$ ,  $A_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\alpha$  капрону від вологості  $B$ , знайдені методом суміщень [7, 10].

Таблиця 1  
Залежності параметрів  $E$ ,  $A_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\alpha$  функції впливу для капрону від вологості  $B$ , %

$B$ , %	2,6	3,2	4,0	5,1
$E(B)$ , МПа	1360	1220	940	735
$A_0(B)$ , МПа · с <sup>-α</sup>	31,8	32,2	36,3	21,3
$\beta_0(B)$ , с <sup>-1</sup>	0,05	0,05	0,05	0,05

Наочне уявлення про сутність, наприклад, температурно-часової аналогії при деформуванні полімерних матеріалів можна отримати з [6, 14, 15, 16].

**Моделі процесу напружень у матеріалах при тепло- та масообміні.** Розглянемо далі моделі процесу напружень у (полімерних) матеріа-

лах при їхньому тепло- й масообміні з навколишнім середовищем [17-20].

Релаксація напружень  $\sigma(t)$  у попередньо деформованих вологих полімерних матеріалах є досить частим явищем у процесах гіротермічної обробки цих матеріалів. Вивчення кривих  $\sigma(t)$  дає цінну інформацію для обрання отриманих режимів зовнішньої термічної обробки матеріалів. Однак, процес релаксації напружень у (полімерних) матеріалах при тепло- й, особливо, масообміні з навколишнім середовищем до теперішнього часу повністю ще не досліджений.

Детальне експериментальне дослідження процесів релаксації напруження й повітряно- сухих й зволжених полімерних матеріалах різних типів [17] показало, що криві  $\sigma(t)$  для всіх досліджених повітряно-сухих зразків мають вид спадної кривої експоненційного типу. Однак, для ряду вологих матеріалів зміна  $\sigma(t)$  в процесі зневоднення носить суттєво немоно-тонний характер. На відповідних кривих  $\sigma(t)$  в певний період часу спостерігається так звана зворотна релаксація (астрингація) напруження. Було з'ясовано, що явище астрингації характерне для групи матеріалів, які належать до класу колоїдних капілярно-пористих тіл, що обмежено набрякають при зволоженні та дають усадку при сушці.

Повний теоретичний опис процесу релаксації напружень в умовах тепло- й масообміну вимагає комплексного підходу із залученням законів нерівноважної термодинаміки. Але для попереднього теоретичного дослідження даної проблеми можна обмежитись опосередкованим (феноменологічним) урахуванням ефектів. При цьому вважають, що тепло- й масообмін безперервно змінюють в'язкісні та інші механічні властивості матеріалу в процесі їхнього сушіння. Використовуючи основні постулати спадкової теорії Больцмана-Вольтерри [18] та обмежуючись для спрощення модельним прикладом, покажемо, що призводить до астрингації може зростання внутрішніх напружень у матеріалі, пов'язане з його усадкою.

Припустимо, що в початковий момент часу  $t_0$  вологий зразок знаходиться під впливом порівняно невеликого розтягу  $\varepsilon_0 = (3...5) \%$ , а потім відбувається його ізометричне та ізотермічне сушіння. Будемо вважати, що механічні властивості матеріалу починають змінюватись з певного моменту часу  $t = t_a$ . Зокрема, з цього моменту починається усадка, яка викликає зміну  $\varepsilon(t)$ . Такий процес феноменологічно можна описати модельною формулою [17]:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \theta(t - t_a) \cdot \varepsilon_1 \cdot [1 - e^{-\gamma(t-t_a)}], \quad (32)$$

де  $\varepsilon_0, \varepsilon_1$  та  $\gamma$  – константа;  $\theta(x)$  – одинична «сходишка» (функція Гевісайда),

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geq 0; \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Згідно з теорією Больцмана-Вольтерри (БВ) напруження  $\sigma(t)$ , які виникають у зразку при його розтягу  $\varepsilon(t)$ , визначаються виразом [18]:

$$\sigma(t) = E(t) \cdot \varepsilon(t) - \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot E(\tau) \cdot \varepsilon(\tau) \cdot d\tau, \quad (33)$$

у якому властивості матеріалу та закономірності процесу повинні відображатися модулем пружності  $E(t)$  та ядром релаксації  $R(t, \tau)$ .

Згідно з формулою (33) з урахуванням виразу (32) матимемо:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = E(t) \cdot \left\{ \varepsilon_0 + \theta(t - t_a) \cdot \varepsilon_1 \times \right. \\ \left. \times [1 - e^{-\gamma(t-t_a)}] \right\} - \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot E(\tau) \times \\ \times \varepsilon_0 \cdot d\tau - \theta(t - t_a) \times \\ \times \int_{t_a}^t R(t, \tau) \cdot E(\tau) \cdot \varepsilon_1 \cdot [1 - e^{-\gamma(\tau-t_a)}] d\tau. \quad (34) \end{aligned}$$

Суму виразу (34) можна розкласти на дві складові частини:

$$\sigma(t) = \sigma_1(t) + \sigma_2(t).$$

Перша група складових:

$$\sigma_1(t) = E(t) \cdot \varepsilon_0 - \int_{t_0}^t R(t, \tau) \cdot E(\tau) \cdot \varepsilon_0 \cdot d\tau. \quad (35)$$

Якщо прийняти, що  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 = const$ , за  $E(t) = E_0 = const, t_0 = 0$  й відповідно до вибору ядра  $R(t, \tau)$  (35) відповідає випадку звичайної релаксації, яка мала би місце за відсутності усадки  $\varepsilon_1 = 0$ . Зокрема, якщо прийняти, що:

$$R(t, \tau) = a \cdot k \cdot e^{-a \cdot k \cdot (t-\tau)} \cdot (t - \tau)^{k-1} \quad (36)$$

тоді після підстановки формули (36) до рівняння

(35) і нескладних перетворень матимемо відоме рівняння Кольрауша. Воно адекватно описує процес релаксації напружень у повітряно – сухих та вологих зразках тканин і композитних матеріалів [19, 20].

Друга група складових:

$$\sigma_2(t) = \theta(t - t_a) \left\{ E(t) \cdot \varepsilon_1 \times \left[ 1 - e^{-\gamma(t-t_a)} \right] - \int_{t_a}^t R(t, \tau) \cdot \varepsilon_1 \times \left[ 1 - e^{-\gamma(t-t_a)} \right] \cdot d\tau \right\}, \quad (37)$$

яка пов'язана з усадкою ( $\varepsilon \neq 0$ ), у прийнятій моделі дає внесок у сумарну величину  $\sigma(t)$  тільки при  $t > t_a$ . Якщо прийняти, що при  $t > t_a$

$$E(t) = E_1 = const, \\ R(t, \tau) = \chi_1 \cdot e^{-\alpha_1(t-\tau)},$$

тоді в результаті обчислень згідно з формулою (37) отримаємо явний вираз для  $\sigma_2(t)$ :

$$\sigma_2(t) = E_1 \cdot \varepsilon_1 \left[ \frac{\alpha_1 - \chi_1}{\alpha_1} - \frac{\gamma - \alpha_1 + \chi_1}{\gamma - \alpha_1} \times e^{-\gamma(t-t_a)} + \frac{\chi_1 \cdot \gamma}{\alpha_1 \cdot (\gamma - \alpha_1)} \cdot e^{-\alpha_1(t-t_a)} \right]. \quad (38)$$

Аналіз формули (38) показує, що крива  $\sigma_2(t)$  починається з нуля при  $t = t_a$ , проходить максимум і виходить на константу, тобто якісно має вид, який підтверджує експериментальну криву усадкових напружень  $\sigma_{yc}(t)$  [17].

Таким чином, складова  $\sigma_2$ , обумовлена усадкою  $\varepsilon_1$ , при певному сполученні параметрів  $\chi_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\gamma$  може протягом деякого проміжку часу бути величиною, що зростає. При достатньо значній усадці  $\varepsilon_1$  та високій швидкості зростання складової  $\sigma_2$  вона може забезпечити підйом релаксаційної кривої, тобто астрингацію. При невеликих  $\varepsilon_1$  та малій швидкості зростання  $\sigma_2$  можливе лише сповільнення спадання  $\sigma(t)$  порівняно з безусадковим процесом.

З фізичних міркувань релаксаційній частині  $\sigma_1(t)$  найбільше відповідає релаксація напружень  $\sigma_B(t)$  у матеріалі за відсутності масообміну (зразок знаходиться у воді). Проте в цьому випадку не враховується неперервна зміна механічних властивостей зразка зі зменшенням умісту води [17].

