

УДК 004.925

О.Н. РОМАНЮК, О.В. МЕЛЬНИК  
Вінницький Національний технічний університет

## ОСОБЛИВОСТІ ГЕКСАГОНАЛЬНОЇ МОДЕЛІ ПІКСЕЛА

*Проаналізовано особливості гексагональної моделі піксела для використання в системах високореалістичної комп'ютерної графіки. Розглянуто розбиття гексагонального піксела на субпікселі.  
Ключові слова: антиаліайзинг, піксел, гексагональна модель піксела*

O.N. ROMANYUK, O.V. MELNYK  
Vinnitsia National Technical University

## PECULIARITIES OF A HEXAGONAL PIXEL MODEL

*Analysis of peculiarities the model hexagonal pixels for use in highly realistic computer graphics. Are considered a partition of hexagonal pixels per sub-pixel.*

*Keywords: Anti-aliaying, pixel, hexagonal pixel model*

## Вступ

Все частіше дослідники підтверджують переваги використання гексагональної решітки при формуванні та перетворенні зображень і застосування гексагональної моделі піксела в алгоритмах антиаліайзингу [1]. Переваги гексагональної моделі піксела перед традиційними в багатьох випадках дозволяють підвищувати реалістичність формування графічних зображень [2].

## Аналіз існуючих моделей піксела

Математична модель піксела безпосередньо визначає складність обчислення площі покриття, і, як наслідок, якість антиаліайзингу.

Розглянемо основні моделі пікселів, які використовуються в аналітичних методах.

Найбільше розповсюдження отримала модель, у якій піксел розглядається як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці. Центр квадрата збігається із центром піксела. Функція фільтра для даної моделі має такий вигляд [3]:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |x| \leq 0.5 \text{ та } |y| \leq 0.5; \\ 0, & \text{якщо } |x| > 0.5 \text{ та } |y| > 0.5. \end{cases}$$

Приведена модель на даний час найбільш поширена, оскільки при її використанні знаходження площі покриття не потребує значних обчислювальних витрат. У більшості пристроїв відображення інформації просторове розподілення інтенсивності світла, що випромінюється на екрані, не має форми квадрата, тому дана модель не забезпечує максимальної якості згладжування границь зображення.

Поширеною моделлю піксела є кругова модель. Піксел розглядається як скінченна область у формі кола з одиничним діаметром [3].

Відповідно до принципу крайового антиаліайзингу інтенсивність кольору точки встановлюється пропорційно до площі тієї частини піксела, яка відтинається ребром примітива [3].

Для пристроїв відображення, які використовують ЕПТ, більш адекватною є "гаусівська" модель [3].

Дана модель враховує, що інтенсивність світла, яке випромінює піксел, є максимальною в центрі та зменшується в напрямку до границі піксела і на відстані  $R$  дорівнює нулю. Обчислення інтенсивності кольору для такої моделі зводиться до обчислення об'єму фігури, яка утворюється в результаті перетину функції фільтра та границь примітива.

Для LCD моніторів у якості функції фільтра часто використовують функцію Хемінга вигляду:

$$F(x, y) = \begin{cases} \left( \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{W}\right) \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{W}\right) \right)^e, & \text{якщо } |x| \leq \frac{W}{2} \text{ та } |y| \leq \frac{W}{2}, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \frac{W}{2} \text{ та } |y| > \frac{W}{2} \end{cases}$$

де  $W$ ,  $e$  - параметри, які забезпечують настроювання моделі під конкретний пристрій відображення.

Оскільки моделі, які використовують функції Хемінга та Гауса [4], характеризуються відносно великими обчислювальними витратами, то їх використовують тільки у тих випадках, коли до якості крайового згладжування пред'являються досить жорсткі вимоги.

