

УДК 532.542.1

## Чисельне моделювання нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини в плоских каналах довільної форми теплообмінних апаратів

Ю. В. Човнюк<sup>1</sup>, В. Т. Кравчук<sup>2</sup>, А. С. Москвітін<sup>3</sup>, І. О. Пефтьєва<sup>4</sup>

<sup>1</sup>к.т.н., доц. Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ, Україна, [ychovnyuk@ukr.net](mailto:ychovnyuk@ukr.net),  
ORCID: 0000-0002-0608-0203

<sup>2</sup>к.т.н., проф. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, [vtk1@ukr.net](mailto:vtk1@ukr.net),  
ORCID: 0000-0002-5213-3644

<sup>3</sup>асист. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, [moskvitina.as@knuba.edu.ua](mailto:moskvitina.as@knuba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0003-3352-0646

<sup>4</sup>асист. Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна, [piefteva.io@knuba.edu.ua](mailto:piefteva.io@knuba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0002-8858-9010

*Анотація. У даній роботі описано загальний метод чисельного розв'язку задачі про нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини ((полі-)етиленгліколь, гліцерин) у плоских каналах довільної форми теплообмінних апаратів. Однією з основних проблем чисельного розв'язку задач математичної фізики є представлення граничних умов для областей довільної форми. Ефективне розв'язання задачі досягається шляхом застосування адаптивних сіток. Для цього знаходиться така система координат, не обов'язково ортогональна, у якій межові лінії або поверхні розрахункової області збігаються з координатними лініями або поверхнями. Математична модель течії базується на двовимірних рівняннях Нав'є-Стокса в змінних «функція течії-вихор» і рівнянні Пуассона для тиску, які розв'язуються на основі кінцево-різницевого методу. Проведено чисельне моделювання потоку рідини у плоскому криволінійному коліні теплообмінного апарату при числі Рейнольдса  $Re=1000$ . Дана форма відповідає найбільш характерним особливостям проточних частин різноманітних теплообмінних апаратів, гідравлічних машин, гідравлічних та трубопровідних систем. Подання чисельних результатів здійснено на основі пакету підпрограм графічної обробки VISSIM.*

*Ключові слова: чисельне моделювання, нестационарна течія, в'язка нестислива рідина, плоский канал, теплообмінний апарат, рівняння Нав'є-Стокса, рівняння Пуассона, метод адаптивних сіток.*

**Постановка проблеми.** Обґрунтувати розробку й створення будь-якого пристрою, у якому відбувається взаємодія між потоком рідини й елементами проточних частин (наприклад, транспортні та енергетичні машини, теплообмінні апарати, магістральні трубопроводи), неможливо без детальної інформації про характеристики потоку, про сили на поверхнях, які обтікаються, про віброакустичні явища тощо.

**Аналіз публікацій за темою дослідження.** Серед різних засобів отримання інформації про характеристики потоку, про сили на поверхнях, які обтікаються, про віброакустичні явища тощо важливу роль відіграють теоретичні методи. Вони спираються на рівняння гідродинаміки й чисельні методи їхнього розв'язку. При цьому для ламінарних течій основні зусилля спрямовано на розв'язок системи рівнянь Нав'є-Стокса [1...3].

У даній роботі розглянуто загальний метод чисельного розв'язку задачі про нестационарну течію в'язкої нестисливої рідини у плоских каналах довільної форми теплообмінних апаратів. Ефективний розв'язок задачі досягається за-

стосуванням адаптивних сіток.

Математична модель течії базується на двовимірних рівняннях Нав'є-Стокса у змінних «функція течії-вихор» й рівнянні Пуассона для тиску, які розв'язуються на основі кінцево-різницевого методу.

Проведено чисельне моделювання потоку рідини у плоскому криволінійному коліні при числі Рейнольдса  $Re=1000$ . Дана форма відповідає найбільш характерним особливостям проточних частин різноманітних гідромашин, теплообмінних апаратів, гідравлічних і трубопровідних систем. Представлення чисельних результатів здійснено на основі пакету підпрограм графічної обробки VISSIM.

Однією з основних проблем чисельного розв'язку задач математичної фізики є представлення граничних умов для областей довільної форми. Реалізація різноманітних штучних прийомів для апроксимації як самих криволінійних границь, так і граничних умов на них, може призводити до значних втрат точності розв'язку. Особливо це проявляється у задачах, у яких розв'язки у примежовій області мають максимальні градієнти.

Ефективним методом розв'язання цієї проблеми є застосування адаптованих сіток для розрахункової області. Сутність цього методу полягає в тому, що знаходиться така система координат, не обов'язково ортогональна, у якій межові лінії (поверхні) області збігаються з координатними лініями (поверхнями).

У плоскому випадку розрахункова область трансформується у прямокутну, а межа крива відображається на сторони прямокутника. Практично задача побудови адаптованої сітки зводиться до знаходження функцій, які описують відтворення канонічної (прямокутної) області на область, для якої первісно сформульована задача.

Для двовимірного випадку вводяться нові безрозмірні криволінійні координати  $\xi, \eta$  і визначаються функції  $x(\xi, \eta)$  та  $y(\xi, \eta)$ . Як показано у роботі [4], ці функції можуть бути знайдені з розв'язку системи двох квазілінійних рівнянь еліптичного типу з граничними умовами першого роду (задача Діріхле). Ці рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(Q_1 x_{\xi} + Q_2 x_{\eta}) = 0; \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(Q_1 y_{\xi} + Q_2 y_{\eta}) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\alpha, \beta$  й  $\gamma$  – параметри:

$$\alpha = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2, \text{ м}^2; \quad (2)$$

$$\beta = x_{\xi} x_{\eta} + y_{\xi} y_{\eta}, \text{ м}^2; \quad (3)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2, \text{ м}^2; \quad (4)$$

$J$  – якобіан перетворення, а саме

$$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}, \text{ м}^2; \quad (5)$$

$Q_1(\xi, \eta)$  та  $Q_2(\xi, \eta)$  – деякі функції, що дозволяють регулювати розміщення координатних ліній у фізичній площині, їхній явний вираз наведений у роботі [5]; нижні індекси  $\xi$  та  $\eta$  означають частинну похідну за відповідними криволінійними координатами.

**Формулювання цілей статті.** Мета даної роботи полягає в обґрунтуванні чисельного методу моделювання нестационарної течії в'язкої нестисливої рідини в плоских каналах довільної форми теплообмінних апаратів.

**Виклад основного змісту дослідження.** Система (1) для координатних функцій  $x(\xi, \eta)$ ,

$y(\xi, \eta)$ , м, вирішується в прямокутній області. Граничними умовами є значення координат контуру фізичної області.

Диференціальні рівняння апроксимувалися кінцево-різницевиими співвідношеннями із другим порядком точності на прямокутному дев'ятиточковому шаблоні (завдяки наявності змішаних похідних) з кроком  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ .

Система різницевих рівнянь розв'язується ітераційним методом Гаусса-Зейделя в розрахунковій області на сітці (рис. 1 – у площині  $x, y$ ).

Криволінійні ділянки межі описані дугами кіл, які дотичні до прямолінійних ділянок. У даній роботі відображення  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$ , м, що забезпечує побудову адаптивної сітки, отримано з розв'язку системи (1), у якій прийнято  $Q_1 + Q_2 = 0$ . Кількість вузлів становить  $128 \times 64$ , серед яких на твердих границях маємо 128 вузлів, а на вході й виході – 64.

Система рівнянь Нав'є-Стокса для середовища з постійними фізичними властивостями за відсутності зовнішніх сил у векторній формі

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}, \text{ м/с}^2; \\ (\nabla \cdot \vec{v}) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

де  $t$  – час, с,  $\vec{v}$  – вектор швидкості, м/с;  $p$  – тиск у потоці, Па;  $\nu$  – кінематична в'язкість, м<sup>2</sup>/с;  $\rho$  – густина середовища, кг/м<sup>3</sup>;  $\nabla$  – оператор Гамільтона;  $\nabla^2 = (\nabla \cdot \nabla)$  – оператор Лапласа.

Дією оператору ротора на рівняння (6) можна вилучити тиск і отримати рівняння переносу вихору  $\vec{\omega} = [\nabla \cdot \vec{v}] = \text{rot } \vec{v}$ , с<sup>-1</sup>, у вигляді

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - (\nabla \cdot \vec{v}) \vec{\omega} + \nu (\nabla^2 \vec{\omega}), \text{ с}^{-2}. \quad (7)$$

У плоскому випадку  $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = 0$ . Тоді в декартовій системі координат вихор

$$\vec{\omega} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}, \text{ с}^{-1}, \quad (8)$$

де  $v_x$  і  $v_y$  – компоненти швидкості, м/с, на відповідні осі.