Другій частині, тобто  $\sigma_2(t)$ , повинна відповідати експериментальна крива усадкових напружень  $\sigma_{yc}(t)$ , отримана в умовах ізометричного сушіння зразків (при  $\varepsilon_0 = 0$ ). Але в цьому досліді не враховується можливий (для деяких матеріалів) вплив попереднього розтягу на зростання усадкових напружень [17]. Другій частині, тобто  $\sigma_2(t)$ , повинна відповідати експериментальна крива усадкових напружень  $\sigma_{yc}(t)$ , отримана в умовах ізометричного сушіння зразків (при  $\varepsilon_0 = 0$ ). Але в цьому досліді не враховується можливий (для деяких матеріалів) вплив попереднього розтягу на зростання усадкових напружень [17].

Автори [17] стверджують, що порівняльний аналіз отриманих результатів показує, що для таких матеріалів, як віскозна плівка та шкіра, розрахунок за наведеними вище формулами адекватно передає експериментальні криві  $\sigma(t)$ . Для тканин спостерігається суттєве відхилення результатів, що пояснюється складною будовою тканини. У досліді без попереднього натягу ( $\varepsilon_0 = 0$ ) зразків тканин у початковий період усадки відбувається натяг (виробіток) зсувів ниток, і тільки після цього починається зростання  $\sigma_{yc}(t)$ . Тому величина  $\sigma_2(t)$  занижена. У досліді щодо релаксації попередньо розтягнутих ( $\varepsilon_0 = 5\%$ ) вологих зразків тканин початок усадки збігається зі зростанням  $\sigma_2(t)$  [17].

Таким чином, аналіз експериментальних кривих та спадкова теорія БВ свідчать про те, що астрингація при зневодненні матеріалів обумовлена їхньою усадкою [17]. Відповідно, за певних умов тепло- й масообміну в деформованих вологих полімерних матеріалах, які належать до класу колоїдних капілярно-пористих тіл, може спостерігатись явище зворотної релаксації. У результаті зростання внутрішніх напружень у матеріалі можуть змінюватися його властивості, що слід враховувати при інтенсифікації гіротермічних процесів обробки цих матеріалів.

#### Моделювання процесів астрингації.

Розглянемо далі можливість моделювання процесів астрингації за допомогою сплайн-часових функцій за експериментальними результатами. Типовий графік залежності  $\sigma(t)$  при врахуванні ефекту астрингації має вигляд, наведений на рис. 1.

Точки А, Б, В, Г, Д на діаграмі  $\sigma(t)$  відповідають експериментальним значенням  $\sigma_i(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , знайденим при проведенні дослідів над матеріалом у момент часу  $t_i$ .

- точка А:  $\sigma_0 = \sigma(t)$ ,  $t = 0$ ;
- точка Б –  $\min(\sigma(t))$ :  $\sigma_1 = \sigma(t)$ ,  $t = t_1$ ;

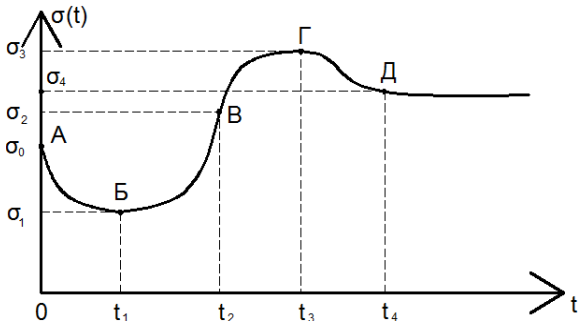


Рис. 1. Типовий графік залежності  $\sigma(t)$  при врахуванні ефекту астрингації

- точка В:  $\sigma_2 = \sigma(t), t = t_2$ , у точці В змінюється кривина графіка;
- точка Г –  $\max(\sigma(t))$ :  $\sigma_3 = \sigma(t), t = t_3$ ;
- точка Д:  $\sigma_4 = \sigma(t), t = t_4$ , у точці Д значення  $\sigma(t)$  стабілізується й при  $t > t_4$ , залишається практично сталим:  $\sigma(t)|_{t \rightarrow \infty} = \sigma_4$ .

Модель у вигляді кубічного сплайна за  $t$  із застосуванням функцій Гевісайда  $\theta(t)$  має наступний вигляд:

$$\sigma(t) = [A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + A_3 \cdot t^3] \times [\theta(t) - \theta(t - t_4)] + \sigma_4 \cdot \theta(t - t_4), \quad (39)$$

де коефіцієнти  $A_0, A_1, A_2, A_3$  знаходимо з наступних співвідношень за відомими для даного матеріалу експериментальними значеннями  $\sigma_i(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ , а саме:

$$\begin{cases} A_0 = \sigma_0; \\ A_1 = 3A_3 \cdot \left\{ t_2^2 - \frac{(t_3 - t_1)^2}{4} \right\}; \\ A_2 = -3 \cdot A_3 \cdot t_2; \\ A_3 = \frac{\sigma_3 - \sigma_0}{3t_3 \left\{ t_2^2 - \frac{(t_3 - t_1)^2}{4} \right\} - 3t_2 t_3^2 + t_3^3}. \end{cases} \quad (40)$$

Можна визначити  $A_0, A_1, A_2$  та  $A_3$  з наступних співвідношень:

$$\begin{cases} A_0 = \sigma_0; \\ A_1 \cdot t_1 + A_2 \cdot t_1^2 + A_3 \cdot t_1^3 = \sigma_1 - \sigma_0; \\ A_1 \cdot t_2 + A_2 \cdot t_2^2 + A_3 \cdot t_2^3 = \sigma_2 - \sigma_0; \\ A_1 \cdot t_3 + A_2 \cdot t_3^2 + A_3 \cdot t_3^3 = \sigma_3 - \sigma_0. \end{cases} \quad (41)$$

По суті, система лінійних рівнянь (41) відносно коефіцієнтів  $A_0, A_1, A_2$  та  $A_3$  може бути легко розв'язана, наприклад, за допомогою правила Крамера. Принаймні, розрахунок коефіцієнтів

$A_1, A_2, A_3$  за цим алгоритмом може бути перевіркою значень, отриманих для цих самих коефіцієнтів зі співвідношень (40).

Дослідимо далі механічні закономірності, зокрема, поведінку в'язкопружних дисперсних систем в умовах тепломасообміну з використанням і вдосконаленням результатів робіт [1-5, 17, 21].

Для спадкових співвідношень БВ (1п, 1р) ядро повзучості  $K(t, \tau)$  будемо вважати вираженням:

$$K(t, \tau) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(\tau), \quad (42)$$

де  $\varphi_1(t), \varphi_2(\tau)$  – у загальному вигляді довільні додатні функції часу. Такий вибір ядр  $K(t, \tau)$  у принципі звужує теорію, але завдяки довільності функцій  $\varphi_1$  й  $\varphi_2$  може охоплювати широкий спектр варіантів. Зокрема, для врахування вище розглянутих ефектів астрингації можна використати наступний вигляд  $K(t, \tau)$ :

$$K(t, \tau) = \kappa_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot (t-\tau)}, \quad (43)$$

де  $\kappa_1, \alpha_1$  – параметри, що визначаються з експериментальних результатів досліджень зразків конкретних дисперсних матеріалів. Тому для  $\varphi_1(t)$  і  $\varphi_2(t)$  маємо:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \xi_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t}; \\ \varphi_2(\tau) = \xi_2 \cdot e^{\alpha_1 \cdot \tau}; \\ \xi_1 \cdot \xi_2 = \kappa_1. \end{cases} \quad (44)$$

Зручно ввести дві нові функції  $\eta(t)$  й  $L(t)$  за формулами:

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t), \\ L(t) &= -\frac{d}{dt} \{ \ln[\varphi_1(t)/\varphi_1(t_0)] \}. \end{aligned} \quad (45)$$

При цьому для ядр повзучості та релаксації неважко отримати:

$$K(t, \tau) = \eta(\tau) \cdot e^{-\int_{\tau}^t L(\theta) d\theta}, \quad (46)$$

$$R(t, \tau) = \eta(\tau) \cdot e^{-\int_{\tau}^t [L(\theta) + \eta(\theta)] d\theta}. \quad (47)$$

Тоді спадкові співвідношення (1п, 1р) з ядрами (46), (47) еквівалентні крайовій задачі Коші (КЗК):



$$\left\{ \frac{d}{dt} + L(t) \right\} \cdot \varepsilon_t = \left\{ \frac{d}{dt} + L(t) + \eta(t) \right\} \frac{\sigma(t)}{E}, \quad (48)$$

$$\varepsilon(t_0) = \sigma(t_0)/E. \quad (49)$$

Якщо розв'язується КЗК для  $\varepsilon(t)$  за даною  $\sigma(t)$ , або ж КЗК для  $\sigma(t)$  за даною  $\varepsilon(t)$ , тоді слід вирішити еволюційну КЗК типу (у матричній формі):

$$\frac{dy}{dt} + \Lambda(t) \cdot y = I(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (50)$$

що відображає принцип причинності. У (50) введені наступні позначення:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = [\varepsilon(t); \sigma(t)]^T; \\ \Lambda(t) = [L(t); L(t) + \eta(t)]^T; \\ y(t_0) = [\varepsilon(t_0); \sigma(t_0)]^T; \\ I(t) = \left[ \begin{array}{l} \left\{ \frac{d}{dt} + L(t) + \eta(t) \right\} \cdot \frac{\sigma(t)}{E}; \\ E \cdot \left\{ \frac{d}{dt} + L(t) \right\} \cdot \varepsilon(t) \end{array} \right]^T; \\ y_0 = [\sigma(t_0)/E; E \cdot \varepsilon(t_0)]^T, \end{array} \right. \quad (51)$$

де  $M^T$  означає операцію транспонування конкретної матриці  $M$ .

