

УДК 006.91:90.03.03

В.Т. КОНДРАТОВ

Институт кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины

**ТЕОРИЯ ИЗБЫТОЧНЫХ И СВЕРХИЗБЫТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ:
ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ТРЕТЬЕЙ ГРУППЫ ПРАВИЛ ВЫВОДА
УРАВНЕНИЙ ИЗБЫТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КРУТИЗНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
СООБЩЕНИЕ 7.3**

В настоящем сообщении дальнейшее развитие получила теория избыточных и сверхизбыточных измерений в части исследования третьей группы правил вывода уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Рассмотрены правила вывода с использованием шести групп комбинаторных способов пространственно-временного усреднения результатов многократных измерительных преобразований t входных физических величин. В рамках каждой группы правил выделено и описано по пять способов усреднения выходных величин, входящих в состав базового комбинаторного уравнения величин. Показана возможность получения более одного миллиона трехсот тысяч уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Работа представляет интерес для ученых-метрологов, специалистов, магистров и аспирантов, изучающих избыточные и сверхизбыточные измерения.

Ключевые слова: правила вывода, уравнения избыточных измерений, формализованные описания, комбинаторные уравнения величин.

V.T.KONDRATOV

V.M.Glushkov Institute of cybernetics of National academy of Science of Ukraine

**THE THEORY OF REDUNDANT AND SUPER-REDUNDANT MEASUREMENTS: A FORMALIZED
DESCRIPTION OF THE THIRD GROUP OF DERIVATION RULES OF THE REDUNDANT MEASUREMENTS
EQUATIONS OF THE STEEPNESS OF TRANSFORMATION
THE MESSAGE 7.3**

Abstract — In the message the further development was received the theory of redundant and super-redundant measurements.

It is formalized the second group the rules of inference of the equations of redundant measurements of a steepness of transformation with use of six groups of combinatory ways of existential averaging of output quantities is described. Classification the rules of inference of the equations of redundant measurements is presented.

Definition of the second (from six) groups the rules of inference of the equations of redundant measurements with spatio-temporal averaging is made. Possibility of the formalized description of each rule is shown.

It is established, that the basis of the second group the rules of inference is made by six groups of combinatorial ways of spatio-temporal averaging of output quantities.

Spatio-temporal averaging opens new prospects on formation of the set ensemble of the equations of redundant measurements of a steepness of transformation with the different properties depending both from symmetry of structures, and from functional communications of structures with input and output physical quantities.

Possibility of reception from 5.400 results of redundant measurements of a steepness of transformation from a random error component is shown till 1.312.200. To reach such result methods of direct measurements at limited time of measurements not probably. The results obtained show the effectiveness of the principle of ergodicity when creating combinatorial methods of averaging.

The big work on research of statistical properties of redundant and super-redundant measurements is necessary at linear and nonlinear functions of transformation of the measuring channel.

Particular attention should be given to developing rules of choosing ensembles of similar to normal law of probability distributions, of methods of estimating probabilities for super-redundant measurements, of methods of estimating the mathematical expectation and variance for ensembles of equations of redundant measurements which are obtained by transforming and spatio-temporal averaging of 3 – 8 (10) input quantities.

Theoretically, there is a real possibility of definition of true value of physical quantities by methods of super-redundant measurements as only they provide an exclusion of the systematic component of the measurement error in a natural way and reducing the random component of the error of measurement results in 100 – 1000 times.

The rules of inference and reception of ensemble of the equations of redundant measurements will be in the long term in detail considered at different number of input physical quantities ($m=3,4,5,6,7,...10(12)$) and number of their measuring transformations from 2 to 10 and more.

A very important is task of writing of applied programs for parallel data processing and reception of a priori set quantity of the equations of redundant measurements of a steepness of transformation and measured quantity as a whole, of applied programs by estimations of probabilities, of mathematical expectation and of dispersion for ensembles of the redundant measurements equations etc.

Введение

В работах [1 – 5] было положено начало развитию нового научного направления в теории избыточ-

ных измерений — метрологической комбинаторики или комбинаторики уравнений величин, которое стало составной частью данной теории.

