

УДК 681.2.531.7(045)

В.П. КВАСНИКОВ, Т.М. ХАЕЙН

Національний авіаційний університет

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОХИБКИ ВИМІРЮВАННЯ КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНИХ МАШИН

*В статті запропонована стохастична, параметрична конструктивна математична модель похибки вимірювання координатно-вимірювальними машинами, яка базується на принципах варіаційного методу розрахунку похибки механічних пристроїв з урахуванням випадкової складової і при цьому наводиться розклад сумарної вибіркової дисперсії на складові, обумовлені незалежними факторами. Дана модель враховує стохастичну природу випадкових складових і побудована на основі експериментально-статистичного підходу.*

*Ключові слова:* координатно-вимірювальна машина, математична модель, дисперсійний аналіз.

V.P. KVASNIKOV, T.M. HAEIN

National aviation university

## MEASUREMENT ERROR MATHEMATICAL MODEL OF COORDINATE MEASURING MACHINES

*In article is proposed a stochastic, parametric, constrictive mathematical model of coordinate measuring machine measurement error, this based on a method of components uncertainty analysis in measurements. The proposed method combined standard uncertainty to take into account the environmental influence on the machine structure. Proposed model considers stochastic phenomena of random components and was modeled using a experimental-statistical method of approach.*

*Key words:* coordinate measuring machine, mathematical model, regression analysis.

### Постановка задачі

При розробці сучасної методики метрологічної атестації координатно-вимірювальних машин (КВМ) важливим завданням є створення спеціалізованого програмного забезпечення, яке ґрунтується на відповідних математичних моделях похибки вимірювання КВМ. Від обраної математичної моделі значною мірою буде залежати точність і достовірність результатів атестації КВМ.

При атестації КВМ похибка вимірювання координат може бути визначена розрахунковим шляхом, при відомих значеннях складових похибки або при повірці засобів вимірювання за допомогою еталонів [1]. Враховуючи те, що вимоги до точності, правильності і збіжності вимірювання КВМ постійно зростають [2-4], використання стандартних методів побудови математичної моделі і аналізу впливу факторів зовнішнього середовища на похибку КВМ ускладнено. Природа такого впливу стохастична, її складно інтерпретувати з позиції логічного аналізу, спираючись суто на детермінований підхід. Тому доцільно буде будувати математичну моделі як композицію детермінованих і стохастичних складових, використовувати експериментально-статистичний підхід.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Математичній моделі похибки вимірювання на КВМ присвячено ряд робіт як вітчизняних так і зарубіжних авторів, в яких описані основні способи побудови багатофакторних математичних моделей.

В дослідженнях А. Ферреро і С. Саліконе [2] використовують метод моделювання Монте Карло, який хоча і є досить ефективним і простим у застосуванні при рішенні задач моделювання, але не достатньо точний для прецизійних вимірювань. Основний недолік полягає у визначенні об'єму вибірки, тобто кількості точок вимірювання, необхідних для забезпечення рішення із заданою точністю. Збільшення точності в 10 разів приводить до збільшення об'єму вибірки в 100 разів. Ряд досліджень присвячені дослідженню застосування математичного моделювання використовуючи метод скінченних елементів для оцінки характеристик точності КВМ, але даних метод укладений вимогами до програмно-обчислювального забезпечення, так як сучасне моделювання передбачає використання досить потужних ЕОМ.

Обґрунтування методів стійкого оцінювання структури і коефіцієнтів багатофакторних статистичних моделей і доцільність використання регресійного аналізу в своїх роботах обґрунтовує вітчизняний науковець С. Г. Радченко [5]. Як відзначалося в роботі [6] на величину похибки вимірювання КВМ діють низка дестабілізуючих факторів, і виділити її випадкову складову можливо за допомогою обчислень засобами теорії ймовірності. Науковці М. Франке і Г. Швенке (Німеччина) в роботі [3], відповідно до стандартів ISO/TS 14253-2:1999 §9.3.10 і ИСО/ТУ 21748:2004 [4], пропонують групувати в представляти дані про дестабілізуючі фактори в табличній формі - формувати бюджет похибок.