Розв'язок рівнянь (50) і (51) має вигляд:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-\int_{t_0}^t \Lambda(\theta) d\theta} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{\tau}^t \Lambda(\theta) d\theta} I(\tau) d\tau. \quad (52)$$

Зазвичай,  $t_0 \equiv 0$ , тому у подальшому будемо притримуватись саме цього значення  $t_0$ .

Відповідно до формули (52) час релаксації процесу повзучості  $\tau_n$  й час релаксації процесу релаксації напруження  $\tau_p$ , відповідно, можуть бути визначені за формулами:

$$\tau_n = 1/\bar{\Lambda}_n, \quad \tau_p = 1/\bar{\Lambda}_p, \quad (53)$$

де  $\bar{\Lambda}_n$  й  $\bar{\Lambda}_p$  – середні значення функцій

$$\Lambda_n(t) = L(t), \quad \Lambda_p(t) = L(t) + \eta(t), \quad (54)$$

відповідно, на інтервалах  $t \in [0, \tau_n]$  й  $[0, \tau_p]$ , що визначаються умовами нормування:

$$\int_0^{\tau_n} \Lambda_n(\theta) d\theta = 1, \quad \int_0^{\tau_p} \Lambda_p(\theta) d\theta = 1. \quad (55)$$

Фізичний зміст ведених вище величин такий. Змінний коефіцієнт повзучості (в'язкість)  $\eta(t)$  визначає величину спадкових ефектів (їхню амплітуду), а функція  $\Lambda_n(t)$  й  $\Lambda_p(t)$  (так звані еволюти) – темп відповідних процесів релаксації, тобто наскільки швидко вони відбуваються в часі.

Введемо позначення:

$$\tilde{\Lambda}(t) = [\Lambda_n(t); \Lambda_p(t)]^T. \quad (56)$$

Для матеріалів, повзучість яких зростає й прискорюється при зволоженні та нагріванні, природно покласти:

$$\partial \tilde{\Lambda} / \partial m \geq 0, \quad \partial \tilde{\Lambda} / \partial T \geq 0. \quad (57)$$

При цьому вважається, що обидві еволюти  $\Lambda_n(t)$  й  $\Lambda_p(t)$  залежать від часу через температуру «робочого тіла»  $T(t)$  й масу вологи  $m(t)$  в ньому:

$$\tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}[T(t); m(t)]. \quad (58)$$

Природно прийняти також, що:

$$\partial \eta / \partial m \geq 0, \quad \partial \eta / \partial T \geq 0. \quad (59)$$

Зрозуміло, що при моделюванні з тих чи інших міркувань функцій  $\eta(t)$  та  $L(t)$  (45), слід враховувати умови (57), (58) і (59).

**Основні термодинамічні співвідношення при сушінні стрижня.** Розглянемо далі основні термодинамічні співвідношення стосовно задачі сушіння стрижня. Так, перший закон термодинаміки можна записати у вигляді:

$$\delta Q = dU + \delta A - \mu \cdot dm, \quad (60)$$

де  $\delta Q$  – загальна кількість теплоти наданого стрижню (за час  $dt$ );  $dU$  – зміна внутрішньої енергії стрижня (за час  $dt$ );  $\delta A$  – механічна робота стрижня (за час  $dt$ );  $\mu$  – питомий хімічний потенціал речовини стрижня;  $dm$  – маса вологи, яка випаровується зі стрижня (за час  $dt$ ).

З урахуванням низки загальних модельних співвідношень, перетворимо вираз (60) у «робоче» рівняння, яке разом з формулами (48) і (49)

може бути покладене в основу теорії розглянутого процесу.

Для кількості теплоти  $\delta\tilde{Q}$  яке надійшло стрижню за час  $dt$ , приймаємо відомий закон Ньютона-Ріхмана:

$$\delta\tilde{Q} = f(t) \cdot [T_c - T(t)]dt, \quad (61)$$

де  $T_c$  – температура навколишнього середовища, яке оточує стрижень;  $T(t)$  – температура вологого тіла у момент часу  $t$ ;  $f(t)$  – інтегральний (що відноситься до всієї поверхні) коефіцієнт теплообміну.

Залежність коефіцієнта  $f(t)$  від часу  $t$  обумовлена зміною фізичних властивостей примежового прошарку тіло-середовище під час висихання тіла [22].

Розглядається достатньо повільний (квазістаціонарний) процес конвективного сушіння тонкого дисперсного тіла, що протікає за умов:

- при постійній температурі навколишнього середовища ( $T_c = const$ );
- ізометричності ( $l = const$ ,  $l$  – фіксована довжина розтягнутого стрижня);
- наявності незначних градієнтів температури та вологості по товщині стрижня, якими можна знехтувати

Тоді є прийнятими міркування, викладені нижче. За конвективного сушіння винесення маси з поверхні тіла можливе тільки у вигляді пари, тобто при  $\varepsilon_{cp} = 1$ , де  $\varepsilon_{cp}$  – критерій фазового перетворення [23]. Тому зміна середнього значення утримуваної маси тіла  $\tilde{U}$  можлива тільки за рахунок випаровування, а перенесення маси в середині тіла у вигляді рідини (що відповідає  $\varepsilon_{cp} < 1$ ) призводить тільки до перерозподілу утримуваної маси всередині тіла при  $\tilde{U} = const$ . За таких умов вологе тіло обмінюється з навколишнім середовищем двома основним каналами [24]:

- 1) кондуктивний (теплопровідність крізь примежовий прошарок тіло – середовище);
- 2) перенесенням теплоти з парами вологи (тобто, разом перенесенням маси).

Отже,  $\delta\tilde{Q}$  відповідає за кондуктивний теплообмін.

Кількість теплоти, яка надійшла до тіла у зв'язку з процесом перенесення маси  $\delta\tilde{Q}$  ( $\delta\tilde{Q} < 0$  при випаровуванні) визначається з наступного співвідношення:

$$\delta\tilde{Q} = r(t) \cdot dm, \quad (62)$$

де  $r(t)$  – питома теплота випаровування вологи.

По суті  $\delta\tilde{Q}$  описує процес теплообміну тіла з середовищем, пов'язаний з випаровуванням вологи. Формула (62) визначає кількість поглиненої (або відданої) теплоти при фазовому переході рідини у пару.

Отже, загальна кількість теплоти  $\delta Q$  визначатиметься виразом:

$$\delta Q = \delta\tilde{Q} + \delta\tilde{Q} = f(t) \cdot [T_c - T(t)] \cdot dt + r(t)dm. \quad (63)$$

Таким чином, автори [21], посилаючись на [4], по суті, ототожнюють питомий хімічний потенціал  $\mu(t)$  з питомою теплотою пароутворення  $r(t)$  спочатку вільної, а потім і зв'язаної вологи, тобто  $\mu(t) = r(t)$ .

Слід зазначити [24], що при взаємодії капілярно-пористих тіл з вологою відбувається зміна їхніх структурних і фізико-механічних властивостей. Ці зміни викликані молекулярним характером зв'язку рідини, що поглинається, з речовиною дисперсного тіла. Крім того, перенесення рідини або пари всередину холодного капілярно-пористого тіла залежить від характеру молекулярного зв'язку рідини, яка утримується в тілі, з твердою фазою тіла. Тому властивості матеріалів щодо вологообміну визначають їхню здатність віддавати (або поглинати) вологу й вирішальним чином впливають на кінетику процесів сушіння та зволоження.