Впервые дано определение принципа эргодичности для сверхизбыточных измерений, устанавливающее взаимосвязь структуры уравнения (сверх)избыточных измерений, характеризующегося определенными стационарными свойствами, с информативной избыточностью и текущим состоянием измерительной системы в дискретные моменты времени, описываемым системой уравнений связи между величинами.

Принцип эргодичности стал одним из основных исходных положений теории сверхизбыточных измерений. Он обогатил известные принципы теории избыточных измерений и стал неотъемлемой частью теории измерений.

Впервые для рассматриваемой измерительной задачи ($m = 6$, $k = 2, \dots, 10$) была выделена и описана первая из шести групп правил вывода с пространственно-временным усреднением выходных величин, входящих в состав уравнений избыточных измерений крутизны преобразования.

Установлено, что первое объединение правил состоит из девяти блоков комбинаторных правил вывода формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования с пространственно-временным усреднением многократно преобразованных входных величин, причем для случаев, когда выходная величина U'_{i1} не усредняется ($t = 1$), а остальные усредняются — по 2, по 3, ..., по 10 величин. Каждый из выделенных девяти блоков состоит из девяти субблоков частных правил вывода.

Показано, что каждый субблок объединяет 81 группу способов усреднения по 8 вариантов в группе и состоит из 648 комбинаторных способов усреднения; один блок содержит 5832 комбинаторных способов усреднения, а девять блоков правил объединяют по 52488 комбинаторных вариантов пространственно-временного усреднения выходных величин. С учетом 10 вариантов формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования, получено 524.880 вариантов формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования с пространственно-временным усреднением.

Это свидетельствует о действенности принципа эргодичности при достижении целей сверхизбыточных измерений, о возможности получения, благодаря ему, усредненного результата избыточных измерений со случайной составляющей погрешности, уменьшенной на два порядка и более, о возможности определения квазиистинного значения физических величин методами сверхизбыточных измерений.

Результаты исследований свидетельствуют о широких возможностях пространственно-временного усреднения при формировании ансамблей уравнений избыточных измерений величин и параметров на базе многократных измерительных преобразований расширенных рядов входных величин.

Объект исследований — процессы вывода правил и уравнений избыточных измерений для решения метрологических задач с усреднением результатов многократных измерительных преобразований входных величин.

Предмет исследований — формализованное описание второй (из шести) группы правил вывода комбинаторных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования при многократных измерительных преобразованиях m входных физических величинах и линейной функции преобразования измерительного канала.

Целью работы является ознакомление ученых и специалистов с шестью группами комбинаторных способов усреднения выходных величин, входящих в базовое комбинаторное уравнение величин и обеспечивающих вывод второй группы уравнений избыточных измерений крутизны преобразования измерительного канала, с определением и с формализованным описанием правил вывода с пространственно-временным усреднением результатов многократных измерительных преобразований m входных физических величин.

Ниже рассматриваются вывод и формализованное описание уравнений избыточных измерений крутизны преобразования с пространственно-временным усреднением одноименных выходных величин, пути и методы получения ансамбля уравнений избыточных измерений крутизны преобразования в соответствии со второй группой правил вывода с усреднением. Конечной целью работы является доказательство получения максимально возможного количества распределенных в пространстве структур уравнений избыточных измерений крутизны преобразования при заданном числе m входных величин и общем числе измерительных преобразований, не превышающем десяти.

Результаты исследований

Вторая группа правил (из шести) вывода уравнений избыточных измерений на основе пространственно-временного усреднения выходных величин

Вторая из шести комбинаторная группа правил вывода уравнений избыточных измерений с пространственно-временным усреднением формализовано описывается комбинаторным уравнением

$$R_{S'_{i2}(2/6)}^{\text{III-III}} = \frac{1}{x^*} \left[(\overline{I_{i1}} + \overline{I_{i2}} + \overline{I_{i3}}) - (k_2 \overline{I_{j1}} + \overline{I_{j2}}) \right]. \quad (1)$$

где I и III — римские числа один и три; индексы « i » и « j » характеризуют те или иные выходные величины, полученные в результате многократного измерительного преобразования расширенных рядов входных величин.