Визначасмо функцію течії  $\psi$ , м<sup>2</sup>/с

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \text{ м/с}; \\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ м/с}, \end{cases} \quad (9)$$

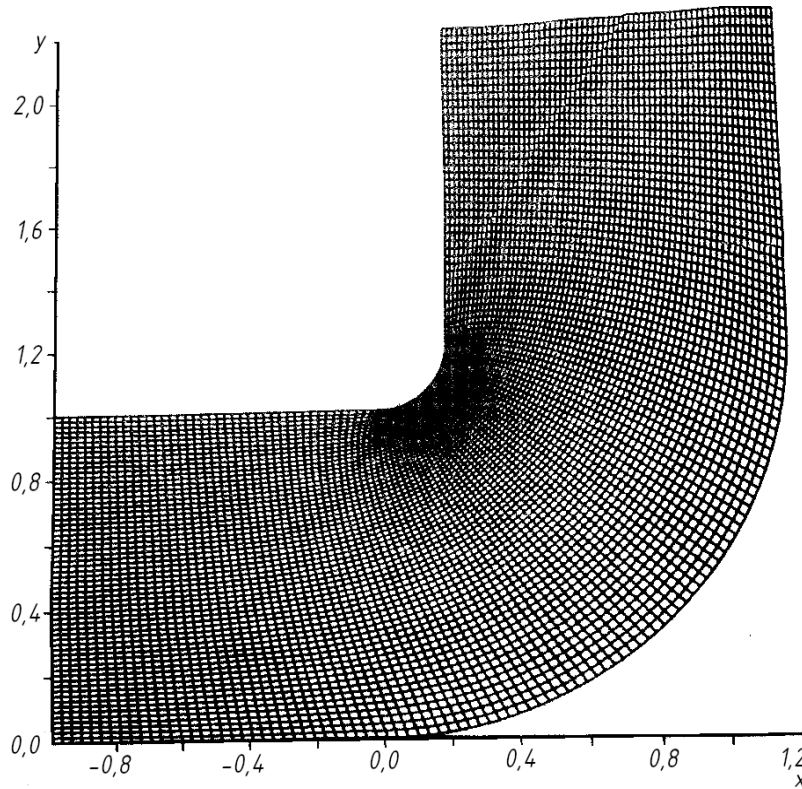


Рис. 1. Розрахункова область і сітка в площині  $(x, y)$

де  $v_x$  і  $v_y$  – компоненти вектора швидкості, м/с, уздовж відповідної осі  $x$  та  $y$

Уводимо безрозмірні величини з використанням характерної швидкості потоку  $v_0$ , м/с, і розміру області течії  $L$ , м,

$$\begin{aligned} \tilde{v}_x &= v_x / v_0; \\ \tilde{v}_y &= v_y / v_0; \\ \tilde{x} &= x / L; \\ \tilde{y} &= y / L; \\ \tilde{\omega} &= \frac{\omega L}{v_0}; \\ \tilde{t} &= Ho = \frac{t v_0}{L}; \\ \tilde{\Psi} &= \frac{\Psi}{v_0 L}; \\ \tilde{p} &= Eu = \frac{p}{\rho v_0^2}; \\ \tilde{\Psi} &= \frac{\Psi}{v_0 L}; \\ Re &= \frac{v_0 L}{\nu}; \\ \tilde{J} &= \tilde{x}_\xi \tilde{y}_\eta - \tilde{x}_\eta \tilde{y}_\xi = J / L^2; \\ \tilde{\alpha} &= \tilde{x}_\eta^2 + \tilde{y}_\eta^2 = \alpha / L^2; \\ \tilde{\beta} &= \tilde{x}_\xi \tilde{x}_\eta + \tilde{y}_\xi \tilde{y}_\eta = \beta / L^2; \\ \tilde{\gamma} &= \tilde{x}_\xi^2 + \tilde{y}_\xi^2 = \gamma / L^2, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $Ho$  – критерій гомохронності,  $Eu$  – критерій Ейлера, а  $Re$  – критерій Рейнольдса.

Рівняння (6) і (8) у безрозмірних змінних

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\omega}; \\ \nabla^2 \tilde{\Psi} = \tilde{\omega}. \end{cases} \quad (11)$$

В адаптованій системі координат рівняння (11) мають вигляд

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_t + \frac{\tilde{\Psi}_\eta \cdot \tilde{\omega}_\xi - \tilde{\Psi}_\xi \cdot \tilde{\omega}_\eta}{\tilde{J}} = \frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\omega}_{\xi\xi} - 2\tilde{\beta} \tilde{\omega}_{\xi\eta} + \tilde{\gamma} \tilde{\omega}}{\tilde{J}^2 Re}; \\ \frac{\tilde{\alpha} \cdot \tilde{\Psi}_{\xi\xi} - 2\tilde{\beta} \cdot \tilde{\Psi}_{\xi\eta} + \tilde{\gamma} \tilde{\Psi}_{\eta\eta}}{\tilde{J}^2} = \tilde{\omega}. \end{cases} \quad (12)$$

Компоненти вектора швидкості в цьому випадку вздовж осей  $\xi$  та  $\eta$ , відповідно,

$$\begin{cases} \tilde{v}_\xi = \frac{1}{\tilde{J}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta}; \\ \tilde{v}_\eta = -\frac{1}{\tilde{J}} \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \xi}. \end{cases} \quad (13)$$

Для системи (12) ставиться початково-гранична задача. У нових змінних  $\xi, \eta$  граничні

умови для рівнянь (12) ставляться таким чином. На твердих границях  $\eta = 0$  і  $\eta = \eta_{w2}$  функція течії вважається постійною і рівною, відповідно,  $\tilde{\Psi}_{w1}$  і  $\tilde{\Psi}_{w2}$  тобто

$$\tilde{\Psi}(0) = \tilde{\Psi}_{w1}, \tilde{\Psi}(\eta_{w2}) = \tilde{\Psi}_{w2}. \quad (14)$$

Значення вихору на цих межах може бути отримане з розкладання функції течії в ряд Тейлора в околиці межевої точки  $(i, 1)$   $(i, 1)$  із залученням умови «прилипання»  $v_w = 0$

$$\tilde{\Psi}_{i,2} = \tilde{\Psi}_{i,1} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} \Big|_{i,1} \Delta \eta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^2} \Big|_{i,1} (\Delta \eta)^2 + 0 \left( (\Delta \eta)^3 \right); \quad (15)$$

$$\tilde{v}_{\xi,i,1} = \frac{1}{\tilde{J}} \cdot \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} \Big|_{i,1} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial \eta^2} \Big|_{i,1} = \frac{\tilde{\omega} \tilde{J}^2}{\tilde{\gamma}} \Big|_{i,1}. \quad (16)$$

де  $\Delta \eta$  – крок сітки координати  $\eta$ .

Останнє співвідношення отримане з рівняння (12) при умові, що на стінці

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \xi} = -\tilde{J} \tilde{v}_{\eta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} = \tilde{J} \cdot \tilde{v}_{\xi} = 0.$$

Підставляємо співвідношення (16) до (15) і знаходимо значення вихору на стінці

$$\tilde{\omega}_{i,1} = \frac{2(\tilde{\Psi}_{i,2} - \tilde{\Psi}_{i,1}) \tilde{\gamma}}{\tilde{J}^2 (\Delta \eta)^2}. \quad (17)$$

Гранична умова (17) є узагальненням на випадок адаптованої сітки умов Томана [2]. На вхідній границі задається розподіл  $\tilde{\Psi}_{i,j} = f(\eta)$ , де  $f(\eta)$  – розв'язок задачі Пуазейля для ламінарної течії [6]. Значення вихору на вході визначається з рівняння (12) за відомого розподілу  $\tilde{\Psi}(\xi, \eta)$  у даний момент часу. На вихідній межі виставляються граничні умови

$$\frac{\partial \tilde{v}_{\eta}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi} = 0, \quad (18)$$

які узагальнюють умови Томана-Шевчіка.