У сучасній фізико-хімічній термодинаміці найбільшого розповсюдження набула класифікація форм зв'язку вологи з дисперсними тілами, запропонована П.А. Ребіндером [25]. У основі цієї класифікації лежить термодинамічний критерій оцінки вологообмінних властивостей за величиною енергії зв'язку вологи з матеріалом, тобто за величиною вільної енергії ізотермічного видалення з матеріалу одиниці маси зв'язаної вологи.

Зменшення вільної енергії  $\Delta F$  при постійній температурі або енергії зв'язку, яка дорівнює роботі відриву одного моля води від матеріалу (без зміни складу), можна визначити за формулою [24]:

$$\begin{aligned} \mu &= -\Delta F = RT \cdot \ln(P_H/P_U) = \\ &= RT \cdot \ln(1/\varphi) = -RT \cdot \ln(\varphi), \end{aligned} \quad (64)$$

де  $\mu$  – питомий хімічний потенціал речовини,  $R$  – універсальна газова стала,  $T$  – температура тіла,  $P_H$  – тиск насиченої пари вільної води,

$P_{\bar{U}}$  – парціальний тиск рівноважної пари над матеріалом з умістом вологи  $\bar{U}$  – у будь-якому середовищі,  $\varphi = P_U / P_n$  – відносна вологість середовища, у якому знаходиться матеріал).

Згідно з рівнянням Гіббса-Гельмгольца, зміну внутрішньої енергії (енергії ізотермічного процесу) або теплоти дисоціації зв'язаної води можна подати наступним чином [22]:

$$\Delta I = \Delta F - T \cdot \frac{\partial(\Delta F)}{\partial T}. \quad (65)$$

У формулі (65) врахована залежність  $\Delta F = \Delta F(T)$ . Насправді,  $\Delta F = \Delta F(T, \varphi)$ . Тому в рівнянні (65) фігурує частинна похідна  $\Delta F$  за  $T$ . Тоді диференціюємо рівняння (64) за  $T$  з урахуванням залежності (65) і знаходимо:

$$Q^* = RT^2 \left\{ \frac{\partial(\ln(P_{\bar{U}}))}{\partial T} - \frac{\partial(\ln(P_n))}{\partial T} \right\} = Q_1(\bar{U}) - Q_0. \quad (66)$$

де  $Q_1(\bar{U})$  – теплота випаровування води з матеріалу за даного значення вологовмісту  $\bar{U}$ ,  $Q_0$  – теплота випаровування вільної води. Інакше  $Q^*$  можна подати наступним чином:

$$Q^* = RT^2 \cdot \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial T} = -RT^2 \frac{\partial(\ln(\varphi))}{\partial T}. \quad (67)$$

Отже, загальні витрати енергії на випаровування вологи або повна теплота адсорбції  $\tilde{Q}_{\text{повна}}$  визначається як сума питомої теплоти випаровування вільної води  $r_0$ , теплоти, витраченої на подолання енергії зв'язку вологи з матеріалом  $r$ , яка відповідає зменшенню внутрішньої енергії й теплоти, витраченої на подолання ентропійного зв'язку [24]:

$$\tilde{Q}_{\text{повна}} = r_0 - r + T \cdot \Delta S', \quad (68)$$

де  $\Delta S'$  – зміна ентропії системи «тіло – навколишнє середовище», куди випаровується волога.

П.А. Ребіндер виділяє три основні форми зв'язку вологи з дисперсними тілами: хімічну, фізико-хімічну та фізико-механічну [24].

Хімічний зв'язок води з матеріалом здійснюється у чітко визначених кількостях у вигляді гідроксильних іонів і молекулярних сполук типу кристалів. Зазвичай, у процесі сушіння хімічно зв'язана вода не видаляється. Вона може бути

виділена з тіла лише при високій температурі в процесі термічного розпаду дисперсного тіла. Для хімічно зв'язаної води енергія зв'язку досягає найбільшого значення (до  $(6 \dots 9) \cdot 10^3$  Дж/моль).

Для процесів тепло- й масопереносу значно більший інтерес має фізико-хімічна форма зв'язку вологи. До цієї категорії відноситься адсорбована волога. Розрізняють фізичну й хімічну адсорбцію. При фізичній адсорбції зберігаються індивідуальні властивості всіх молекул, адсорбованих на зовнішній та внутрішній поверхнях дисперсного тіла. Якщо при адсорбції молекула розділяється на атоми або радикали, які зв'язуються з поверхнею окремо, кожний сам по собі, а також віддає чи отримує від поверхні електрон, то у цих випадках адсорбція зветься хімічною.

Відомо, що адсорбція на поверхні молекул з навколишнього середовища продовжується від одного до кількох молекулярних прошарків. Тому розрізняють мономолекулярну та полімолекулярну адсорбцію. При адсорбції води активними ділянками поверхні матеріалу найбільш міцно зв'язується найближчий до поверхні мономолекулярний прошарок молекул води за рахунок водневих зв'язків.

У наступних прошарках зв'язки поступово слабшають. Активними ділянками (центрами) у матеріалах (типу текстильних та ін.) є функціональні групи полімерів, гідроксильні групи аморфних ділянок целюлози та ін. До однієї функціональної групи можуть приєднуватися дві-три молекули води. Наприклад, до групи  $-OH$  можуть приєднатися дві-три молекули  $H_2O$ , до групи  $-OOH$  – три-чотири молекули  $H_2O$ , до групи  $-CO$ ,  $COH$  – по дві, до групи  $-H_2$  – одна [26, 27].

Процес адсорбції вологи супроводжується виділенням значної кількості теплоти. При цьому, найбільша кількість теплоти виділяється при утворенні найбільш міцно зв'язаного мономолекулярного прошарку води. У зв'язку з послабленням зв'язків у процесі утворення полімолекулярних прошарків, кількість виділеної теплоти швидко спадає до нуля.

Енергія зв'язку  $H_2O$  з дисперсним тілом та кількість адсорбованої ним вологи залежать від природи поверхні дисперсного тіла [25]. Цією особливістю фізико-хімічно зв'язана вода відрізняється від інших, енергетично більш слабких форм зв'язку вологи.

Проміжне положення між фізико-хімічно зв'язаною вологою та механічно утримуваною, згідно з П.А. Ребіндером, займає осмотично

зв'язана вода. Ця вода є вологою набухання (набрякання) гідрофільних колоїдних тіл і високомолекулярних сполук. Основною умовою утворення осмотично зв'язаної води є вибіркова дифузія вологи крізь напівпроникні оболонки осмотичних комірок. Осмотичними комірками можуть бути міцели класичних колоїдних часток або асоціати макромолекул високомолекулярних сполук. Структурна сітка високомолекулярних речовин утворює перегородки, які можуть пропускати крізь себе молекули  $H_2O$  й бути непроникними для високомолекулярних фракцій.

Дифузне проникання молекул  $H_2O$  до внутрішньої структури полімеру викликає його набрякання. Воно припиняється під дією механічних напружень, які виникають у структурній сітці тіла в процесі набрякання. Другою причиною обмеженого набрякання тіл є обмежена розчинність речовини у воді. З припиненням набрякання зволожена дисперсна система прийде у стан рівноваги при незмінних зовнішніх умовах.

У випадку необмеженого набрякання відбувається повне розчинення дисперсної фази у дисперсійному середовищі, оскільки утворюється істинний розчин. При цьому осмотично зв'язаним стає весь розчинник, про що свідчить зниження пружності насиченої пари над розчином [25].

Таким чином, кількість осмотично зв'язаної води, яка знаходиться в тілі, залежить від різниці концентрації макромолекул в асоціатах (пакетах) і в зовнішньому розчині, а також від умов, за яких настає рівновага дисперсної фази з дисперсійним середовищем. З урахуванням ентропійної природи осмотичної вологи, згідно з рівнянням Гіббса-Гельмгольца (64), ентальпія  $\Delta I \rightarrow 0$ , тоді

$$-\Delta F = T \cdot \Delta S = -RT \cdot \ln(n_o), \quad (69)$$

де  $n_o$  – молярна частка  $H_2O$  в розчині.

До фізико-механічної форми зв'язку вологи відноситься волога, яка утримується у мікро – й макрокапілярах, й  $H_2O$ , що залишилась на поверхні тіла при його безпосередньому дотику до води [22].

З робіт Н.Н. Федякіна [28] випливає, що властивості води в капілярах радіусом понад  $4 \cdot 10^{-8}$  м не відрізняються від властивостей вільної води. Тому вода, яка утримується в капілярах, не є зв'язаною у звичайному сенсі до тих пір, поки вплив стінок капіляра не змінить його властивості.