На практиці для фільтрації вибирають прості з обчислювальної точки зору функції і їх модифікують з метою отримання прийнятних зображень. Достатню якість для антиаліайзингу забезпечує „конусна” модель піксела, яка описується таким виразом:

$$F(x, y) = \begin{cases} H \left( 1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} \right), & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} < R; \\ 0, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \geq R. \end{cases}$$

де  $H$  - висота конуса, яку вибирають таким чином, щоб об'єм конуса дорівнював одиниці,  $R$  - радіус основи конуса. Дана модель є спрощеним варіантом „гаусівської” моделі, оскільки вона передбачає, що інтенсивність світла пікселя є максимальною в центрі і лінійно зменшується у напрямку до границі пікселя. Таке спрощення дозволяє зменшити обчислювальні витрати рис.1.

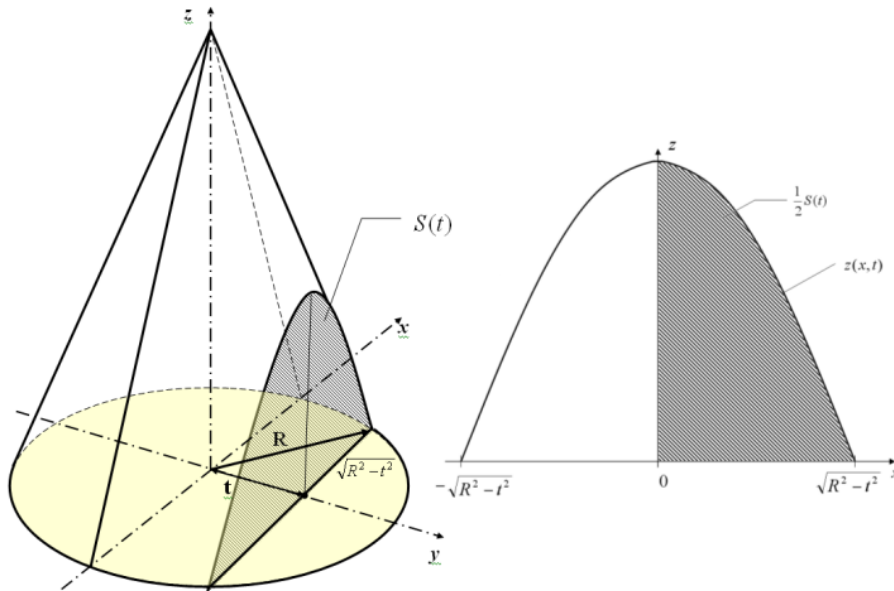


Рис.1. Знаходження об'єму, який відтинається від конуса ідеальною площиною

Альтернативною моделлю, яка забезпечує прийнятний компроміс між якістю антиаліазингу та обчислювальною складністю може бути гексагональна модель пікселя [5].

Метою даної статті є проаналізувати особливості гексагональної моделі пікселя для використання в системах високореалістичної комп'ютерної графіки.

#### Особливості гексагональної моделі пікселя

Серед фігур, які забезпечують максимальне заощення [6] екранної системи координат, є рівносторонній трикутник, квадрат і гексагон (рис. 2).

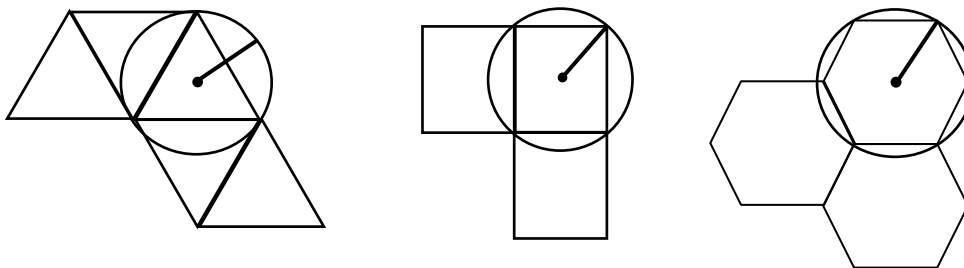


Рис. 2. Круг з радіусом R=1 і вписані в нього багатокутники які можуть заощувати площину

Піксел за своєю формою найбільше відповідає кругові. Проте, круг не є фігурою, що ідеально заощує площину, і до того ж при обчисленнях він є складною геометричною формою для реалізації розрахунків. Тому, потрібно знайти геометричну форму пікселя, яка б мала здатність заощувати площину і максимально відповідати площі круга. Прийmemo значення круга з радіусом R=1 і обчислимо площі вписаних у коло багатокутників (рис. 2).