Необхідно розробити стохастичну, параметричну конструктивну математичну модель похибки вимірювання на КВМ, з врахуванням:

- особливостей об'єкту вимірювання;
- стохастичної природи випадкових складових, і як результат має проводитись аналіз впливу дестабілізуючих факторів на вимірювальний процес;
- експериментально-статистичного підходу;

- оцінювання і ранжування таких факторів, для зручності подальшого аналізу (діаграма Парето) [6];
- доступність для розуміння фахівця запропонованої інтерпретації;
- універсальність розробленої математичної моделі;

Використання суто теоретичних методів аналізу впливу дестабілізуючих факторів на похибки вимірювання КВМ ускладнено. Характер впливу досить складний, нестабільний, важко інтерпретований з позицій логічно-професійного аналізу фахівцями; змінний при переході від екземпляру до екземпляру одного й того ж типу засобів вимірювальної техніки [5,6,7].

### Результати дослідження

Математична модель досліджуваного процесу будується на основі експериментального визначення вхідних впливів і відгуків. Враховуючи, що методом отримання моделі є апроксимація даних і структура моделей в загальному випадку не відома, оптимальним рішенням для вибору класу апроксимуючих моделей буде лінійна відносно параметрів модель.

Для зручності візуального аналізу і оптимізації методів усереднення вимірювальних результатів лінійно-кутових параметрів складових частин повірочної плати КВМ, і з метою виділення їх еталонних контурів, найбільш зручним є спосіб представлення результатів вимірювання в полярній системі координат. Під математичною моделлю загальної похибки КВМ будемо розуміти детерміновану відносно параметрів і стохастичну відносно неконтрольованих факторів зовнішнього середовища модель довільно високої, але скінченної складності. Систему, з якої проводять експеримент, розглядають як складну систему. В ній розрізняють керовані (вхідні), контрольовані, неконтрольовані і критерії якості (вихідні) [6,7]. Методологія оцінки цих складових спирається на прийнятту систему нормування метрологічних характеристик, яка викладена в [4,6]. Розрахунок похибок оснований на припущенні лінійної залежності складової похибки від відхилення і відсутності їх взаємодії.

На рисунку 1 наведено схематичне зображення траєкторії руху вимірювальної головки КВМ, в свою чергу в нашому дослідженні розробляється комплексна плата для проведення метрологічної атестації КВМ, яка включає в себе ряд каліброваних об'єктів, частина такої плати в перерізі показана на рисунку 2.

Дискретний обхід поверхні вимірювального об'єкту пропонує вимірювання деталі в окремих точках з підходом вимірювального наконечника по нормалі до її поверхні.

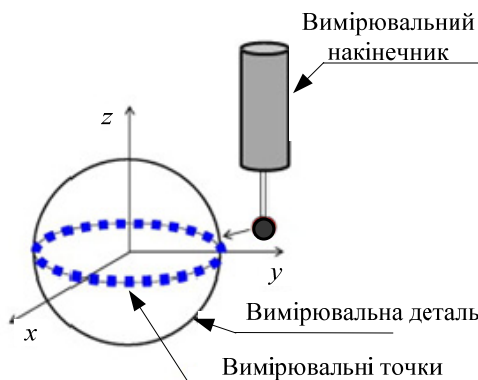


Рис.1. Схематичне зображення траєкторії руху вимірювальної головки координатно-вимірювально-машини

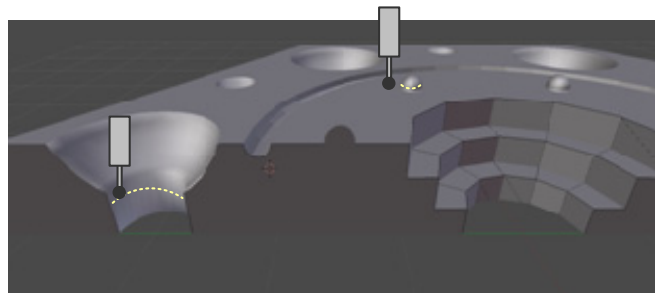


Рис.2. Схематичне зображення траєкторії руху вимірювальної головки координатно-вимірювально-машини при вимірюванні каліброваних об'єктів запропонованої повірочної плати

Перерахунок координат вектора  $\mathbf{r}$  з декартової системи в полярну виконується відповідно до формул:

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{C^2 + S^2}, \quad (1)$$

де  $\varphi_c$  - кут повороту; відповідно  $C = r \cos \varphi_c$ , а  $S = r \sin \varphi_c$ .

Вимірювання виконуються з певним кроком  $\frac{2\pi}{m}$ . Дискретному характеру результатів вимірювань відповідає розбиття кола на  $m$  клас-інтервалів.