Початковою умовою у момент часу  $\tilde{t} = 0$  задається розв'язок Пуазейля:

$$\tilde{\Psi}(\xi, \eta) \Big|_{\tilde{t}=0} = -\frac{4}{3} \eta^3 + 2 \eta^2; \quad (19)$$

$$\tilde{\omega}(\xi, \eta) \Big|_{\tilde{t}=0} = -8 \eta + 4. \quad (20)$$

Для чисельного розв'язку системи (12) використовується явна різницева схема. Похідна  $\partial \tilde{\omega} / \partial \xi$  апроксимується одностороннім різницею співвідношенням «уперед». Похідні за просторовими змінними для членів, крім конвективних, апроксимуються їхніми центрально-різницею аналогами на дев'яти-точковому шаблоні. Конвективні члени апроксимуються за іншою схемою з різницями «проти» потоку (схема з донорськими комітками [2])

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{\eta} \frac{\tilde{\omega}_{\xi}}{\tilde{J}} = \tilde{v}_{\xi} \tilde{\omega}_{\xi} \approx \frac{\tilde{v}_R^{\xi} \tilde{\omega}_R - \tilde{v}_L^{\xi} \tilde{\omega}_L}{\Delta \xi}; \\ -\tilde{\Psi}_{\xi} \frac{\tilde{\omega}_{\eta}}{\tilde{J}} = \tilde{v}_{\eta} \tilde{\omega}_{\eta} \approx \frac{\tilde{v}_R^{\eta} \tilde{\omega}_R - \tilde{v}_L^{\eta} \tilde{\omega}_L}{\Delta \eta}, \end{cases} \quad (21)$$

де

$$\tilde{v}_R^{\xi} = \frac{\tilde{v}_{i+1,j}^{\xi} + \tilde{v}_{i,j}^{\xi}}{2};$$

$$\tilde{v}_L^{\xi} = \frac{\tilde{v}_{i-1,j}^{\xi} + \tilde{v}_{i,j}^{\xi}}{2};$$

$$\tilde{v}_{i,j}^{\xi} = \frac{\tilde{\Psi}_{i,j+1} - \tilde{\Psi}_{i,j-1}}{2 \Delta \eta \tilde{J}_{i,j}};$$

$$\tilde{\omega}_R = \begin{cases} \tilde{\omega}_{i,j} & \text{при } \tilde{v}_R^{\xi} \geq 0; \\ \tilde{\omega}_{i+1,j} & \text{при } \tilde{v}_R^{\xi} < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}_L = \begin{cases} \tilde{\omega}_{i-1,j} & \text{при } \tilde{v}_L^{\xi} \geq 0; \\ \tilde{\omega}_{i,j} & \text{при } \tilde{v}_L^{\xi} < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{v}_R^{\eta} = \frac{\tilde{v}_{i,j+1}^{\eta} + \tilde{v}_{i,j}^{\eta}}{2};$$

$$\tilde{v}_L^{\eta} = \frac{\tilde{v}_{i-1,j}^{\eta} + \tilde{v}_{i,j}^{\eta}}{2};$$

$$\tilde{v}_{i,j}^{\eta} = -\frac{\tilde{\Psi}_{i,j+1} - \tilde{\Psi}_{i-1,j}}{2 \Delta \xi \tilde{J}_{i,j}};$$

$$\tilde{\omega}_R = \begin{cases} \tilde{\omega}_{i,j} & \text{при } \tilde{v}_R^\eta \geq 0; \\ \tilde{\omega}_{i,j+1} & \text{при } \tilde{v}_R^\eta < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{\omega}_L = \begin{cases} \tilde{\omega}_{i,j-1} & \text{при } \tilde{v}_L^\eta \geq 0; \\ \tilde{\omega}_{i,j} & \text{при } \tilde{v}_L^\eta < 0; \end{cases}$$

де  $\Delta\xi$  – крок сітки координати  $\xi$ ;  $i, j$  – номери вузлів розрахункової сітки; верхні індекси означають, що здійснюється поворот («підкрутка») саме за цією координатою адаптованої сітки для розрахунків.

Рівняння для функції течії (12) на кожному часовому прошарку вирішується ітераційним методом Гаусса-Зейделя.

Оцінка стійкості різницевої схеми для рівняння (12) може бути проведена на основі методу Фур'є. При цьому коефіцієнти схеми вважаються «замороженими» [2, 7]. Після елементарних перетворень отримаємо вираз для множника переходу  $G$

$$G = \frac{W^{n+1}}{W^n} = 1 - 2(d_\xi + d_\eta) + 2(d_\xi \cos \theta_\xi + d_\eta \cos \theta_\eta) + 4d_{\xi\eta} \sin \theta_\xi \sin \theta_\eta - I(C_\xi \sin \theta_\xi + C_\eta \sin \theta_\eta), \quad (22)$$

де

$$d_\xi = A \frac{\Delta \tilde{t}}{(\Delta \xi)^2};$$

$$d_\eta = C \frac{\Delta \tilde{t}}{(\Delta \eta)^2};$$

$$d_{\xi\eta} = B \frac{\Delta \tilde{t}}{4 \Delta \xi \Delta \eta};$$

$$A = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{J}^2 Re};$$

$$B = \frac{2\beta}{\tilde{J}^2 Re};$$

$$C = \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{J}^2 Re};$$

$C_\xi$  і  $C_\eta$  – числа Куранта на адаптивній сітці

$$C_\xi = \tilde{v}^\xi \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \xi},$$

$$C_\eta = \tilde{v}^\eta \frac{\Delta \tilde{t}}{\Delta \eta};$$

$W^n$  – амплітуда Фур'є-компоненти на часовому прошарку  $n$ ;  $\theta_\xi = k_\xi \Delta \xi$  і  $\theta_\eta = k_\eta \Delta \eta$  – фазові кути;  $k_\xi$  й  $k_\eta$  – хвильові числа;  $\Delta \eta$  – крок сітки координати  $\eta$ ;  $\Delta \tilde{t}$  – крок сітки безрозмірного часу (критерію гомохронності).  $I = (-1)^{1/2}$  – уявна одиниця.

Для обмеження розв'язку (за величиною) необхідно, щоб для всіх  $\theta_\xi$  та  $\theta_\eta$  виконувалась умова

$$|G| \leq 1. \quad (23)$$

Оскільки вираз для  $G$  має комплексний вигляд, умова (23) може бути послабленою системою нерівностей

$$|\Re(G)| \leq 1; \quad (24)$$

$$|\Im(G)| \leq 1, \quad (24)$$

де  $\Re$  – дійсна частина комплексного числа, а  $\Im$  – уявна.

Нерівності (24) й (25) впливають із виразу  $|G| \leq |\Re(G)| + |\Im(G)|$ . Аналіз функції  $\Re(G)$  як функції двох змінних  $\theta_\xi, \theta_\eta$  з системи

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\xi} \Re(G) = \frac{\partial}{\partial \theta_\eta} \Re(G) = 0 \quad (26)$$

показує екстремуми при  $\sin \theta_\xi = \sin \theta_\eta = 0$ . Звідси випливає, що  $\cos \theta_\xi = \pm 1$ ,  $\cos \theta_\eta = \pm 1$  [7]. На основі цього умова стійкості визначається нерівністю

$$d_\xi + d_\eta \leq \frac{1}{2}. \quad (27)$$

З нерівності (26) випливає, що

$$C_\xi + C_\eta \leq 1. \quad (28)$$

Остаточно отримаємо, що для стійкості розв'язку кінцево-різницевих рівнянь повинна задовольнитися система нерівностей (27) і (28). При  $d_\xi = d_\eta = d$  обмеження на величину

кроку за часом визначається з нерівності

$$\Delta \tilde{t} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{(\Delta \xi)^2}{A}. \quad (29)$$

Підставляємо нерівність (29) до умови (28). Покладаємо  $\Delta \zeta = \Delta \eta$ . Отримаємо обмеження на сіткове число Рейнольдса  $Re_c$

$$Re_c = \left( |\tilde{v}_x| + |\tilde{v}_y| \right) \frac{\Delta \xi}{A} \leq 4. \quad (30)$$

Приведемо чисельні оцінки, які ілюструють виконання умов (27) і (28) для обраних просторово-часових кроків  $\Delta \tilde{t} = 10^{-3}$ ,  $\Delta \zeta = \Delta \eta = 1$  та  $Re = 10^3$ . У площині  $(x, y)$  маємо

$$\max(|\tilde{x}|) \approx \max(|\tilde{y}|) \approx 1.$$

У площині  $(\xi, \eta)$  маємо

$$\max(|\xi|) \approx \max(|\eta|) \approx 10^2.$$

Звідси випливає, що

$$(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi, \tilde{x}_\eta, \tilde{y}_\eta) \approx 10^{-2};$$

$$\tilde{J} \approx 10^{-4};$$

$$\tilde{v}^\xi = \frac{\tilde{y}_\eta \tilde{v}_x - \tilde{x}_\eta \tilde{v}_y}{\tilde{J}} \approx 10^2,$$

оскільки

$$\max|\tilde{v}_x| \approx \max|\tilde{v}_y| \approx 1.$$

Продовжуємо оцінювання й отримаємо  $C_\xi \approx 10^{-1}$ ,  $C_\eta \approx 10^{-1}$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma) \approx 10^{-4}$ ,  $(A, B, C) \approx 10^1$ ,  $d_\xi \approx d_\eta \approx 10^{-2}$ .

З наведених оцінок видно, що умови (27) і (28) виконуються зі значним запасом, а обрані просторово-часові кроки забезпечують стійкий розв'язок кінцево-різницевого рівняння.