На основании (1), определение второй группы правил с усреднением выходных величин, полученных в результате многократного (не более 10 раз) измерительного преобразования входных величин, может быть сформулировано следующим образом.

Определение 1

Вывод уравнений избыточных измерений крутизны преобразования осуществляется путем поочередного вычитания одной суммы разноименных или одноименных троек (два плюс одна) по разному усредненным выходных

величин (с индексом «j») из другой суммы неповторяющихся троек разноименных и по разному усредненных выходных величин (с индексом «i») с последующим делением полученных разностей на измеряемые физические величины, — на одну или на несколько, сочетанных определенным способом (например, суммо-разностным).

Под одноименными величинами будем понимать также выходные величины, размеры которых отличаются между собой только значениями погрешности.

Определение 2

Вывод уравнений избыточных измерений крутизны преобразования следует начинать с перебора всех вариантов разности сумм из трёх неповторяющихся разноименных и одноименных (во второй сумме) выходных величин, усредненных по разным правилам.

Совершенство уравнений избыточных измерений крутизны преобразования для рассматриваемого случая формализовано описывается следующим комбинаторным уравнением величин ($i \neq j \neq 0$, а $k_2 = 2$):

$$\begin{aligned} \overline{S_{\text{л(2/6)}}^{\text{III-III}}} &= \frac{1}{x^*} \left[\left(\frac{1}{n_1} \sum_{t=1}^{n_1} U'_{i1t} + \frac{1}{n_2} \sum_{t=1}^{n_2} U'_{i2t} + \frac{1}{n_3} \sum_{t=1}^{n_3} U'_{i3t} \right) - \left(\frac{k_2}{n_4} \sum_{t=1}^{n_4} U'_{j1t} + \frac{1}{n_5} \sum_{t=1}^{n_5} U'_{j2t} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{x^*} \left[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}}) \right], \end{aligned} \tag{2}$$

где $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_4 \neq n_5$.

Комбинаторное уравнение величин (2) в общем виде описывает структуру пространственно-временных связей выходных величин и их соответствующие позиции.

Для решения задачи пространственно-временного усреднения все пять выходных величин группируются в комбинаторные группы из одной, двух, трех, четырех и пяти выходных величин. При $m = 5$ получим 31 комбинаторную группу с пространственно-временным усреднением (см. табл. 1).

Таблица 1

№ п/п	Комбинаторные уравнения величин, формализовано описывающие всевозможные варианты усреднения для второй группы правил вывода уравнений избыточных измерений /согласно (2)/				
1	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	12	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	23	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
2	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	13	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	24	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
3	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	14	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	25	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
4	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	15	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	26	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
5	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	16	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	27	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
6	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	17	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	28	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
7	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	18	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	29	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
8	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	19	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	30	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
9	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	20	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	31	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
10	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	21	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	32	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$
11	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	22	$[(\overline{U_{i1}} + \overline{U_{i2}} + \overline{U_{i3}}) - (k_2 \overline{U_{j1}} + \overline{U_{j2}})] / x^*$	Всего 31 комбинаторное уравнение а 32-е — исходное, без усреднения.	

Для определения всевозможного количества не повторяющихся формализованных уравнений величин будем использовать приведенные в [5] правила усреднения выходных величин. Поскольку в структуре аналитического выражения (2) используется только пять выходных величин, то пятое правило усреднения не используется.

Усреднение во времени или «временное усреднение» и усреднение по пространству (по множеству) или «пространственное усреднение»

При прямых измерениях временному усреднению подлежат результаты многократных измерительных преобразований одной и той же физической величины. Пространственное усреднение возможно только при наличии конечного числа N измерительных преобразователей, на входы которых воздействует одна и та же физическая величина. При временном усреднении имеет место минимум аппаратных затрат (— требуется один-два измерительных преобразователя) и обеспечивается помехоустойчивость средства измерений к периодическим помехам [6]. В то же время требуются большие

затрати часу на вимірювання та визначення результату вимірювань. При просторовому усередненні (або комплексованні) забезпечується зменшення часу при знаходженні результату вимірювань. В цьому випадку ускладнюється саме засіб вимірювань, але значно підвищується надійність завдяки наявності N вимірних перетворювачів. В цілому, часове усереднення можна представити як трансформацію швидкодіючого в точність, а просторове усереднення — апаратних витрат в точність і надійність.