Припустимо, що процес породження  $i$ -го фрагменту ( $i=1, \dots, K_F$ ) кожного  $m$ -го циклу здійснюється на основі операторного перетворення

$$y_m^i(t) = a_m y_0^{(i)}(t) \left( \frac{t - \tau_m^{(i)}}{b_m^i} \right), \quad (2)$$

де  $a_m b_m^{(i)}$  - параметри лінійного розтягування (стиснення) по полярним координатам;

$\tau_m^{(i)}$  - вимірювальний крок (зсув).

На рисунку 3 представлене графічне зображення формування результатів вимірювання в полярній системі координат.

Представимо, що в межах кожного  $m$ -го циклу параметр  $a_m$  приймає фіксоване значення

$$a_m = 1 + \xi_m \quad (3)$$

де  $\xi_m$  – послідовність реалізацій незалежних випадкових величин, які з нульовим математичним сподіванням  $M\{\xi\} = 0$  розподілені на інтервалі  $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ , обмеженим фіксованим числом  $\varepsilon_0 \in [0, 1)$ .

З іншого боку будемо вважати, що параметр  $b_m^{(i)}$  приймає фіксоване значення в процесі породження кожного окремого  $i$ -го фрагменту  $m$ -го циклу вимірювання.

$$b_m^{(i)} = 1 + \delta_m^{(i)} \quad (4)$$

де  $\delta_m^{(i)}$  – послідовність реалізацій незалежних випадкових величин, котрі з нульовим математичним сподіванням  $M\{\xi\} = 0$  розподілені на інтервалі  $[-\Delta_0^{(i)}, \Delta_0^{(i)}]$ , обмеженим фіксованим числом  $\Delta_0^{(i)} \in [0, 1)$ .

Застосуємо до  $i$ -го фрагменту  $y(t)$  операторне перетворення (2), взявши параметр зсуву  $\tau_m^{(i)} = t_m^{(i-1)} - (1 + \delta_m^{(i)})t_0^{(i-1)}$ . Тоді з (1) з врахуванням співвідношень (3) і (4) випливає, що процес породження  $i$ -го фрагменту на  $m$ -му циклі можна представити у вигляді моделі

$$y_m^{(i-1)}(t) = (1 + \xi_m)y_0^{(i)}(\theta),$$

де

$$\theta = \frac{t - (m-1)T_0 + (1 + \delta_m^{(i)})t_0^{(i-1)} - \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i01}^{K_F} (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)})\delta_j^{(i)} - \sum_{i=1}^{m-1} (t_0^{(i)} - t_0^{(i-1)})(1 + \delta_m^{(i)})}{1 + \delta_m^{(i)}}.$$

Специфічні особливості отримання математичних моделей на основі експериментально-статистичного підходу [5,6], такі, що математична модель повинна характеризуватися групою критеріїв якості. Для кожної з  $m$  виділених множин відліків  $\{z_k\}$ ,  $k = \overline{1, m}$  знаходимо довжину усередненого вектора:

$$\bar{z}_k = \sqrt{\left( \sum_{k=1}^{n_k} |z_k| \cdot \cos \left[ \arg(z_k) \right] \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^{n_k} |z_k| \cdot \sin \left[ \arg(z_k) \right] \right)^2} \cdot \frac{1}{n_k}$$

де  $n_k$  – кількість точок в одному  $k$ -му секторі.

Наведемо критерії якості математичної моделі, а саме вибіркові характеристики [8] для середнього зсуву та його дисперсії:

1. Вибіркове кругове середнє фазових зсувів (рад)

$$\varphi_c = \left\{ \arctg \frac{C}{S} + \frac{\pi}{2} \{ 2 - (\text{sign} S) \times \right. \\ \left. \times [1 + \text{sign} C] \} \right\} \bmod 2\pi;$$

$$C = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos \varphi_c; \quad S = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin \varphi_c$$

2. Вибіркова кругова дисперсія фазових зсувів  $V$

$$V = 1 - r$$

3. Вибіркова довжина результуючого вектора  $r$

$$r = \sqrt{C^2 + S^2}$$

Завдання експериментальних точок в ортогональній системі координат, крім незручності інтерпретації, не дозволяє отримати ортогональні властивості коефіцієнтів моделі, які описують простір вимірювального об'єкту KBM. Перехід до полярної системи координат з використанням в якості факторів