Процедури визначення поля тиску в потоці для відомих  $\tilde{\Psi}$  та  $\tilde{\omega}$  заснована на розв'язку рівняння Пуассона

$$\nabla^2 \tilde{p} = -\nabla \cdot [(\tilde{v} \cdot \nabla) \cdot \tilde{v}]. \quad (31)$$

Воно отримане дією оператора дивергенції

на залежність (6) із урахуванням  $(\tilde{v} \cdot \nabla) = 0$ . При розв'язуванні рівняння (31) ставляться граничні умови другого роду (задача Неймана). При цьому на межі задається функція  $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{n}$ , де  $\tilde{n}$  – нормаль до межі. Функція  $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{n}$  на межі визначається з рівняння руху (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} &= \tilde{n} \cdot \nabla \tilde{p} = \\ &= \frac{\partial (\tilde{v} \cdot \tilde{n})}{\partial \tilde{t}} - \tilde{n} \cdot [(\tilde{v} \cdot \nabla) \cdot \tilde{v}] + \frac{\tilde{n} \cdot \nabla^2 \tilde{v}}{Re}. \end{aligned} \quad (32)$$

Звідси випливає, що на твердих межах за умови «прилипання»

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = \frac{\tilde{n} \cdot \nabla^2 \tilde{v}}{Re}. \quad (33)$$

Зазначимо основні особливості задачі Неймана для рівняння Пуассона. По-перше, розв'язок визначений з точністю до адитивної константи, і тому не є єдиним можливим. По-друге, необхідна умова існування розв'язку

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot [(\tilde{v} \cdot \nabla) \cdot \tilde{v}] d\Omega = - \int_S \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} dS, \quad (34)$$

де  $\Omega$  – область течії;  $S$  – її межа.

Крім того, різницевий оператор  $L^h$  задачі Неймана має сингулярну матрицю ( $\det L^h = 0$ ) [8]. Завдяки математичній специфіці, розв'язок задачі (31) і (32) на адаптованій сітці спряжений зі значними обчислювальними труднощами. Щоб їх звести до мінімуму, у даній роботі на частині граничної кривої для (31) ставляться граничні умови першого роду (задача Діріхле)

$$\tilde{p} = \int_{(\ell_d)} \nabla \tilde{p} \cdot d\vec{r} + \tilde{p}_o, \quad (35)$$

де  $\ell_d$  – частина межі області;  $\tilde{p}_o$  – адитивна постійна;  $\vec{r}$  – радіус-вектор.

У розрахунку константи  $\tilde{p}_o$  присвоюється деяке значення, яке конкретизує поверхню розв'язку  $\tilde{p}(\vec{r})$ . На іншій частині межі  $\ell_n$  зберігаються граничні умови другого роду (32).

У розрахунках  $\ell_d$  містила стінки проточної частини й вхід до неї. Ділянки межі  $\ell_n$  відповідав вихід з проточної частини.

За відомими розв'язками  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\Psi}$  та  $\tilde{\omega}$  знаходиться вектор напруження на стінці [9]

$$\tilde{p}_n = \frac{-\tilde{p} \cdot \tilde{n} + (\tilde{n} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v}}{Re}. \quad (36)$$

У довільній системі координат, адаптованій до границь двовимірної області, рівняння (31) має вигляд

$$\tilde{\alpha} \tilde{p}_{\xi\xi} - 2\tilde{\beta} \tilde{p}_{\xi\eta} + \tilde{\gamma} \tilde{p}_{\eta\eta} = \tilde{J}^2 F(\xi, \eta), \quad (37)$$

де  $F(\xi, \eta)$  – функція

$$F(\xi, \eta) = -\frac{2}{\tilde{J}^2} \times \\ \times \left( (\tilde{y}_\eta \tilde{v}_\xi^y - \tilde{y}_\xi \tilde{v}_\eta^y) (-\tilde{x}_\eta \tilde{v}_\xi^x + \tilde{x}_\xi \tilde{v}_\eta^x) - \right. \\ \left. \times (\tilde{y}_\eta \tilde{v}_\xi^x - \tilde{y}_\xi \tilde{v}_\eta^x) (-\tilde{x}_\eta \tilde{v}_\xi^y + \tilde{x}_\xi \tilde{v}_\eta^y) \right). \quad (38)$$

Гранична умова (35) записується у координатній формі, а саме

$$\tilde{p} = \int_{(\ell_d)} \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta} d\eta \right) + \tilde{p}_o. \quad (39)$$

У площині  $(\xi, \eta)$  інтегрування на межі області здійснюється впродовж відрізків координатних ліній, які обмежують прямокутну область. У результаті на вертикальній ділянці границі перший член у виразі (39) нульовий, оскільки  $d\xi = 0$ .

Аналогічно на горизонтальних ділянках нульовим стає другий член, оскільки  $d\eta = 0$ . При цьому для горизонтальних ділянок, тобто на стінці, отримуємо простий вираз для розрахунку тиску

$$\tilde{p}_w(\xi) = \frac{1}{Re} \int_{\xi_1}^{\xi_2} -\frac{\tilde{\beta} \tilde{\omega}_\xi + \tilde{\gamma} \tilde{\omega}_\eta}{\tilde{J}} d\xi + \tilde{p}(\xi_1). \quad (40)$$

При інтегруванні за координатою  $\eta$  значення  $\partial \tilde{p} / \partial \eta$  визначаються зі співвідношення

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \tilde{x}_\eta + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \tilde{y}_\eta. \quad (41)$$

У свою чергу, похідні  $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{x}$  і  $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{y}$  визначаються з рівняння (6), а саме

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \frac{\tilde{v}_x}{\tilde{J}} \left( \tilde{y}_\eta \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \xi} - \tilde{y}_\xi \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \eta} \right). \quad (42)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{t}} - \frac{\tilde{v}_x}{\tilde{J}} \left( \tilde{y}_\eta \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \xi} - \tilde{y}_\xi \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \eta} \right) - \\ - \frac{\tilde{v}_y}{\tilde{J}} \left( -\tilde{x}_\eta \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \xi} + \tilde{x}_\xi \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{1}{Re \tilde{J}} \left( -\tilde{x}_\eta \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi} + \tilde{x}_\xi \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \eta} \right); \quad (42)$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = -\frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{t}} - \frac{\tilde{v}_x}{\tilde{J}} \left( \tilde{y}_\eta \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \xi} - \tilde{y}_\xi \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \eta} \right) - \\ - \frac{\tilde{v}_y}{\tilde{J}} \left( -\tilde{x}_\eta \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \xi} + \tilde{x}_\xi \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{1}{Re \tilde{J}} \left( -\tilde{y}_\eta \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \xi} + \tilde{y}_\xi \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \eta} \right). \quad (43)$$

Похідні  $\partial \tilde{v}_x / \partial \tilde{t}$  та  $\partial \tilde{v}_y / \partial \tilde{t}$  обчислюються за значеннями  $v_x$  та  $v_y$  на двох сусідніх часових прошарках. Похідні за просторовими змінними апроксимувалися їхніми кінцево-різницевиими аналогами з другим порядком точності.

Розрахунок інтеграла (39) зі змінною верхньою межею здійснювався за формулою Симпсона. Співвідношення (42), (43) використовувалися також для розрахунку похідної  $\partial \tilde{p} / \partial n$  на ділянці  $\ell_n$ , а саме

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = n_x \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} + n_y \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}}, \quad (44)$$

де  $n_x$  і  $n_y$  – компоненти вектору нормалі  $\partial \tilde{n}$ .

Сіткова апроксимація рівняння (39) проводилася на дев'ятиточковому шаблоні. Для розв'язку різницеви рівнянь застосовувалась ітеративна процедура Гаусса-Зейделя

$$\tilde{p}_{i,j}^{k+1} = \\ \left( \tilde{\alpha}_{i,j} \frac{\tilde{p}_{i+1,j}^m + \tilde{p}_{i-1,j}^{m+1}}{\Delta \xi^2} - 2\tilde{\beta}_{i,j} \times \right. \\ \times \frac{\tilde{p}_{i+1,j+1}^m - \tilde{p}_{i+1,j-1}^{m+1} - \tilde{p}_{i-1,j+1}^m + \tilde{p}_{i-1,j-1}^{m+1}}{4\Delta \xi \Delta \eta} + \\ \left. + \tilde{\gamma}_{i,j} \frac{\tilde{p}_{i,j+1}^m + \tilde{p}_{i,j-1}^{m+1}}{\Delta \eta^2} - \tilde{J}_{i,j}^2 F_{i,j} \right) \div \\ \div \left( \frac{2\tilde{\alpha}_{i,j}}{\Delta \xi^2} + \frac{2\tilde{\gamma}_{i,j}}{\Delta \eta^2} \right), \quad (45)$$

де  $m$  – часовий шар.