При надлишкових вимірюваннях результати вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини отримують при багаторазових вимірних перетвореннях декількох входних фізичних величин, заданих в вигляді ко-нечного числа рядів, з наступною обробкою перетворених (вихідних) величин, а точніше — їх значень, по априорно виведеному рівнянню надлишкових вимірювань¹. В цьому випадку може бути використано:

1) усереднення одноіменних вихідних величин в часі до їх обробки згідно формалізованого рівнянню надлишкових вимірювань (2), —

$$\overline{U'_{i1}} = \frac{1}{n_1} \sum_{t=1}^{n_1} U'_{i1t}, \overline{U'_{i2}} = \frac{1}{n_2} \sum_{t=1}^{n_2} U'_{i2t}, \overline{U'_{i3}} = \frac{1}{n_3} \sum_{t=1}^{n_3} U'_{i3t}, \overline{U'_{j1}} = \frac{1}{n_4} \sum_{t=1}^{n_4} U'_{j1t}, \overline{U'_{j2}} = \frac{1}{n_5} \sum_{t=1}^{n_5} U'_{j2t},$$

причому, в загальному випадку, кількість усереднюваних вихідних величин може бути довільною ($n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq n_4 \neq n_5$), але не перевищувати десяти ($t \leq 10$) згідно встановленим обмеженням;

2) обробка кожної групи з багаторазово перетворених входних величин за рівнянням надлишкових вимірювань з наступним просторовим усередненням отриманих результатів, —

$$S_{i1}^{III-III} = \frac{1}{x^*} [(U_{i11} + U_{i21} + U_{i31}) - (k_2 U_{j11} + U_{j21})], \dots, S_{in}^{III-III} = \frac{1}{x^*} [(U_{in} + U_{i2n} + U_{i3n}) - (k_2 U_{jn} + U_{j2n})] \text{ і } \overline{S_{in}^{III-III}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n S_{it}^{III-III};$$

3) усереднення масиву перетворених входних величин як в часі, так і в просторі, тобто реалізація комбінаторного просторово-часового усереднення вихідних величин, —

$$\overline{S_{ik1}^{III-III}} = \frac{1}{x^*} [(\overline{U_{i11}} + \overline{U_{i21}} + \overline{U_{i31}}) - (k_2 \overline{U_{j11}} + \overline{U_{j21}})],$$

.....

$$\overline{S_{ikn}^{III-III}} = \frac{1}{x^*} [(\overline{U_{in}} + \overline{U_{i2n}} + \overline{U_{i3n}}) - (k_2 \overline{U_{jn}} + \overline{U_{j2n}})]$$

з наступним усередненням отриманих результатів відомим способом —

$$\overline{S_{ikn}^{III-III}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n S_{ikt}^{III-III},$$

де індекс « k » характеризує комбінаторні рівняння величин з усередненням окремих вихідних величин.

Можливість використання просторово-часового усереднення — одна з особливостей надлишкових і надлишкових вимірювань. Завдяки йому стало можливим отримання ансамблів рівнянь надлишкових вимірювань величин і параметрів з різними статистичними властивостями.

Дослідження показали, що друга група комбінаторних рівнянь величин (2) забезпечує, як буде показано нижче, отримання більше одного мільйона трьохсот тисяч варіантів рівнянь надлишкових вимірювань завдяки використанню комбінаторних способів просторово-часового усереднення. Це свідчить про безмежні можливості такого підходу до вирішення задачі отримання максимальної кількості рівнянь надлишкових вимірювань.