Обчислимо площу гексагона через радіус описаного кола, за умови, що R=1. Оскільки у гексагона радіус описаного кола рівний стороні, то формула площі матиме вид:  $S = \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2 = 2,598$ .

Площа круга з радіусом R=1, дорівнює  $S = \pi R^2 = 3,14$ . Враховуючи, що у переважній більшості випадків, коло є найбільш прийнятною геометричною фігурою для пікселя, знайдемо співвідношення площ фігур. У таблиці 1 наведено співвідношення площ багатокутників до площі круга. З таблиці 1 видно, що гексагон найбільше наближається до круга.

Співвідношення площі багатокутників з площею круга одиничного радіуса

Геометрична форма	Площа	Співвідношення площі багатокутника по відношенню до кола
Круг	3,14	1
Трикутник	1,299	0,414
Квадрат	1,99	0,634
Гексагон	2,598	0,827

Розбиття пікселя на субпікселі при антиаліазингу дозволяє більше деталізувати зображення. Замість одного центрального відліку при розбитті пікселя на субпікселі застосовується декілька відліків [7].

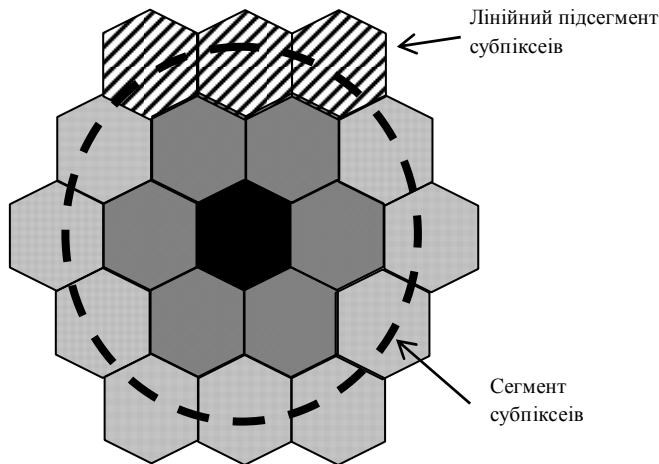


Рис. 3. Розбиття пікселя на субпікселі

Піксел у формі гексагону задається сукупністю однакових субпікселів. При цьому вони зберігають гексагональну форму. Починаючи від центрального сегмента його сусіди будуть віддалені від центру на однакову кількість субпікселів.

Введемо поняття сегмент субпікселів – це множина субпікселів, які віддалені від центрального на рівну кількість субпікселів. Зрозуміло, що в цьому випадку вони пересікаються одним колом, як показано на (рис.3). Лінійний підсегмент субпікселів – сукупність субпікселів, центри яких лежать на одному відрізку прямої і належать до одного сегменту.

Властивість гексагональних пікселів: при розбитті пікселя на субпікселі кількість

субпікселів завжди буде непарною.

Кожні два сусідніх субпікселі вибраного лінійного підсегменту утворюють один субпіксел наступного за ним сегменту, при цьому кількість утворених субпікселів буде на одиницю меншою від утворюючого. Виключення складають тільки кінцеві точки лінійного підсегменту, які утворюють тільки по одному субпікселю. Оскільки кількість лінійних підсегментів заданого сегменту дорівнює шести, а також, що вершини лінійних підсегментів є спільними для двох сусідніх, можна записати формулу для вираження кількості субпікселів у сегменті:

$$(l - 1) \times 6 + 6 \tag{1}$$

де  $l$  - кількість субпікселів вибраного лінійного сегменту.

Аналізуючи формулу (1), можна стверджувати, що множення на 6 завжди даватиме парний результат, віднімання 6-ти від парного числа також даватиме парне число. Тому кількість субпікселів у будь-якому сегменті є парною. Як відомо, в центрі пікселя завжди буде один субпіксел – центральний відлік, тому загальна кількість субпікселів буде непарною.