Співвідношення (36) для розрахунку

напружень на твердій стінці у проекціях на осі декартової системи координат у площині

$$\begin{cases} \tilde{p}_{nx} = -\tilde{p}n_x + \frac{1}{Re} \cdot \left( n_x \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + n_y \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{y}} \right); \\ \tilde{p}_{ny} = -\tilde{p}n_y + \frac{1}{Re} \cdot \left( n_x \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{x}} + n_y \frac{\partial \tilde{v}_y}{\partial \tilde{y}} \right). \end{cases} \quad (46)$$

Похідні від складових вектора швидкості, які входять до рівняння (46), визначаються у вузлах адаптованої сітки на основі формули переходу

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} = \frac{1}{\tilde{J}} \left( \tilde{v}_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \tilde{v}_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right); \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{\tilde{J}} \left( -\tilde{x}_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \tilde{x}_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right). \end{cases} \quad (47)$$

Позначимо через  $f(\tilde{x})$  рівняння, яке описує форму границі розрахункової області. Тоді одиничні нормаль  $\vec{n}$  та дотична  $\vec{\tau}$  до  $f(\tilde{x})$  легко визначаються зі співвідношень

$$\begin{cases} \vec{n} = [\vec{k} \times \vec{\tau}]; \\ \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}, \end{cases} \quad (48)$$

де  $|d\vec{r}| = \sqrt{(d\tilde{x})^2 + (d\tilde{y})^2}$ ;  $\vec{k}$  – одиничний вектор, перпендикулярний до площини  $(x, y)$  і спрямований уздовж осі  $z$ .

Зі співвідношення (48) для гнutoї криволінійної границі  $\ell_1$  матимемо

$$\begin{cases} \vec{n} = \frac{-\vec{i} f'_x + \vec{j}}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}; \\ \vec{\tau} = \frac{\vec{i} + \vec{j} f'_x}{\sqrt{1 + (f'_x)^2}}, \end{cases} \quad (49)$$

де  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  – орти декартової системи координат  $(x, y)$ ;  $f'_x = df(\tilde{x})/d\tilde{x}$ . Зазначимо, що пара векторів  $(\vec{n}, \vec{\tau})$  орієнтована таким чином, щоб при безперервному русі вона збіглася з ортами  $(\vec{i}, \vec{j})$ . На опуклій криволінійній границі  $\ell_2$  знаки в співвідношенні (49) повинні бути змінені на зворотні. Нормальна й тангенціальна складові вектора  $\vec{p}_n$  визначаються зі співвідношень

$$\begin{cases} \tilde{p}_n = (\vec{n} \cdot \vec{p}_n) = n_x \tilde{p}_{nx} + n_y \tilde{p}_{ny}; \\ \tilde{p}_{n\tau} = (\vec{\tau} \cdot \vec{p}_n) = \tau_x \tilde{p}_{nx} + \tau_y \tilde{p}_{ny}. \end{cases} \quad (50)$$

Усі величини у правих частинах рівнянь (50) визначені з формул (46)...(49).

Усі алгоритми реалізовано у вигляді пакету підпрограм VISSIM, які за своїм призначенням можна умовно розділити на дві основні групи. До першої групи відносяться підпрограми, у яких реалізовано всі обчислювальні алгоритми:

- побудова адаптованої сітки;
- розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса;
- розв'язання рівнянь Пуассона;
- визначення напружень на поверхні, яка обтікається рідиною.

У другій групі об'єднано підпрограми графічного подання результатів у вигляді:

- ліній рівня скалярних полів з маркуванням локальних екстремумів;
- одновимірних графіків у заданому перерізі;
- поля напрямків векторних величин.

Пакет підпрограм графічної обробки розроблений на основі й за аналогією до універсального комплексу Графор [10].

Отримані результати (рис. 2-5) свідчать, що картина течії за поворотом характеризується наявністю відривної циркуляційної зони. При цьому з плином часу розміру вихрової (циркуляційної) зони зростає. Це супроводжується знесенням утворених вихорів у напрямку потоку.

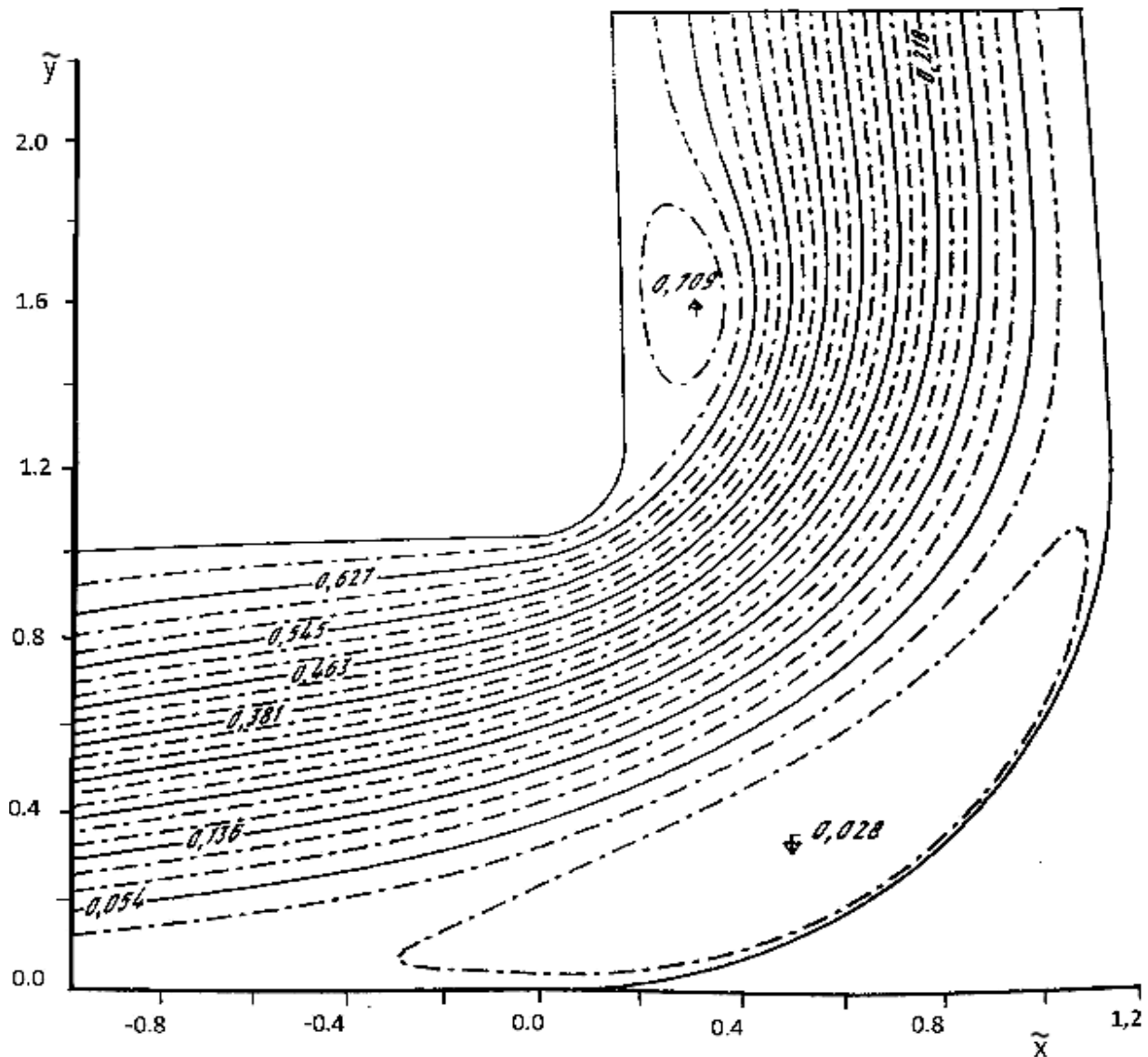
Зазначені закономірності цілком відповідають уявленням у гідродинаміці щодо особливостей обтікання опуклої криволінійної поверхні в'язкою рідиною [6].

Обтікання протилежної гнutoї поверхні також характеризується наявністю зони вихорів. Однак, на відміну від обтікання опуклої стінки утворення вихорів тут відбувається значно слабше.

Поле тисків у потоці  $\tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{y})$  для моменту часу  $\tilde{t} = 3$  подане на рис. 6 у вигляді ізобар. Зазначимо, що в розрахунках закладено базовий рівень тиску  $\tilde{p}_0 = 0$  у точці  $\tilde{x} = \tilde{y} = 0$ .

Як і слід було очікувати, області максимальних градієнтів тиску відповідає область інтенсивного утворення вихорів. Найбільш наочно це показано при аналізі розподілу тиску вздовж твердих стінок (рис. 7).

Розподіл тиску на гнutoї зовнішній стінці (крива 1) немонотонний, проте не відрізняється великими градієнтами впродовж стінки. Однак, у цьому випадку спостерігається відрив потоку в області, де  $\partial \tilde{p}_{w1} / \partial \ell > 0$  (рис. 4).

Рис. 2. Лінії рівня функції течії  $\tilde{\psi}$  в момент часу  $\tilde{t} = 1,5$ 

Абсолютно інший характер має розподіл тиску на іншій стінці (крива 2 на рис. 7). Він відрізняється значними за абсолютною величиною градієнтами тиску  $\partial \tilde{p}_{w2} / \partial \ell$ . Наявність двох ділянок, де  $\partial \tilde{p}_{w2} / \partial \ell \gg 0$  вказує на відрив потоку в цій області.

Аналогічним чином можна моделювати плоскі канали різної форми та розмірів. Розподіл тиску дозволяє виявити зони, де при нестачі гідростатичного тиску виникатиме кавітація. Це призводить до генерування шуму, вібрацій і, як результат, виникненням механічних пошкоджень. У разі виявлення подібних явищ необхідно оптимізувати форму каналу або підвищити гідростатичний тиск.