Зв'язок води в капілярах, радіус  $\tilde{r}$  яких бі-

льше  $4 \cdot 10^{-8}$  м, формально виражається ефективною енергією зв'язку, обумовленою за законом Кельвіна залежністю пари  $P_{\tilde{r}}$  над гнutoю поверхнею меніска рідини від кривини поверхні [25]:

$$P_{\tilde{r}} = P_H \cdot e^{-[2 \cdot \alpha / \tilde{r}] \cdot V_o / (RT)}, \quad (70)$$

де  $V_o$  – молярний об'єм,  $\alpha$  – коефіцієнт зовнішнього теплообміну (локальний, що відноситься до одиниці площі поверхні). Шляхом заміни у формулі (64)  $P_{\tilde{r}}$  на  $P_H$ , визначимо енергію зв'язку капілярної вологи:

$$L_r = +2 \cdot \alpha \cdot V_o / \tilde{r}. \quad (71)$$

Так, наприклад, енергія зв'язку  $H_2O$  в капілярі радіусом  $\tilde{r} = 10^{-7}$  м ( $\tilde{r} = 100$  нм) дорівнює  $5,3 \cdot 10^2$  Дж/моль. Величина енергії капілярного зв'язку в умовах повного змочування не залежить від природи стінки капіляра.

Крім цих видів зв'язаної води, необхідно враховувати й вільну воду, що захоплена механічно й утримується в дисперсійній структурі (наприклад, між нитками тканини), а також заповнює капілярно-пористі тіла (особливо у випадку, повного занурення дисперсного тіла до надлишку рідини).

Отже, більшість матеріалів, що використовуються, наприклад, у легкій промисловості (зокрема, тканини) належать до групи колоїдних капілярно-пористих тіл, у яких при взаємодії з вологою відбуваються значні зміни структури.

З урахуванням формул (64), (69) і (71), для питомого хімічного потенціалу  $\mu$  маємо:

$$\mu = RT \cdot \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right) - RT \cdot \ln(n_o) + \frac{2 \cdot \alpha \cdot V_o}{\tilde{r}}. \quad (72)$$

На відміну від (63) з урахуванням (72) маємо:

$$\begin{aligned} \delta Q &= f(t) \cdot [T_c - T(t)] dt + \mu dm = \\ &= f(t) \cdot [T_c - T(t)] dt + \left\{ RT \cdot \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right) - \right. \\ &\quad \left. - RT \cdot \ln(n_o) + \frac{2 \cdot \alpha \cdot V_o}{\tilde{r}} \right\} dm. \end{aligned} \quad (73)$$

Варіанти моделювання інших складових рівняння (60)  $dU + \delta A$  будуть різними для різних задач. Для конкретності розглянемо задачу про релаксацію напружень у зволоженому стрижні при малому ( $\leq 5\%$ ) його розтягу в умовах ізотермічного ( $T_c = const$ ) й ізометричного ( $l = const$ , де  $l$  – фіксована довжина розтягнутого стрижня)

його сушіння. Ця задача є простим експериментальним втіленням [17]. Матеріал стрижня будемо вважати таким, що набрякає при зволоженні, й таким, що дає усадку при сушці. При нагріванні вважаємо матеріал розширюваним. Відповідності до цього він знаходиться під впливом прихованого видовження в процесі сушіння в результаті усадки матеріалу [21]:

$$\Delta l(t) = l - l_0(t). \quad (74)$$

Тут  $l_0(t)$  – змінна довжина вільного (нерозтягнутого) стрижня, що відповідає його вологовмісту й температурі в момент часу  $t$ ;  $l$  – фіксована довжина розтягнутого стрижня.

Розтяг  $\varepsilon(t)$  у цьому випадку виявляється змінним за рахунок прихованого видовження (74):

$$\varepsilon(t) = \frac{l - l_0(t)}{l_0(t)} = \frac{\Delta l(t)}{l_0(t)}. \quad (75)$$

Видовження  $\Delta l$  (74) зручно розкласти на дві складові:  $\Delta l_0 + \Delta l_1$ , де  $\Delta l_0 = l - \Delta l_0(t)$  – це початкове видовження, а  $\Delta l_1(t) = l_0(t_0) - l_0(t)$  – додаткове видовження за рахунок прихованої усадки матеріалу. Зрозуміло, що  $\Delta l_0 = \text{const}$ , і, крім того,  $l_0(t) = l_0(t_0) - \Delta l_1(t)$ . Звідси для  $\varepsilon(t)$  за залежністю (75) неважко отримати:

$$\varepsilon(t) = \frac{\Delta l(t)}{l_0(t_0)} \cdot \left\{ 1 + \frac{\Delta l_1(t)}{l_0(t_0) - \Delta l_1(t)} \right\}. \quad (76)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Delta l(t)}{l_0(t_0)} \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta l_1(t)}{l_0(t_0) - \Delta l_1(t)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\Delta l(t)}{l_0(t_0)} \cdot \left\{ \frac{[\Delta l_1(t)]'_t \cdot [l_0(t_0) - \Delta l_1(t)]}{[l_0(t_0) - \Delta l_1(t)]^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta l_1(t) \cdot \{-[\Delta l_1(t)]'_t\}}{[l_0(t_0) - \Delta l_1(t)]^2} \right\} = \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Delta l(t)}{l_0(t_0)} \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta l_1(t)}{l_0(t_0) - \Delta l_1(t)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\Delta l(t)}{l_0(t_0)} \cdot \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \frac{\Delta l_1(t) \cdot l_0(t_0)}{[l_0(t_0) - \Delta l_1(t)]^2} \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Delta l(t)}{l_0(t_0)} \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta l_1(t)}{l_0(t_0) - \Delta l_1(t)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\Delta l(t)}{[l_0(t_0) - \Delta l_1(t)]^2} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \Delta l_1(t) \cdot l_0(t_0) \right\}. \quad (77) \end{aligned}$$

Вважаємо, що  $t_0 \equiv 0$ . Тоді замість (77) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\Delta l(t)}{l_0(0)} \cdot \left[ 1 + \frac{\Delta l_1(t)}{l_0(0) - \Delta l_1(t)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{\Delta l(t)}{[l_0(0) - \Delta l_1(t)]^2} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \Delta l_1(t) \cdot l_0(0) \right\}. \quad (78) \end{aligned}$$

Оскільки  $\Delta l(t) = l - l_0(t)$  та  $\Delta l_1(t) = l_0(0) - l_0(t)$ , з рівняння (78) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{-l_0(t)}{l_0(0)} \cdot \left[ 1 + \frac{l_0(0) - l_0(t)}{l_0(t)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{(l - l_0(t)) \cdot \frac{d}{dt} \{-l_0(t)\}}{[l_0(t)]^2} = \\ &= - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{l_0(t)}{l_0(0)} \cdot \frac{l_0(0)}{l_0(t)} \right\} - \\ &- \frac{d}{dt} \left\{ \frac{l_0(t) \cdot (l - l_0(t))}{[l_0(t)]^2} \right\} = \\ &= \frac{-\frac{d}{dt} \{l_0(t)\}}{l_0(t)} - \\ &- \frac{d}{dt} \left\{ \frac{l_0(t) \cdot (l - l_0(t))}{[l_0(t)]^2} \right\} = \\ &= - \frac{d}{dt} \{l_0(t)\} \times \\ &\times \left[ \frac{1}{l_0(t)} + \frac{l}{[l_0(t)]^2} - \frac{1}{l_0(t)} \right] = \\ &- \frac{d}{dt} \{l_0(t)\} \cdot \frac{l}{[l_0(t)]^2}. \quad (79) \end{aligned}$$

Отже, остаточно:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{l_0(t)}{l_0(t)^2}\right\} \cdot l = \frac{d}{dt}\left\{\frac{l}{l_0(t)}\right\}. \quad (80)$$

Цей результат можна було б отримати одразу з (75):

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{l - l_0(t)}{l_0(t)} = \left\{\frac{l}{l_0(t)} - 1\right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{l}{l_0(t)}\right\}. \end{aligned} \quad (81)$$

Вирази (80) й (81) означають, що  $\varepsilon(t)$  є фактично відношенням фіксованої довжини розтягнутого стрижня ( $l$ ) до змінної довжини вільного (не розтягнутого) стрижня, що відповідає його вологовмісту й температурі в момент часу  $t$  мінус 1. Відповідно, з цього визначення  $\varepsilon(t)$  для  $d\varepsilon(t)/dt$  маємо похідну за часом  $t$  від дробу  $[l/l_0(t)]$ . Адже похідна за  $t$  від мінус 1 тотожна нулю. Отже, у подальшому, у рівняннях, де фігурує множник або член,  $d\varepsilon(t)/dt$ , під цим виразом розуміємо (80).