Не важко показати, що кількість субпікселів у кожному наступному сегменті буде зростати на 6 (рис.4).

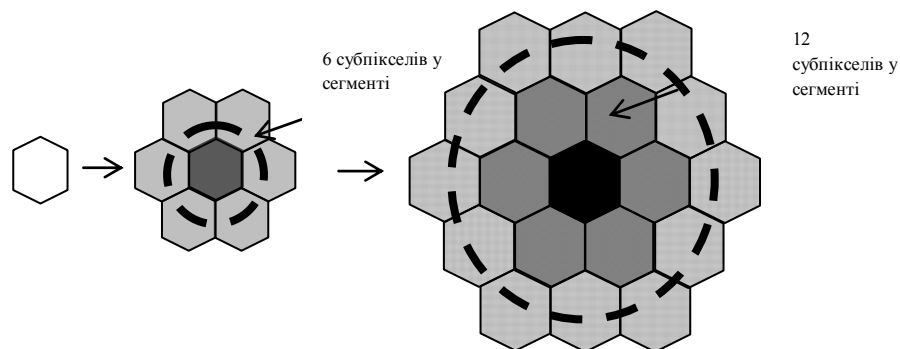


Рис. 4. Збільшення деталізації при розбитті пікселя на субпікселі

При розбитті гексагонального пікселя на субпікселі, кожен наступний сегмент субпікселів матиме меншу інтенсивність кольору, тобто інтенсивність спадатиме по мірі віддаленості від центру. Інтенсивність кольору може встановлюватись пропорційно до кількості субпікселів, що потрапили в полігон, з

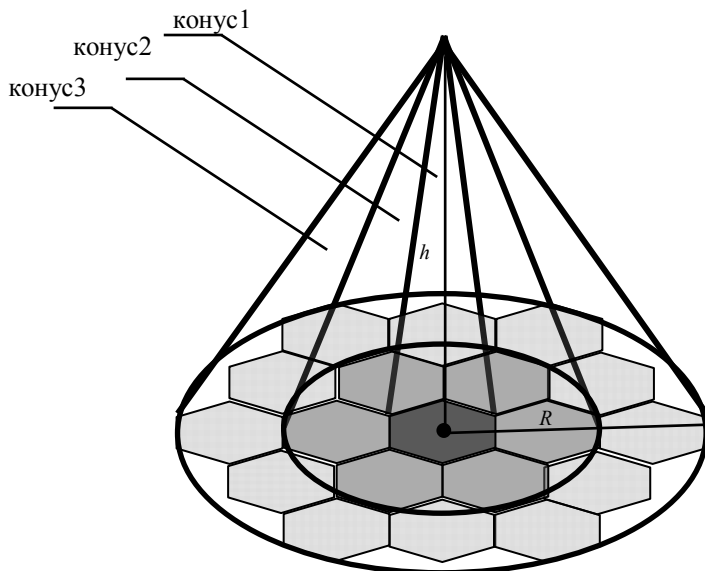


Рис. 5. Розташування конусів у відповідності до субпікселів

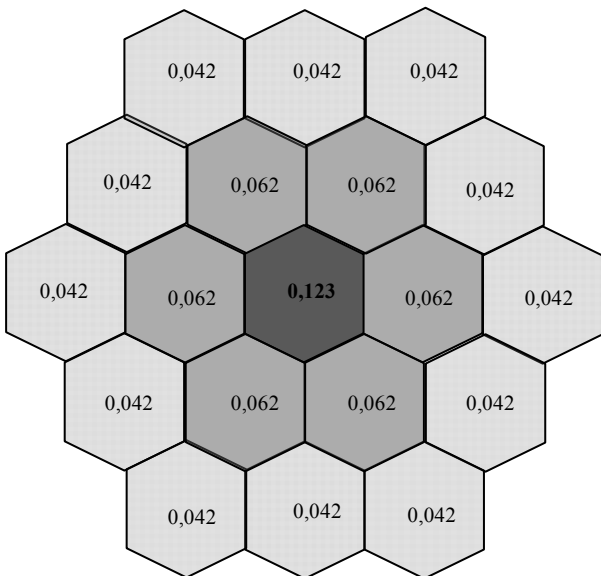


Рис. 6. Розподіл інтенсивності по субпікселям у пікселі

$$OF_{i,j} = y\Delta x - x\Delta y.$$

Розрахуємо значення оцінювальної функції у точках  $T_1 \div T_7$  (рис. 7)