З іншого боку, модель дозволяє оптимізувати форму каналів теплообмінника

зادля збурення течії, що призводить до інтенсифікації теплообміну.

**Висновки.** Розглянута математична модель та схема її розв'язання дозволяють описувати рух рідини в плоских каналах теплообмінних апаратів та інших машин і пристроїв. Отримані результати моделювання відповідають сучасним уявленням гідродинаміки. Модель дозволяє візуалізувати застійні циркуляційні зони та виявити зони розрідження, де при достатній температурі та нестачі гідростатичного тиску може виникнути кавітація. Результати дозволяють оптимізувати геометричну форму каналів як задля мінімізації збурення потоку і зменшення втрати тиску, так і для штучного збурення течії та інтенсифікації теплообміну.

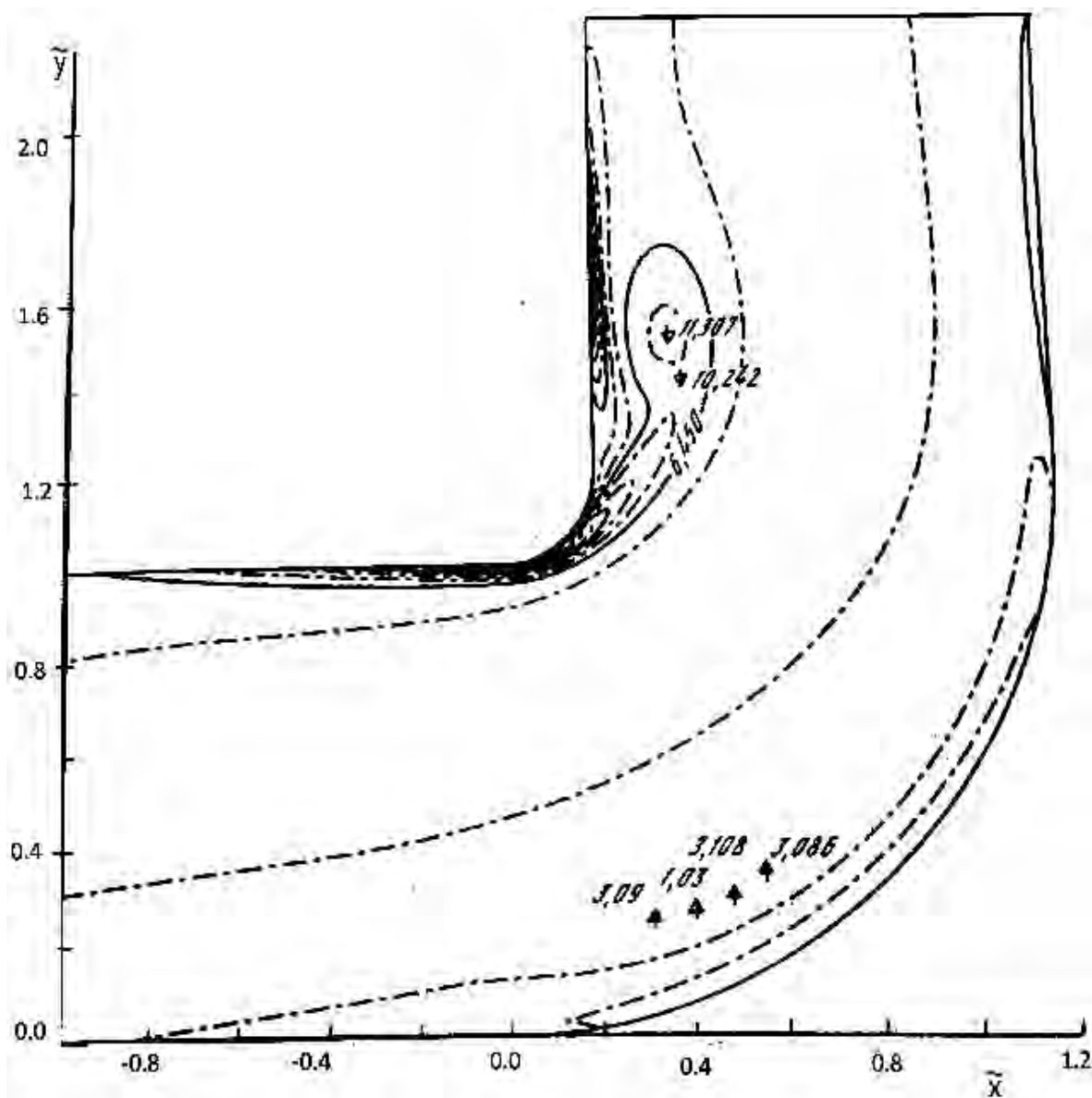


Рис. 3. Лінії рівня завихреності  $\tilde{\omega}$  в момент часу  $\tilde{t} = 1,5$

### Література

1. Пасконов В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. – Москва: Наука, 1984. – 288с.
2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – Москва: Мир, 1980. – 616с.
3. Белоцерковский О. М. Вычислительный эксперимент: прямое численное моделирование сложных течений газовой динамики на основе уравнений Эйлера, Навье-Стокса и Больцмана / О. М. Белоцерковский. – В кн.: Численные методы в динамике жидкостей. – Под ред. Вирц Г., Смолдерен Ж. М. – Москва: Мир, 1981. – 407с. – С.348-398.
4. Thompson J.F. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies / J.F. Thompson, F.C. Thames, C.W. Mastin // Journal of Computational Physics, 1974. – Vol.15. – Iss. 3. – P. 299-319.
5. Thompson J.F., Thames F.C., Mastin C.W. TOMCAT – a code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems of fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies / J.F. Thompson, F.C. Thames, C.W. Mastin // Journal of Computational Physics, 1977. – Vol. 24. – Iss. 3. – P. 274-302.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1969. – 742с.

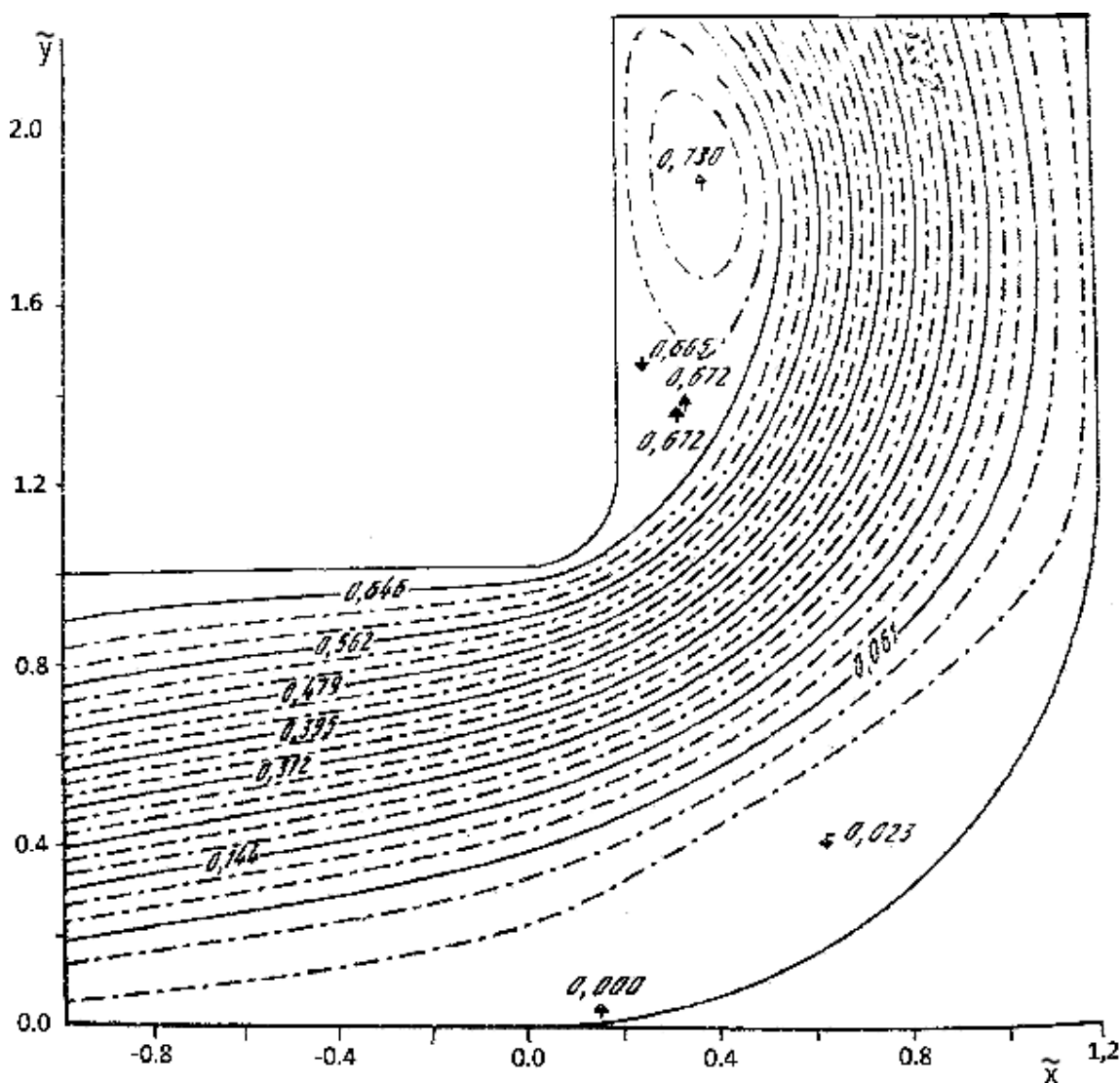


Рис. 4. Лінії рівня функції течії  $\tilde{\psi}$  в момент часу  $\tilde{t} = 3$

7. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон. – Москва: Мир, 1972. – 418 с.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – Москва: Наука. 1977. – 456 с.
9. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1955. – 519 с.
10. Базаров С. Б. Графор. Графическое расширение фортрана [Электронный ресурс] / Ю. М. Баяковский, С. Б. Базаров. – 2002. – Режим доступа: [https://www.graphicon.ru/oldgr/grafor/gr\\_help/main.htm](https://www.graphicon.ru/oldgr/grafor/gr_help/main.htm)

#### References

1. Paskonov V.M., Polezhayev V.I., Chudov L.A. Chislennoye modelirovaniye protses sov teplo- i massoobmena. Nauka, 1984.
2. Rouch P. Vichislitel'naya gidrodinamika. Mir, 1980.
3. Belotserkovskii O. M. Vychislitel'nyy eksperiment: priamoe chislennoe modelirovaniye slozhnykh techenii gazovoi dinamiki na osnove upravlenii Eilera, Nave-Stoksa i Boltsmana. V kn.: Chislennyye metody v dinamike zhidkostei. Mir, 1981. P. 348-398.
4. Thompson J.F., Thames F.C., Mastin C.W. "Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies". Journal of Computational Physics. 1974. Vol.15, Iss. 3. P. 299-319.

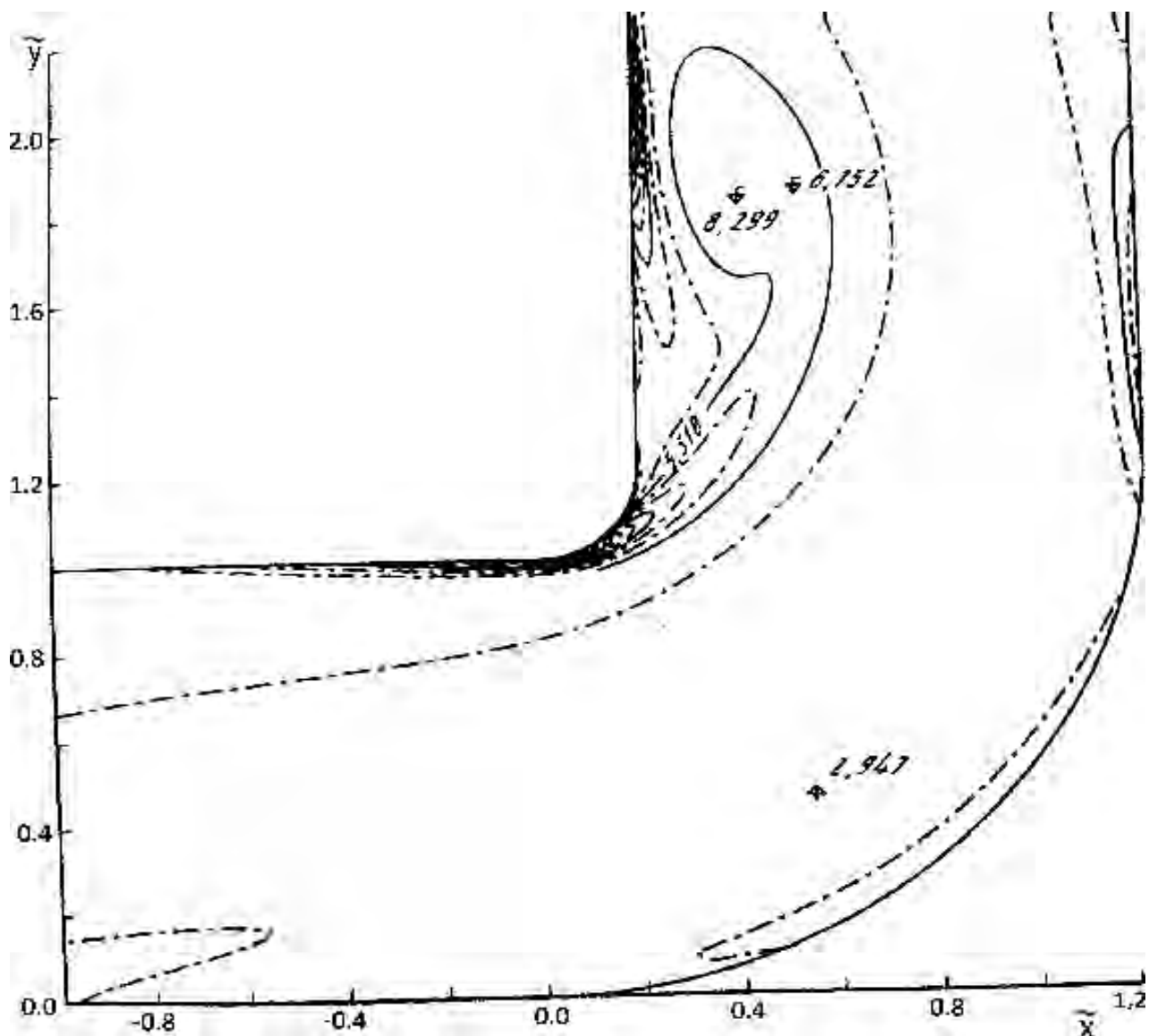


Рис. 5. Лінії рівня завихреності  $\tilde{\omega}$  в момент часу  $\tilde{t} = 3$

5. Thompson J.F., Thames F.C., Mastin C.W. "TOMCAT – a code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems of fields containing any number of arbitrary two-dimensional bodies". Journal of Computational Physics. 1977. Vol. 24, Iss. 3. P.274-302.

6. Shlikhting G. Teoriya pogranichnogo sloia. Nauka, 1969.

7. Rikhtmayyer R., Morton K. Raznostnye metody resheniia kraevykh zadach Mir, 1972.

8. Marchuk G.I. Metody vychislitelnoi matematiki. Nauka. 1977.

9. Slezkin N.A. Dinamika viazkoi neszhimaemoi zhidkosti. Gostekhteorizdat, 1955.

10. Bazarov S. B., Baiakovskii Yu. M., Grafor. Graficheskoe rasshireniie fortrana. 2002. [https://www.graphicon.ru/oldgr/grafor/gr\\_help/main.htm](https://www.graphicon.ru/oldgr/grafor/gr_help/main.htm)