Оскільки розглядається ізометричне ( $l = \text{const}$ ) сушіння стрижня, механічна робота дорівнює нулю:

$$\delta A = 0. \quad (82)$$

Зміна внутрішньої енергії стрижня  $dU$  обумовлена трьома факторами:

- а) прогріванням (змінною температурою)  $C_\varepsilon(t)dT$ ;
- б) усадкою матеріалу (прихованим розтягом)  $V \cdot \sigma \cdot d\varepsilon$ ;
- в) дисипацією енергії внаслідок релаксації напружень  $V \cdot D(t) \cdot \varepsilon \cdot d\sigma$ .

Отже, маємо:

$$\begin{aligned} dU &= C_\varepsilon(t) \cdot dT + V \cdot \sigma \cdot d\varepsilon + \\ &+ V \cdot D(t) \cdot \varepsilon \cdot d\sigma, \end{aligned} \quad (83)$$

де  $D(t)$  – це безрозмірний коефіцієнт дисипації, що відображає відповідні властивості матеріалу стрижня,  $V$  – об'єм стрижня.

Підстановка виразів (61), (82), (83) у (60) з урахуванням формули (72) для  $\mu$  дає наступне рівняння після віднесення усіх величин до одиниці часу  $dt$ :

$$f(t) \cdot \{T_c - T(t)\} = C_\varepsilon(t) \cdot \frac{dT}{dt} +$$

$$\begin{aligned} &+ V \cdot \sigma \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} + V \cdot D(t) \cdot \varepsilon \cdot \frac{d\sigma}{dt} - \\ &- \left\{RT \cdot \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right) - RT \cdot \ln(n_o) + \frac{2 \cdot \alpha \cdot V_0}{\tilde{r}}\right\} \times \\ &\times \frac{dm}{dt}. \end{aligned} \quad (84)$$

Для зручності замінюємо відлік (точки відліку) температури  $T$  й уводимо  $\Delta T(t) = T(t) - T_c$ . З урахуванням рівняння (80):

$$\begin{aligned} &C_\varepsilon(t) \cdot \frac{d(\Delta T)}{dt} + f(t) \cdot \Delta T = \\ &= \left\{RT \cdot \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right) - RT \cdot \ln(n_o) + \frac{2 \cdot \alpha \cdot V_0}{\tilde{r}}\right\} \times \\ &\times \frac{dm}{dt} - V \cdot \sigma \cdot \frac{d}{dt}\left\{\frac{l}{l_0(t)}\right\} - \\ &- V \cdot D(t) \cdot \varepsilon \cdot \frac{d\sigma}{dt}. \end{aligned} \quad (85)$$

Рівняння (85) разом з (48) і (49) утворюють вихідну систему рівнянь, яка описує взаємно пов'язані процеси релаксації напружень у матеріалі стрижня (при його сушці) та його (стрижня) тепломасообмін з навколишнім середовищем. Ця система в принципі дозволяє визначити будь-яку пару з трьох величин  $\Delta T(f)$ ,  $m(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  при заданій третій.

Додатково врахуємо, що розтяг  $\varepsilon(t)$  визначається зміною температури  $T(t)$  й вологовмісту стрижня (ці залежності входять у визначення функції  $l_0(t)$ ). Також змодельуємо відповідну залежність (для  $l_0(t)$ ). Тоді замість трьох величин  $\Delta T(f)$ ,  $m(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  у рівняннях (48) й (85) виявляться тільки дві:  $\Delta T(f)$ ,  $m(t)$ , які будуть вже однозначно визначатися коефіцієнтними функціями рівнянь (48) та (85) й початковими умовами (49).

Система (48) і (85) прийнятна для визначення будь-яких двох коефіцієнтів (параметрів цих рівнянь) за заданих інших величин, тобто для розв'язування обернених задач, які опосередковано визначають фізичні величини, що важко доступні для прямих вимірювань.

**Аналіз отриманих рівнянь.** Розглянемо далі можливі варіанти модельних співвідношень для  $\Lambda(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  тощо, а також деякі загальні наслідки з основної системи рівнянь (48) і (85) з початковими умовами типу (49).

Наведемо деякі додаткові міркування та висновки. Основна система рівнянь (48) і (85) буде

доволі конструктивною після того, як будуть змодельовані або табульовані коефіцієнти функцій, що входять до неї, та інші величини.

Найпростішим прикладом реалізації умов (57) можна обрати модельний вираз [21] у вигляді:

$$\tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}_o + \theta(t - t_y) \times \left\{ 1 - e^{-\bar{\alpha}\{T(t)-T(t_y)\}-\beta\{m(t)-m(t_y)\}} \right\} \cdot \tilde{\Lambda}^*, \quad (86)$$

де всі константи  $\tilde{\Lambda}_o$ ,  $\tilde{\Lambda}^*$ ,  $\bar{\alpha}$  та  $\beta$  – додатні. Тут маються на увазі обидві еволюти  $\Lambda_n$  й  $\Lambda_p$  (кожна зі своїми параметрами) з урахуванням співвідношення  $\eta(t) = \Lambda_p - \Lambda_n$  за умов (59). Крім умов (57), вираз (86) відображає релаксаційний характер зміни еволют  $\Lambda(t)$ , що типово для процесів, які ведуть систему до рівноваги.

Якщо обмежитися лінійним наближенням, будемо мати:

$$\tilde{\Lambda}(t) = \tilde{\Lambda}_o + \theta(t - t_y) \times \left\{ a \cdot [T(t) - T(t_y)] + b[m(t) - m(t_y)] \right\}, \quad (87)$$

де  $a = d\tilde{\Lambda}/dT \geq 0$ ;  $b = d\tilde{\Lambda}/dm \geq 0$ ,  $t_y$  – момент, коли в матеріалі виникають процеси усадки.

Зрозуміло, що порівняння підходу, який розглядається, з експериментом слід розпочинати з лінійного варіанта (87). Лише у випадку невдачі слід ускладнювати теорію. У лінійному наближенні можна також покласти:

$$E(t) = \theta(t - t_y) \cdot \left\{ C_1[T(t) - T(t_y)] + C_2 \cdot [m(t) - m(t_y)] \right\}. \quad (88)$$

Звідси:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \theta(t - t_y) \times \left\{ C_1 \cdot \frac{d(\Delta T)}{dt} - C_2 \cdot \frac{dm}{dt} \right\}, \quad (89)$$

де  $C_1$  й  $C_2$  – константи (параметри теорії). Якщо в лінійному наближенні покласти:

$$E(t) = \theta(t - t_y) \cdot \left\{ \tilde{C}_1[T(t) - T(t_y)] + \tilde{C}_2 \cdot [m(t) - m(t_y)] \right\}, \quad (90)$$

тоді матимемо

$$\frac{dE(t)}{dt} = \theta(t - t_y) \times \left\{ \tilde{C}_1 \cdot \frac{d(\Delta T)}{dt} - \tilde{C}_2 \cdot \frac{dm}{dt} \right\}. \quad (91)$$

Така підстановка (89) або (91) зменшує число шуканих функцій з трьох ( $\Delta T$ ,  $m$ ,  $\varepsilon$ ) до двох ( $\Delta T$ ,  $m$ ) за числом рівнянь (48), (85) системи. Якщо не розглядати відповідну таким апроксимаціям систему (48) і (85) у цілому, можна обмежитися підстановкою виразу (91) до рівняння (85):

$$\left\{ C_\varepsilon(t) + \theta(t - t_y) \cdot C_3 \cdot V \cdot \sigma \right\} \cdot \frac{d(\Delta T)}{dt} + f(t) \cdot \Delta T(t) = \left\{ RT \cdot \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right) - RT \cdot \ln(n_o) + \frac{2 \cdot \alpha \cdot V_o}{\tilde{r}} - \theta(t - t_y) \cdot C_4 \cdot V \cdot \sigma \right\} \cdot \frac{dm}{dt} - V \cdot D(t) \cdot E(t) \cdot \frac{d\sigma}{dt}, \quad (92)$$

де  $C_3 \equiv \tilde{C}_1$ ,  $C_4 \equiv \tilde{C}_2$ .