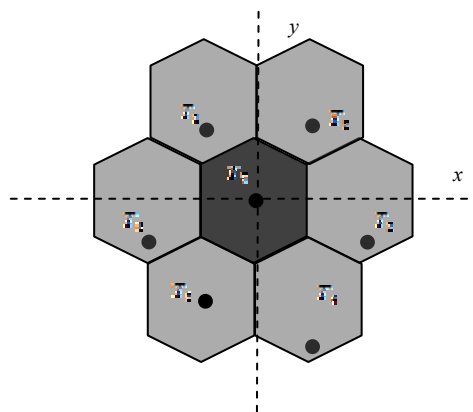


Рис.7. Розташування точок  $T_1 \div T_7$  в пікселі

Точки  $T_1 \div T_7$  відповідно будуть мати такі координати:

врахуванням їх віддаленості від центру.

Розглянемо можливість апроксимації конусної моделі пікселя за умови, що основою пікселя є не коло, а гексагон. При використанні для антиаліазингу конусної моделі пікселя інтенсивність кольору встановлюється пропорційно до об'єму, який відтинається від конуса ідеальною площиною [3].

Об'єм конуса  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ , де  $h$  – висота конуса. Прийmemo об'єм конуса рівним одиниці і знайдемо що висота  $h = \frac{3}{\pi R^2}$ . Якщо радіус  $R$  покриває три субпікселі, то  $h = 0,106$ . Зрозуміло, що для центрального субпікселя  $R = 0,5$ . Тому об'єм складового конуса 1, рис. 5. Буде дорівнювати  $V = 0,123$ .

Об'єм конуса 2 (7 субпікселів)  $V_7 = 0,492$ . Приведемо інтенсивність кольору субпікселя відповідно до об'ємів конусів. Для центрального субпікселя інтенсивність буде відповідати об'єму  $V_1 = 0,123$ . Складову об'єму для субпікселів конуса 2 легко знайти віднявши від об'єму конуса 2 об'єм конуса 1 і розділивши на кількість субпікселів другого сегменту. Такі самі розрахунки проведемо для третього сегменту субпікселів. Матимемо такий розподіл ваг субпікселів, як показано на рис. 6.

Розглянемо використання оцінювальної функції для гексагональної моделі пікселя. В цьому випадку інтенсивність кольору пікселя буде залежати від кількості субпікселів, що потраплять до графічного примітиву, який відтинатиметься відрізком прямої [3].

Значення оцінювальної функції будемо визначати за формулою:

$$(2)$$

$$T_1(x - \frac{1}{4}, y + \frac{1}{2}), T_2(x + \frac{1}{4}, y + \frac{1}{2}), T_3(x + \frac{1}{2}, y), T_4(x + \frac{1}{4}, y - \frac{1}{2}),$$

$$T_5(x - \frac{1}{4}, y - \frac{1}{2}), T_6(x - \frac{1}{2}, y), T_7(x, y).$$

Підставивши значення координат для точки  $T_1$  у формулу (6), отримаємо таке співвідношення

$$OF_1 = (y + \frac{1}{2})\Delta x - (x - \frac{1}{4})\Delta y = OF_{i,j} + \frac{(2\Delta x + \Delta y)}{4},$$

Для інших точок знайдемо відповідно

$$OF_2 = OF_{i,j} + \frac{(2\Delta x - \Delta y)}{4}, OF_3 = OF_{i,j} - \frac{\Delta y}{2}, OF_4 = OF_{i,j} - \frac{(2\Delta x - \Delta y)}{4},$$

$$OF_5 = OF_{i,j} - \frac{(2\Delta x + \Delta y)}{4}, OF_6 = OF_{i,j} + \frac{\Delta y}{2}, OF_7 = y\Delta x - x\Delta y = OF_{i,j}.$$