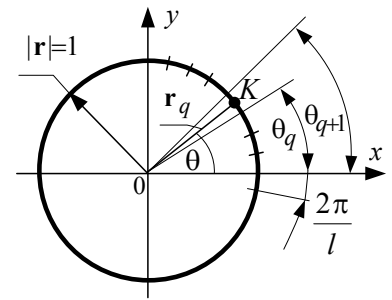


Рис. 3. Графічне зображення результатів спостережень на колі

радіус-вектора  $\rho$  і кута повороту  $\varphi$  дозволяє формалізувати положення довільної точки всередині і на границях каналу [5] і представити в плані експерименту ці точки за схемою повного факторного експерименту або у вигляді багатфакторного регулярного плану. Тим самим задовольняються найліпші інформаційні властивості отримуваних моделей. В полярній системі координат в якості факторів використовується радіус  $\rho$  - фактор  $X_1$  і кут повороту  $\varphi$  - фактор  $X_2$ .

Схема повного факторного експерименту реалізує всі можливі поєднання рівнів факторів

$$s_1, s_2 \dots s_k = N_p,$$

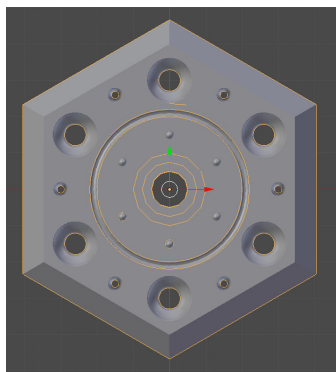
де  $s_1, s_2 \dots s_k$  - число рівнів по схемі повного факторного експерименту.

$N_p$  - число дослідів по схемі повного факторного експерименту.

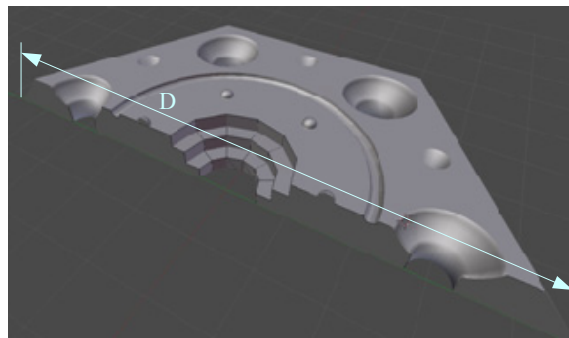
Матриці планів експериментів наведені в таблиці 2, а також результати розрахунків середньоквадратичних відхилень для кожної групи дослідів і для кожного досліджуваного фактору.

#### Експериментальні результати

Для проведення експерименту по визначенню залежності похибки вимірювання КВМ від зовнішніх дестабілізуючих впливів необхідно визначитись з вибором об'єкту вимірювання. В якості об'єкту вимірювання використовуємо зразкову плату, одним з геометричних параметрів якої є довжина діагоналі  $D = 640$  см. При проведенні експерименту був застосований нульовий метод вимірювання за яким вимірювання лінійного розміру проводиться шляхом підводу вимірювального наконечника вимірювальної головки КВМ до точки вимірювання на повірочній платі вздовж координати, що представлено на рисунку 4.



а)



б)

Рисунок 4. а) Повірочна плата; б) Повірочна плата в перерізі з позначеним досліджуваним параметром - діагоналлю

Для отримання багатфакторної математичної моделі з досліджуваними факторами «Температура», введемо умовне позначення  $X_1$ , з рівнями 14°C, 17°C, 20°C, 22°C, 30°C, 32°C, 34°C, 36°C, «Відносна вологість» введемо умовне позначення  $X_2$ , з рівнями 40%, 50%, 55%, 60%, 62%, 65%, 67%, 70%.

Для кожного фактору проводимо по 11 дослідів, що обумовлено числом досліджуваних факторів і їх рівнів [6]. Оскільки кількість дослідів для кожного рівня є рівною, доцільно використати критерій за G-критерієм Кохрена, для рівня значимості  $\rho = 0,05$ , загальної кількості дослідів  $N = 88$ , і степені вільності  $f_1 = 7$ ,  $f_2 = 10$ . Результати перевірки дисперсії дослідів на адекватність на однорідність наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Дисперсія відтворюваності	Середньоквадратичне відхилення	Апостеріорне значення G-критерію	Критичне значення G-критерію (апостеріорне)	Висновок
<b>Фактор <math>X_1</math></b>				
1,1799	1,0862	1,84E-07	0,04	дані однорідні
<b>Фактор <math>X_2</math></b>				
1,1312	1,0635	1,21E-07	0,04	дані однорідні

Експериментальні значення критерію Кохрена менші за критичні, для рівня значимості  $\rho = 0,05$ , а це значить, що міра розсіювання результатів повторних дослідів є однаковою, всі дисперсії є однорідними, а значить можуть бути усереднені.