Звідси видно, що деформація (у тому числі усадка) призводить до ефективної зміни теплоємності й питомого хімічного потенціалу:

$$C_\varepsilon \rightarrow C_\varepsilon(t) + \theta(t - t_y) \cdot C_\varepsilon \cdot M \cdot \sigma, \quad \mu(t) \rightarrow \mu(t) - \theta(t - t_y) \cdot C_4 \cdot V \cdot \sigma. \quad (93)$$

Цей результат було отримано експериментально в роботі [29] для теплоємності та складової  $\mu(t)$  – питомої теплоти пароутворення  $r(t)$ . Це слугує певним підтвердженням правомірності наведених вище міркувань. Слід також зазначити, що видозмінені міркування відносно складових  $dU$  та  $\delta A$  можуть привести до тієї ж системи рівнянь (48) і (85) і у випадку, коли  $\varepsilon(t)$  не прихований розтяг, а явний (тобто довжина  $l$  зразка не фіксована).

Для зручності нижче наведена повна універсальна система рівнянь для ( $\Delta T$ ,  $m$ ) з урахуванням залежностей (90) і (91):

$$\left\{ \begin{aligned} & [C_\varepsilon(t) + \theta(t - t_y) \cdot \tilde{C}_1 \cdot V \cdot \sigma(t)] \cdot \frac{d\Delta T}{dt} + \\ & + f(t) \cdot \Delta T(t) = \left\{ RT \cdot \left[ \ln\left(\frac{1}{\varphi}\right) - \ln(n_0) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{2 \cdot \alpha \cdot V_0}{\tilde{r}} - \theta(t - t_y) \cdot \tilde{C}_2 \cdot V \cdot \sigma(t) \right\} \times \\ & \times \frac{dm}{dt} - V \cdot D(t) \cdot \left\{ \theta(t - t_y) [\tilde{C}_1 \cdot (T(t) - \right. \\ & \left. - T(t_y)) + \tilde{C}_2 [m(t) - m(t_y)]] \right\} \cdot \frac{d\sigma(t)}{dt}; \\ & \left\{ \frac{d}{dt} + L(t) \right\} \left\{ \theta(t - t_y) \cdot [\tilde{C}_1 \cdot (T(t) - \right. \\ & \left. - T(t_y)) + \tilde{C}_2 [m(t) - m(t_y)]] \right\} = \\ & = \left\{ \frac{d}{dt} + L(t) + \eta(t) \right\} \frac{\sigma(t)}{E}; \\ & \eta(t) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t); \\ & L(t) = -\frac{d}{dt} \left\{ \ln[\varphi_1(t)/\varphi_2(t_0)] \right\}; \\ & \varphi_1(t) = \xi_1 \cdot e^{-\alpha_1 t}; \\ & \varphi_2(t) = \xi_2 \cdot e^{\alpha_1 t}; \\ & \sigma(0)/E = \theta(t_0 - t_y) \cdot \left\{ \tilde{C}_1 \cdot (T(t_0) - \right. \\ & \left. - T(t_y)) + \tilde{C}_2 (m(t_0) - m(t_y)) \right\}. \end{aligned} \right. \quad (94)$$

**Висновки.** Побудована в даній роботі універсальна система рівнянь описує взаємний вплив тепломасообмінних і деформаційних процесів у дисперсних системах (у формі невеликих стрижнів, смуг, стрічок тощо) при їхньому одноосьовому навантаженні, а також прихованому або явному розтягу. Проведений попередній якісний аналіз отриманої в даній роботі системи рівнянь дає підстави рекомендувати її для практичного застосування.

**Перспективи подальших досліджень.** Отримані в даній роботі результати можуть бути в подальшому використані також для уточнення й удосконалення існуючих інженерних методів розрахунку систем формування мікроклімату музейних приміщень для запобігання деформаційних явищ у полімерно-дисперсних експозиційних експонатах як на стадіях проектування або конструювання відповідних технічних систем, так і в режимах реальної експлуатації останніх. Це дозволить мінімізувати старіння та деградацію музейних експонатів.

### Література

1. Роботнов Ю. И. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю. И. Роботнов. – Москва: Наука, 1977. – 400 с.
2. Уржумцев Ю. С. Прогностика деформативности полимерных материалов / Ю. С. Уржумцев, Р. Д. Максимов. – Рига: Зинатне, 1975. – 280 с.
3. Уржумцев Ю. С. Научные основы инженерной климатологии полимерных и композитных материалов / Ю. С. Уржумцев, И. И. Черский // Механика композитных материалов. – 1985. – № 4. – с.708-714.
4. Лыков А.В. Теория сушки / А.В.Лыков. – Москва: Наука, 1968. – 350 с.
5. Boltzmann L. Zur. Theorie der elastischen Nachwirring. / L. Boltzmann // Annalen der Physik. – Vol. 241. – Iss. 11, 2006
6. Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победра. – Москва: Наука, 1970. – 480 с.
7. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация / М. А. Колтунов. – Москва: Высшая школа, 1976. – 277с.
8. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени / А. Р. Ржаницын. – Москва: Стройиздат, 1949. – 160 с.
9. Колтунов М. А. Анализ ползучести ортотройного стеклопластика / М. А. Колтунов, В. Н. Безухов // Вестник Московского университета. Серия: Математика и механика. – 1963. – № 6.
10. Колтунов М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации / М.А.Колтунов // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – с.483-497.
11. Leaderman H. Elastic and Crup. Properties of Filamentous and other High Nolymers / H. Leaderman. – Washington: Textile Foundation, 1993. – 380p.
12. Колтунов М. А. Метод упругих решений задач термовязкоупругости / М. А. Колтунов // Механика полимеров. – 1970. – № 4.
13. Уржумцев Ю. С. Влаво-временная аналогия / Ю. С. Уржумцев // Механика полимеров. – 1972. – № 5. – с. 780-786 .
14. Колтунов М. А. К вопросу построения нелинейных соотношений термовязкоупругости / М. А. Колтунов // Механика полимеров – 1967. – № 6.
15. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров / Д. Ферри // Москва: ИЛ, 1963. – 400 с.
16. Уржумцев Ю. С. Прогностика деформативности процессов разрушения полимерных материалов / Ю. С. Уржумцев // Механика полимеров. – 1975. – № 3. – с. 498-514.
17. Луцык Р. В. Релаксация напряжений в полимерных материалах при их тепло- и массообмене со средой /



- Р. В. Луцык, Ю. Л.Ментковский, В. П.Холод // Известия вузов. Технология легкой промышленности 1986. – № 4. – с. 57-60.
18. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости / Р. Кристенсен. – Москва: Мир, 1974. – 376 с.
19. Луцык Р. В. Влияние влаги на релаксационные свойства и остаточную деформацию дублированных тканей для верха обуви / Р. В. Луцык, Н. Е. Хомяк // КОП. – 1985. – № 1. – с. 53-55.
20. Луцык Р. В. Влияние влаги на релаксационные свойства шерстяных тканей различной сложности / Р. В. Луцык, О. С. Слюсаренко, А. П. Шевченко // Известия вузов. Технология легкой промышленности. – 1981. – № 2. – с. 14-17.
21. Луцык Р. В. К теории вязкоупругости дисперсных систем в условиях тепломассообмена / Р. В. Луцык, Ю. Л.Ментковский, В. П.Холод // Инженерно-физический журнал. – 1990. – Т 58, № 4. – с. 655-660.
22. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В Лыков. – Москва: Высшая школа, 1967. – 599 с.
23. Лыков А. В. Теория тепло- и массопереноса / А. В Лыков, Ю. А.Михайлов. – Москва; Ленинград: ГЭИ, 1963. – 533 с.
24. Луцык Р. В. Тепломассообмен при обработке текстильных материалов / Р. В. Луцык, Э. С.Малкин, И. И. Абаржи. – Киев: Наукова думка. – 1993. – 344 с.
25. Ребиндер П. А. О формах связи влаги с материалом в процессе сушки и улучшения качества материалов / П.А.Ребиндер. – Москва: Профиздат, 1958. – 14 с.
26. Ван Кревелен Д. В. Свойства и химическое строение полимеров / Д. В. Ван Кревелен. – Москва: Химия, 1976. – 415 с.
27. Чесунов В. М. Оптимизация процессов сушки в легкой промышленности / В. М. Чесунов, А. А. Захарова. – Москва: Легпромбытиздат, 1985. – 112 с.
28. Лыков А. В. Явления переноса в капиллярнопористых телах / А. В Лыков. – Москва: Изд. техн.-теор. лит., 1954. – 297 с.
29. Луцык Р. В. Разработка методов изучения, анализ взаимосвязи и прогнозирование тепломассообменных и физико-механических свойств текстильных и кожно-обувных материалов: автореф. дис. ... докт. техн. наук. / Луцык Р. В. – Москва, 1988. – 48 с.