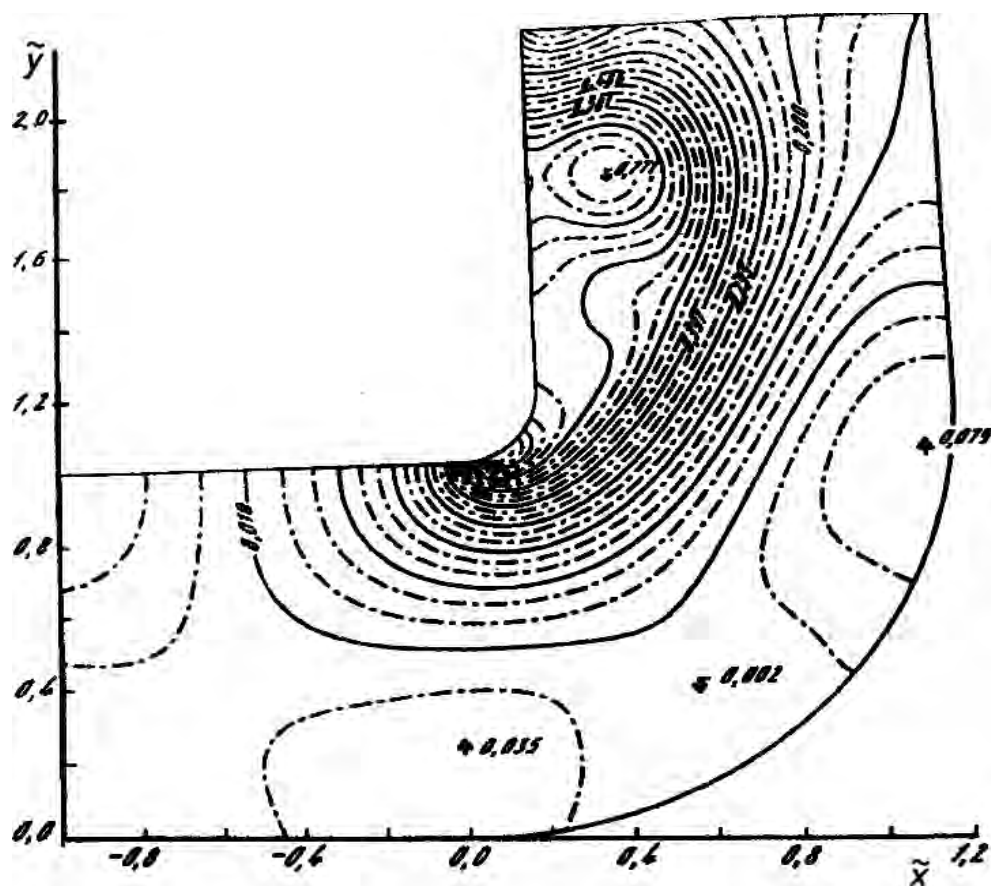


Рис.6. Поле тисків у потоці для моменту часу  $\tilde{t} = 3$

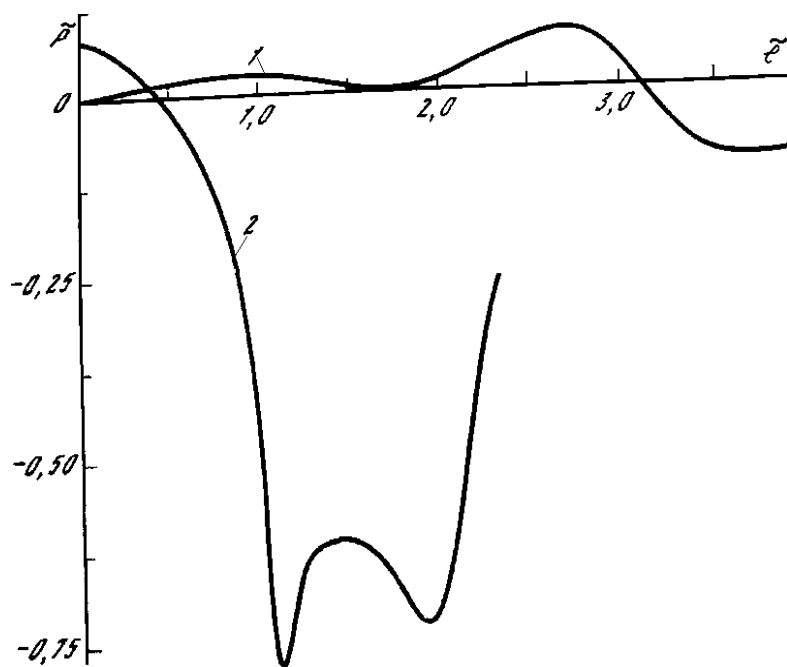


Рис.7. Розподіл безрозмірного тиску за безрозмірною довжиною  $\tilde{\ell} = \ell/L$  опуклої та гнutoї стінок, де  $\ell$  – довжина відповідної стінки, м: 1 – гнута стінка; 2 – опукла стінка

УДК 532.542.1

## Численное моделирование нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоских каналах произвольной формы теплообменных аппаратов

Ю. В. Човнюк<sup>1</sup>, В. Т. Кравчук<sup>2</sup>, А. С. Москвитина<sup>3</sup>, И. А. Пефтева<sup>4</sup>

<sup>1</sup>к.т.н., доц. Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев, Украина, [ychovnyuk@ukr.net](mailto:ychovnyuk@ukr.net),  
ORCID: 0000-0002-0608-0203

<sup>2</sup>к.т.н., доц. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, [vtkl@ukr.net](mailto:vtkl@ukr.net),  
ORCID: 0000-0002-5213-3644

<sup>3</sup>асист. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, [moskvitina.as@knuba.edu.ua](mailto:moskvitina.as@knuba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0003-3352-0646

<sup>4</sup>асист. Киевский национальный университет строительства и архитектуры, г. Киев, Украина, [piefteva.io@knuba.edu.ua](mailto:piefteva.io@knuba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0002-8858-9010

*Аннотация. В данной работе описан общий метод численного решения задачи о нестационарном течении вязкой несжимаемой жидкости ((поли)этиленгликоль, глицерин) в плоских каналах произвольной формы теплообменных аппаратов. Одной из основных проблем численного решения задач математической физики является представление граничных условий для областей произвольной формы. Эффективное решение задачи достигается путём применения адаптивных сеток. Для этого находится такая система координат, не обязательно ортогональная, в которой граничные линии или поверхности расчётной области совпадают с координатными линиями или поверхностями. Математическая модель течения базируется на двухмерных уравнениях Навье-Стокса в переменных «функция течения – вихрь» и уравнении Пуассона для давления, которые решаются на основе конечно-разностного метода. Проведено численное моделирование потока жидкости в плоском криволинейном колене теплообменного аппарата при числе Рейнольдса  $Re = 1000$ . Данная форма соответствует наиболее характерным особенностям проточных частей различных теплообменных аппаратов, гидравлических машин, гидравлических и трубопроводных систем. Представление численных результатов осуществлено на основе пакета подпрограмм графической обработки VISSIM.*

*Ключевые слова:* численное моделирование, нестационарное течение, вязкая несжимаемая жидкость, плоский канал, теплообменный аппарат, уравнение Навье-Стокса, уравнение Пуассона, метод адаптивных сеток.

UDC 532.542.1

## Numerical simulation of unsteady flow of a viscous incompressible liquid in flat channels of arbitrary shape of heat exchangers

Yu. Chovniuk<sup>1</sup>, V. Kravchuk<sup>2</sup>, A. Moskvitina<sup>3</sup>, I. Peftewa<sup>4</sup>

<sup>1</sup>PhD, associate professor. National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, [ychovnyuk@ukr.net](mailto:ychovnyuk@ukr.net),  
ORCID: 0000-0002-0608-0203

<sup>2</sup>PhD, professor. Kyiv National University of Construction and Architecture. Kyiv, Ukraine, [vtkl@ukr.net](mailto:vtkl@ukr.net),  
ORCID: 0000-0002-5213-3644

<sup>3</sup>Assistant. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, [moskvitina.as@knuba.edu.ua](mailto:moskvitina.as@knuba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0003-3352-0646

<sup>4</sup>Assistant. Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine, [piefteva.io@knuba.edu.ua](mailto:piefteva.io@knuba.edu.ua),  
ORCID: 0000-0002-8858-9010

*Abstract. Reasonable development and creation of any device in which there is an interaction between the fluid flow and the elements of the flow parts (for example, heat exchangers, transport and power machines, main pipelines), is impossible without detailed information about the characteristics of the flow, about the forces on the surfaces that are around, about vibroacoustic phenomena, etc. Among the various methods of obtaining information about the characteristics of the flow, about the forces on surfaces that are flown around, about vibroacoustic phenomena, an important role is played by theoretical methods that rely on the equation of hydrodynamics and numerous ways to solve them. In this case, the main efforts are aimed at solving the system of Navier-Stokes equations. In this paper, a general method is described for the numerical solution of the problem of unsteady flow of a viscous incompressible fluid in flat channels of an arbitrary shape of heat exchangers. An effective solution to the problem is achieved by using adaptive networks. The mathematical model of the flow is based on the two-dimensional Navier-Stokes equations in the variables "flow function - vortex" and the Poisson*

equation for pressure, which are solved on the basis of the finite-difference method. A numerical simulation of the fluid flow in a flat curvilinear elbow is carried out at the Reynolds number  $Re = 1000$ . This form reflects the most characteristic features of the flow paths of various hydraulic machines, heat exchangers, hydraulic and pipeline systems. The presentation of the numerical results was carried out on the basis of the VISSIM graphic processing package. One of the main problems (difficulties) in the numerical solution of problems of mathematical physics is the representation of boundary conditions for regions of arbitrary shape. The implementation of various artificial methods that are now used in the approximation of both the curvilinear boundaries themselves and the boundary conditions on them can lead to significant losses in the accuracy of the solution. This is especially evident in problems in which solutions in the boundary region have maximum gradients. An effective method for solving this problem is the use of adapted grids for the computational domain. The essence of this method lies in the fact that such a coordinate system, not necessarily orthogonal, is found in which the boundary lines (surfaces) of the region coincide with the coordinate lines (surfaces). In the flat case, the computational domain is transformed into a rectangular one, and the limit curve is displayed on the sides of the rectangle. In practice, the problem of constructing an adapted mesh is reduced to finding functions that describe the mappings of the canonical (rectangular) region onto the region for which the problem was originally formulated, that is, for the two-dimensional case, the functions  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$  are determined.

*Keywords: numerical modeling, unsteady flow, viscous incompressible fluid, flat channels, heat exchanger, Navier-Stokes equations, Poisson equation, adaptive mesh method.*

Надійшла до редакції / Received 08.09.2020.