Значення оцінювальної функції в окремих точках розрахунку взаємозв'язане. Так у значеннях  $OF_2$  і  $OF_4$ ,  $OF_1$  і  $OF_5$ ,  $OF_3$  і  $OF_6$ ,  $OF_7$  другий доданок відрізняється лише знаком. Таким чином значення оцінювальної функції в точках  $T_1, T_2, T_3$  можна не знаходити окремо, а виразити через  $OF_2$ ,  $OF_4$ ,  $OF_7$ .

Слід зазначити, що ділення на 2 і 4 можна реалізувати шляхом зсуву.

### Висновки

У статті розглянуто особливості гексагональної моделі піксела. Показано заомощення площини геометричними формами трикутника, квадрата та гексагону. Доведено властивість гексагонального піксела, коли при розбитті на субпікселі їх кількість завжди буде непарною. Доведено, що кількість субпікселів у кожному наступному сегменті на шість більша, ніж у попередньому. Розглянуто можливість апроксимації конусної моделі піксела за умови, що основою піксела є гексагон. Наведено формули для розрахунку оцінювальної функції в субпікселах гексагонального піксела, знайдено взаємозв'язок між значеннями оцінювальної функції в цих субпікселах.

### Література

1. Carstens B. Hexagonal domain transform for shape analysis / B/ Carsten, M. Quinn // Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques, SPIE. – 1991. – P. 197-205.
2. Самощенко О. В. Ходус С. В. Передискретизація зображень у гексагональній системі координат hex2 / О. В. Самощенко, С. В. Ходус: Наукові праці ДонНТУ. – 2011 - №14(188). – С. 227-232.
3. Романюк О. Н., Курінний М. С., Методи та засоби антиаліазингу контурів об'єктів у системах комп'ютерної графіки. Монографія, УНІВЕРСУМ-Вінниця, Вінниця, 2006 р. – 163 с.
4. Фоли Дж., Ван Дем А. Основы интерактивной машинной графики./ Дж. Фоли, А. Ван Дем : Пер. С англ. - М.: Мир, 1985. - 384 с.
5. Wuthrich C. A. An Algorithmic Comparison Between Square and Hexagonal-based Grid / C. A. Wuthrich, P. Stucki // CVGIP: Graphical Models and Image Processing. – Vol. 53 – 1999. Pp. 324-339.
6. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. М., Мир, 1990. - 415 с.
7. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс : Пер. с англ. - М. : Мир, 2001. - 604 с.

### References

1. Carstens B. Hexagonal domain transform for shape analysis / B/ Carsten, M. Quinn // Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques, SPIE. – 1991. – P. 197-205.
2. Samoschenko O. V. Hodus S. V. Oversampling images in hexagonal coordinate system hex2 / O. V. Samoschenko, S. . Hodus: Scientific papers of Donetsk National Technical University. – 2011 - №14(188). – P. 227-232.
3. Romanyuk O. N., Kurinnyi M. S., Methods and tools for anti-aliasing contours of objects in computer graphics systems. The monograph.UNIVERSUM-Vinnitsa, Vinnitsa, 2006, - 163 p.
4. Folli Dg, Van Dem A., Fundamentals of interactive computer graphics / Dg. Folli, A. Vann Dem, M.: Mir, 1985, 384 p.
5. Wuthrich C. A. An Algorithmic Comparison Between Square and Hexagonal-based Grid / C. A. Wuthrich, P. Stucki // CVGIP: Graphical Models and Image Processing. – Vol. 53 – 1999. Pp. 324-339.
6. Conveyn Dg. Sloen N. Packing of spheres, grids and groups. M.: Mir, 1990, - 415 p.
7. Rodgers D. Adams Dg. Mathematical Foundations of Computer Graphics / D. Rodgers, Dg. Adams: M.: Mir, 2001, - 604 p.

Рецензія/Peer review : 19.1.2014 р.

Надрукована/Printed : 26.3.2014 р.