Враховуючі прийняті рівні варіювання фактору проведемо повний факторний експеримент а декартовій системі координат. Результати розрахунків середньоквадратичних відхилень для кожної групи

дослідів для кожного фактору зведені до таблиць 2 і 3.

Таблиця 2

Групи (Рівні)	Кількість вимірювань в кожній групі	Сума елементів	Середнє значення	Середньоквадратичне відхилення
<b>Фактор <math>X_1</math></b>				
14°C	11	7039,17	639,924545	4,7273E-05
17°C	11	7040,34	640,030909	0,00508909
20°C	11	7039,94	639,994545	0,01240727
22°C	11	7040,16	640,014545	0,00226727
26°C	11	7046,89	640,626364	0,51652545
32°C	11	7040,16	640,014545	0,20584727
34°C	11	7037,84	639,803636	0,17014545
36°C	11	7003,32	636,665455	8,52730727
<b>Фактор <math>X_2</math></b>				
40%	11	7039,91	639,99182	0,08804131
50%	11	7040,35	640,03182	0,22076396
55%	11	7040,04	640,00364	0,57686015
60%	11	7039,97	639,99727	0,24521308
62%	11	7039,96	639,99636	1,45372137
65%	11	7040,16	640,01455	0,4704122
67%	11	7041,6	640,14545	1,24140844
70%	11	7055,88	641,44364	2,5820176

У випадку багатофакторного дисперсійного аналізу вивчається наявність чи відсутність впливу на результуючий показник запропонованих фактору, в даному випадку впливу температури зовнішнього середовища і відносної вологості на результат вимірювання KBM. Тому проведемо перевірку на статистичну значимість досліджуваних факторів, застосовуючи критерій Фішера, розрахункова формула для якого наведена в [5, 6]. Результати розрахунків зведені до таблиці 3.

Таблиця 3.

Джерело дисперсії	Сума квадратів	Число ступенів вільності $f$	Середній квадрат	F-критерій Фішера апостеріорний	$p$ -значення апостеріорне	F-критерій Фішера апріорний ( $p = 0,05$ )
<b>Фактор <math>X_1</math></b>	115,3613	7	16,4802	13,96681	1,0765E-11	2,1263
Залишок	94,3964	80	1,1799			
Загальна сума	209,7577	87				
<b>Фактор <math>X_2</math></b>	19,5434	7	2,7919	2,47	0,0240387	2,1263
Залишок	90,4876	80	1,1311			
Загальна сума	110,0311	87				

Результати проведених дослідів і аналіз математичної моделі показали, що рівень впливу дестабілізуючих факторів таких як «Температура» і «Вологість» є суттєвими, що вказує на необхідність врахування даних факторів для розрахунку загальної вимірювальної непевності результатів вимірювання при проведенні метрологічної атестації KBM.

### Висновки

В статті запропонована стохастична, параметрична конструктивна математична модель похибки вимірювання координатно-вимірювальними машинами, яка базується на принципах варіаційного методу розрахунку похибки механічних пристроїв з урахуванням випадкової складової і при цьому наводиться розклад сумарної вибіркової дисперсії на складові, обумовлені незалежними факторами.

Обґрунтовані критерії якості математичної моделі, а саме вибіркові характеристики для середнього зсуву та його дисперсії: вибіркоче кругове середнє фазових зсувів, вибіркова кругова дисперсія фазових зсувів, вибіркова довжина результуючого вектора. За допомогою математичної моделі загальної похибки вимірювання можна проаналізувати вплив досліджуваних факторів.

Дана модель враховує стохастичну природу випадкових складових і побудована на основі експериментально-статистичного підходу. Результати моделювання і порівняльний аналіз свідчать, що

запропонований спосіб представлення лінійно-кутових вимірювань в полярній системі координат забезпечує досягнення підвищення точності вимірювання.