#### References

1. Robotnov Y. I. *Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel*. Nauka, 1977.
2. Urzhumtsev Y. S., Maksimov R. D. *Prognostika deformativnosti polimernykh materialov*. Zinatne, 1975.
3. Urzhumtsev Y.S., Cherskiy I.I. "Naychnye osnovy inzhenernoi klimatologii polimernykh i kompozitnykh materialov." *Mekhanika kompozitnykh materialov*, no.5, 1985.
4. Lykov A. V. *Teoriya sushki*. Nauka, 1968.
5. Boltzmann L. "Zur. Theorie der elastischen Nachwirring." *Annalen der Physik*, vol. 241, Iss. 11, 2006.
6. Pliushyn A. A., Pobedrya B. E. *Osnovy matematicheskoi teorii*. Nauka, 1970.
7. Koltunov M. A. *Polzuchest i relaxatsiia*. Vysshaya shkola, 1976.
8. Rzhantsyn A.R. *Nekotorye voprosy mekhaniki sistem, deformiruiuschihsya vo vremeni*. Stroyizdat, 1949.
9. Koltunov M. A., Bezukhov V. N. "Analiz polzuchesti ortotropnogo stekloplastika." *Vestnik Moskovskogo universyteta. Seriya: Matematika i mekhanika*, 1963, no. 6.
10. Koltunov M. A. "K voprosu vybora yader pri reshenii zadach s uchetom polzuchesti i relaksatsyi." *Mekhanika polimerov*, no. 4, 1966, pp. 483-497.
11. Leaderman H. *Elastic and Crup. Properties of Filamentous and other High Nolymer*s. Washington: Textile Foundation, 1993.
12. Koltunov M.A. "Metod uprugikh resheniy zadach termovyazkouprugosty." *Mekhanika polimerov*, no. 4, 1970.
13. Urzhumtsev Y.S. "Vlago-vremennaya analogiia." *Mekhanika polimerov*, no. 5, 1972, pp. 780-786.
14. Koltunov M.A. "K voprosu postroeniia nelineinykh sootnosheniy termoviazkouprugosty." *Mekhanika polimerov*, no. 6, 1967.
15. Ferry D. *Viazkouprugie svoystva polimerov*. IL, 1963.
16. Urzhumtsev Y. S. "Prognostika deformativnosti protsessov razrusheniia polimernykh materialov." *Mekhanika polimerov*, no. 3, 1975, pp. 498-514.
17. Lutsyk R. V., Mentkovskiy Y. L., Kholod V. P. "Relaxatsiia napriazheniy v polimernykh materialakh pri ih teplo – i masoobmene so sredoy." *Izvestiia vuzov. Tekhnologiya legkoy promyshlennosti*, no. 4, 1986, pp. 57-60.
18. Kristensen R. *Vvedenie v teoriiu viazkouprugosti*. Mir, 1974.
19. Lutsyk R. V., Khomiak N. E. "Vliiani'e vlagi na relaksatsionnye svoystva i ostatochnuu defarmatsiiu dublirovannykh tkaney dlia verkha obuvi." *KOP*, no. 1, 1985, pp. 53-55.
20. Lutsyk R. V., Sliusarenko O. S., Shevchenko A. P. "Vliianie vlagi na relaksatsionnye svoystva sherstianykh tkaney razlichnoy slozhnosti." *Izvestiia vuzov. Tekhnologiya legkoy promyshlennosti*, no. 2, 1981, pp. 14-17.
21. Lutsyk R.V., Mentkovskiy Y. L., Kholod V. P. "K teorii viazkouprugosti dispersnykh sistem v usloviikh teplo masoobmena." *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, vol., no. 4, 1990, pp. 655-660.
22. Lykov A. V. *Teoriia teploprovodnosti*. Vysshaya shkola, 1967.
23. Lykov A. V., Mikhailov Y. A. *Teoriia teplo- i masoperenosa*. GEI, 1963.

24. Lutsyk R. V., Malkin E. S., Abarzhy I. I *Teplomassoobmen pri obrabotke tekstilnykh materialov*. Naukova dumka, 1993.
25. Rebinder P.A. *O formakh svyazi vlazi s materialom v protsesse sushki i uluchsheniia kachestva materialov*. Profizdat, 1958.
26. Van Krevelen D. V. *Svoistva i khimicheskoe stroenie polimerov*. Khimiia, 1976.
27. Chesunov V. M., Zakharova A. A. *Optimizatsiia protsessov sushki v legkoi promishlennosti*. Legprombytizdat, 1985.
28. Lykov A. V. *Yavleniia perenosa v kapliarnoporistikh telakh*. Izd. tekhn.-teor. lit., 1954.
  
29. Lutsyk R.V. *Razrabotka metodov izucheniia, analiz vzaimosvyazi i prognozirovaniye teplomassoobmennykh i fiziko-mekhanicheskikh svoystv tekstilnykh i kozhevno obuvnykh materialov*. Diss. abstract. Moskva, 1988.

## УДК 539.3(075)

### Концептуальные основы анализа теплообменных и деформационных процессов в полимерных дисперсных телах для формирования микроклимата музеев

В.Б. Довгалюк<sup>1</sup>, Ю.В. Човнюк<sup>2</sup>

<sup>1</sup>к.т.н., проф. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, tgsiv@ukr.net, ORCID: 0000-0002-4836-5354

<sup>2</sup>к.т.н., доц. Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев, Украина, uchovnyuk@ukr.net

*Аннотация. Для хранения музейных экспонатов, среди которых полимерные дисперсные, необходимо обеспечить параметры микроклимата, максимально замедляющие старение и деградацию. Используя теорию Больцмана-Вольтерры, первый закон термодинамики для открытых систем и метод определения параметров функций влияния, обоснована адекватная физико-механическая модель, описывающаяся системой дифференциальных уравнений для анализа теплообменных и деформационных процессов в дисперсных материалах. Показано, что при исследовании влияния теплоты и влаги на деформационные свойства полимерных материалов, более адекватным является не односторонний учет влияния теплообмена на реологические процессы, а описание их взаимного влияния друг на друга. Такой подход позволяет изучить влияние температурно-влажностного режима музейных помещений на процессы нагрузки и деформации полимерно-дисперсных материалов музейных экспозиций. Введение в систему дифференциальных уравнений, описывающих процессы теплообмена и деформации в коллоидных капиллярно-пористых телах с учётом относительной влажности среды, в которой находится материал, позволяют максимально точно описать процессы, происходящие при музейном хранении экспонатов. Полученные в работе результаты могут быть использованы для разработки инженерных методов расчёта систем формирования микроклимата музейных помещений, как на стадиях проектирования соответствующих технических систем, так и в режимах реальной эксплуатации последних.*

*Ключевые слова: теплообмен, деформация, дисперсность, материалы.*

UDC 539.3(075)

## Theoretical Development of Thermal-Exchange and Deformation Processes in Polymerical Dispersion Solids for Microclimate Forming in Museums

V. Dovhaliuk<sup>1</sup>, Y. Chovnyuk<sup>2</sup>

<sup>1</sup> PhD, professor. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, tgsiv@ukr.net

ORCID: 0000-0002-4836-5354

<sup>2</sup> PhD, associate professor. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, ychovnyuk@ukr.net

*Abstract. For storage of museum exhibits, among which polymeric disperse, it is necessary to provide microclimate parameters that slow down aging and degradation as much as possible. An adequate physico-mechanical model is justified that consists of a system of differential equations for the joint description of heat-exchange and deformation processes in disperse materials. It is obtained using the Boltzmann-Volterra theory, the first law of thermodynamics for open systems, and the method for determining the parameters of the influence functions. It is shown that when studying the influence of heat and moisture on the deformation properties of polymeric materials, it is more consistent to take into account description of their mutual influence on each other rather than separately the influence of heat and mass transfer on rheological processes. This approach allows studying the influence of temperature-humidity regime of museum premises on the processes of load and deformation of polymer-dispersed materials of museum exposition. Including the differential equations that describe the processes of heat transfer and deformation in colloidal capillary-porous bodies taking into account the relative humidity of the environment in which the material is located, allows accurate description the processes that occur during the museum storage of exhibits. The results obtained in the work can be used to develop engineering methods for calculating the systems of forming the microclimate of museum premises, both at the stages of designing the relevant technical systems, and in the regimes of actual operation.*

*Keywords: influence, deformation, dispersion, materials.*

Надійшла до редакції / Received 20.11.2017