### Література

1. Координатно-измерительные машины и их применение / [Гапшис В.-А. А., Каспарайтис А. Ю., Модестов М. Б. и др.]. — М. : Машиностроение, 1988. — 328 с.
2. Ferrero A.A Comparative Analysis of the Statistical and Random-Fuzzy Approaches in the Expression of Uncertainty in Measurement. / A. Ferrero, S. Salicone // IEEE Transactions on instrumentation and measurement. : 2005. — № 4. — Volume 54. — P. 1475-1481.
3. Schwenke H. Bestimmung der Unsicherheit von Messungen mit KMG — Status und Ausblick / H. Schwenke, M. Franke // PTB-Mitteilungen. : 2007. — № 117. — Heft 4. — S. 364 – 371.
4. Руководство по использованию оценок повторяемости, воспроизводимости и правильности при оценке неопределённости измерений (перевод с англ.): ИСО/ТУ 21748:2004 — [Чинний від 19-11-2006]. — М. : Стандартинформ, 2004. — 72 с.
5. С. Г. Радченко Методология регрессионного анализа. Монография. — К.: Корнійчук, 2011. — 376 с.
6. Пирог Т. М. Аналіз розрахунку невизначеності вимірювального результату на координатно-вимірювальних машинах / Т. М. Пирог // Вісник інженерної Академії України. : — 2012 . — № 2 . — С. 253 – 255.
7. Пирог Т. Аналіз методики оцінки погрешностей измерения на координатно-измерительных машинах / Т. Пирог, В. Квасников // «Інформаційно-вимірювальні технології, технічне регулювання та менеджмент якості» : наук.-техн. конф. (16 грудня 2010р.): тези доп. — Одеса.: 2010. — С. 133-137.
8. Пирог Т. М. Виртуальный прибор «Генератор случайных углов» для статистических экспериментов со случайными углами в системе LabView. / Труды международной конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabView и технологии National Instruments - 2008» . М. : — 2008. — С. 161 – 166.

### References

1. Koordinatno-izmeritelnye mashyny / [Gapshys V.-A. A., Kasparaitis A. Ju., Modestov M. B. and other]. — M. : Mashinostroenie, 1988. — 328 s.
2. Ferrero A.A Comparative Analysis of the Statistical and Random-Fuzzy Approaches in the Expression of Uncertainty in Measurement. / A. Ferrero, S. Salicone // IEEE Transactions on instrumentation and measurement. : 2005. — № 4. — Volume 54. — P. 1475-1481.
3. Schwenke H. Bestimmung der Unsicherheit von Messungen mit KMG — Status und Ausblick / H. Schwenke, M. Franke // PTB-Mitteilungen. : 2007. — № 117. — Heft 4. — S. 364 – 371.
4. Rukovodstvo po ispolzovaniju otsenok povtoryaemosti, vosproizvodimost i pravilnosti pri otsenke neopredelennosti izmerenij. (translation from english): ISO/TU 21748:2004 — [Chynnyy vid 19-11-2006]. — M. : Standartinform, 2004. — 72 s.
5. S. G. Radchenko Metodologiya regressionnogo analiza. Monography. — K.: Kornijchuk, 2011. — 376 s.
6. Pyrog T.M. Analiz rozrachunku nevyznachenosti vymirjuvalnoho rezultatu na koordynatno-vymirjuvalnyh mashynah / T. M. Pyrog // Visnyk inzhenernoi Akademii Ukrainy. : — 2012 . — № 2 . — S. 253 – 255.
7. Pyrog T. Analiz metodyky ozenki pogreshnosti izmereniya na koordinatno-izmeritelnyh mashynah / T. Pyrog, V. Kvasnikov // «Informatsijno-vymirjuvalni tehnologii, technichne reguljuvannya ta menedzhment yakosti» : nauk.-techn. conf. (16 December 2010.): tezy dop. — Odesa.: 2010. — S. 133-137.
8. Pyrog T.M. Virtualnyi pribor «Generator sluchjnyh uglov» dlya statisticheskikh experimentov so sluchainymi uglamiv sisteme LabView. / Trudy mezhdunarodnoi konferentsii «Obrazovatelnye, nauchnye i inzhenernye prilozheniya v srede LabView i tehnologii National Instruments - 2008» . M. : — 2008. — S. 161 – 166.

Рецензія/Peer review : 23.7.2013 р.

Надрукована/Printed : 21.12.2013 р.