Для проведення досліджень сукупність вихідних величин, входять в структуру рівнянь надлишкових вимірювань, розділимо на дві групи [5]. Перша група складається з m_1 неусереднюваних (або усереднюваних) одноіменних вихідних величин, а друга — m_2 усереднюваних (або неусереднюваних) одноіменних вихідних величин. Для розглянутої нижче задачі $m_1 + m_2 = m - k_1$, де $k_1 = 1$, або $m_1 = 1, m_2 = 4$.

Для другої групи правил виведення встановлено 120 комбінаторних варіантів структур формалізованих рівнянь надлишкових вимірювань крутизни перетворення, які наведені в табл. 2.1 і табл. 2.2. Вони підлягають усередненню, причому кожна усереднювана величина може представляти собою неусереднену величину ($t = 1$) або дев'ять варіантів усереднених вихідних величин ($t = 2, 3, \dots, 10$).

В розглянутої другій групі правил виведення комбінаторних рівнянь величин (1) з усередненням, вихідні величини першої (m_1) і другої (m_2) груп усереднюються в часі 90 раз ($9 \times 10 = 90$) таким же способом, як і в описаній в роботі [5] першій групі правил при різному числі усереднюваних одноіменних вихідних величин (по одній, по дві, по три, ..., по десять). Кількість одноіменних усереднюваних величин в другій групі правил з усередненням не рівно числу усереднюваних величин першої групи правил.

¹ В засобах надлишкових вимірювань використовується часове розділення каналів.

Група правил вывода второй группы формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования с усреднением разного количества одноименных выходных величин ($t = 1, 2, 3, \dots, 10$)

Базовое комбинаторное уравнение величин $\left[(U'_{i1} + U'_{i2} + U'_{i3}) - (k_2 U'_{j1} + U'_{j2}) \right] / x^*$					
Группа закономерностей 2 (120 вариантов) (продолжение)					
88	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i5}}) \right] / x^*$	99	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$	110	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i4}}) \right] / x^*$
89	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$	100	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i6}}) \right] / x^*$	111	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$
90	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i3}}) \right] / x^*$	101	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}}) - (k_2 \overline{U'_{i6}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$	112	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i4}}) \right] / x^*$
91	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i3}}) \right] / x^*$	102	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}}) - (k_2 \overline{U'_{i6}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$	113	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$
92	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i4}}) \right] / x^*$	103	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$	114	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$
93	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$	104	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i5}}) \right] / x^*$	115	$\left[(\overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$
94	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}}) \right] / x^*$	105	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$	116	$\left[(\overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i3}}) \right] / x^*$
95	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$	106	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i5}}) \right] / x^*$	117	$\left[(\overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$
96	$\left[(\overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i3}}) \right] / x^*$	107	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$	118	$\left[(\overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i3}}) \right] / x^*$
97	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$	108	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$	119	$\left[(\overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i1}}) \right] / x^*$
98	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i6}}) \right] / x^*$	109	$\left[(\overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i1}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$	120	$\left[(\overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{i3}} + \overline{U'_{i2}}) \right] / x^*$

Сто двадцать формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования, приведенные в табл. 2.1 и табл. 2.2, можно рассматривать как распределенные в пространстве структуры с фиксированными связями между элементами, в качестве которых выступают по разному усредненные ($t = 2, 3, 4, \dots, 10$) выходные величины измерительного канала средства измерений.

Представим позиционное расположение выходных величин в структуре базового комбинаторного уравнения величин в виде пяти групп последовательностей (см. рис. 3) и получим первую группу правил вывода.

Таблиця 3

Группа правил вывода с пространственно-временным усреднением многократно преобразованных входных величин для второй группы формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования

Базовое комбинаторное уравнение величин $\left[(U'_{i1} + U'_{i2} + U'_{i3}) - (k_2 U'_{j1} + U'_{j2}) \right] / x^*$					
Первая группа правил (не повторяющееся позиционное размещение одной не усредняемой выходной величины)					
№ п/п	Позиционные группы усредняемых выходных величин	№ п/п	Позиционные группы усредняемых выходных величин	№ п/п	Позиционные группы усредняемых выходных величин
1	$U'_{i1}, U'_{i2}, U'_{i3}, \overline{U'_{ij1}}, \overline{U'_{ij2}}$	3	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, U'_{i3}, U'_{j1}, \overline{U'_{ij2}}$	5	$\overline{U'_{i1}}, U'_{i2}, U'_{i3}, \overline{U'_{ij1}}, U'_{j2}$
2	$\overline{U'_{i1}}, U'_{i2}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{ij1}}, \overline{U'_{ij2}}$	4	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, U'_{j1}, \overline{U'_{ij2}}$	Здесь $t = 1, \dots, 10$	

Каждая позиционная группа усредняемых выходных величин связана с соответствующими группами комбинаторных способов усреднения. Рассмотрим ряд групп комбинаторных способов усреднения одноименных величин, входящих в структуру базового комбинаторного уравнения величин (см. табл. 3, первая строка).

Первая группа комбинаторных способов усреднения

Сущность состоит в том, что одна из выходных величин в структуре базового комбинаторного уравнения величин не усредняется ($t = 1$), а остальные четыре, представленные десятью одноименными величинами каждого обобщенного вида, поочередно усредняются по 2, по 3, ..., по 10 одноименных величин (девять раз) при следующих комбинаторных вариантах пяти выходных величин: для способа 1 — $U'_{i1}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{ij1}}, \overline{U'_{ij2}}$, для способа 2 — $\overline{U'_{i1}}, U'_{i2}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{ij1}}, \overline{U'_{ij2}}$, для способа 3 — $\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, U'_{i3}, \overline{U'_{ij1}}, \overline{U'_{ij2}}$, для способа 4 — $\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}},$

$\overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$, а для способу 5 — $\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$ (см. табл. 4, третья строка). Усреднение осуществляется (по оси z) для всех формализованных комбинаторных уравнений величин, приведенных в табл. 2.1 и табл. 2.2.

Сущность первой группы комбинаторных способов усреднения формализовано может быть представлено в виде табл. 4.

Таблица 4

Формализованное представление первой группы комбинаторных способов усреднения

Усредняемые последовательности выходных величин по первой группе комбинаторных способов ($m_2 = 4$)				
Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4	Способ 5
$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$
Цикл усреднений каждой последовательности по возрастающей: по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, по 7, по 8, по 9, по 10 величин.				

Способ 1 первой группы комбинаторных способов формализовано описывается в общем виде следующей системой комбинаторных уравнений величин:

$$\left. \begin{aligned} & \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i3} \right) - \left(\sum_{t=1}^{t=2} U'_{j1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\ & \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{i2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{i3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j1} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\ & \dots \\ & \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i2} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j2} \right) \right] / x^*. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Аналогично могут быть описаны и остальные четыре способа, но при последовательностях выходных величин, указанных в табл. 4 (третья строка).

По способу 1, например, обеспечивается получение 1080 вариантов ($120 \times 9 = 1080$) уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Здесь 120 — число вариантов (см. табл. 3, № 1), а 9 — количество усреднений выходных величин. В (3) первый ряд представляет формализованные уравнения избыточных измерений с усреднением по 2, второй — по 3, а последний — по 10 одноименных выходных величин. Всего 5400 вариантов.

В качестве примера приведем ансамбль из 5400 (5 способов \times 120 вариантов \times 9 видов усреднений = 5400) формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования, полученных с использованием пяти способов:

Первое множество — 1080 вариантов	...	пятое множество — 1080 вариантов	
$1. \left[\left(U'_{11} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{23}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{24}} + \overline{U'_{25}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $120. \left[\left(U'_{14} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{26}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{23}} + \overline{U'_{22}} \right) \right] / x^*,$ $121. \left[\left(U'_{11} + \overline{U'_{32}} + \overline{U'_{33}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{34}} + \overline{U'_{35}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $240. \left[\left(U'_{14} + \overline{U'_{35}} + \overline{U'_{36}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{33}} + \overline{U'_{32}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $961. \left[\left(U'_{11} + \overline{U'_{102}} + \overline{U'_{103}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{104}} + \overline{U'_{105}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $1080. \left[\left(U'_{14} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{106}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{103}} + \overline{U'_{102}} \right) \right] / x^*,$		$1. \left[\left(\overline{U'_{11}} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{23}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{24}} + \overline{U'_{25}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $120. \left[\left(\overline{U'_{14}} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{26}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{23}} + \overline{U'_{22}} \right) \right] / x^*,$ $121. \left[\left(\overline{U'_{11}} + \overline{U'_{32}} + \overline{U'_{33}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{34}} + \overline{U'_{35}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $240. \left[\left(\overline{U'_{14}} + \overline{U'_{35}} + \overline{U'_{36}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{33}} + \overline{U'_{32}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $961. \left[\left(\overline{U'_{11}} + \overline{U'_{102}} + \overline{U'_{103}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{104}} + \overline{U'_{105}} \right) \right] / x^*,$ <p style="text-align: center;">.....</p> $1080. \left[\left(\overline{U'_{14}} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{106}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{103}} + \overline{U'_{102}} \right) \right] / x^*,$	(4)

Вторая группа комбинаторных способов усреднения

Вторая группа комбинаторных способов усреднения обратна к первой. В структуре базового комбинаторного уравнение величин усредняется только одна позиционно расположенная выходная величина как показано в табл. 5, объединяющая 2, 3, ..., 10 одноименных выходных величин ($t = 2, \dots, 10$). Остальные величины не усредняются ($t = 1$).

Усреднение осуществляется (по оси z) для всех формализованных уравнений величин, приведенных в табл. 2.1 и табл. 2.2. Сущность второй группы комбинаторных способов усреднения может быть представлена в виде табл. 5.

Таблица 5

Формализованное представление первой группы комбинаторных способов усреднения

Усредняемые последовательности выходных величин по второй группе комбинаторных способов ($m_2 = 4$)				
Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4	Способ 5
$\overline{U}_{i1}, U'_{i2}, U'_{i3}, U'_{j1}, U'_{j2}$	$U'_{i1}, \overline{U}_{i2}, U'_{i3}, U'_{j1}, U'_{j2}$	$U'_{i1}, U'_{i2}, \overline{U}_{i3}, U'_{j1}, U'_{j2}$	$U'_{i1}, U'_{i2}, U'_{i3}, \overline{U}_{j1}, U'_{j2}$	$U'_{i1}, U'_{i2}, U'_{i3}, U'_{j1}, \overline{U}_{j2}$
Цикл усреднений каждой последовательности по возрастающей: по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, по 7, по 8, по 9, по 10 величин.				

Вторая группа комбинаторных способов усреднения формализовано может быть записана в общем виде следующей системой комбинаторных уравнений величин (способ 1, ..., способ 5):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{it1} + U'_{i2} + U'_{i3} \right) - (k_2 U'_{j1} + U'_{j2}) \right] / x^*, \\ \left[\left(\frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{it1} + U'_{i2} + U'_{i3} \right) - (k_2 U'_{j1} + U'_{j2}) \right] / x^*, \\ \dots \\ \left[\left(\frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{it1} + U'_{i2} + U'_{i3} \right) - (k_2 U'_{j1} + U'_{j2}) \right] / x^*. \end{array} \right\} \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \left[(U'_{i1} + U'_{i2} + U'_{i3}) - \left(k_2 U'_{j1} + \frac{1}{k_2} \sum_{j=1}^2 U'_{ij2} \right) \right] / x^*, \\ \left[(U'_{i1} + U'_{i2} + U'_{i3}) - \left(k_2 U'_{j1} + \frac{1}{k_3} \sum_{j=1}^3 U'_{ij2} \right) \right] / x^*, \\ \dots \\ \left[(U'_{i1} + U'_{i2} + U'_{i3}) - \left(k_2 U'_{j1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{j=1}^{10} U'_{ij2} \right) \right] / x^*. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Для анализа 1080 вариантов формализованных комбинаторных уравнения величин, полученных по первому способу второй группы, целесообразно записывать через усредненные величины (120 формализованных уравнений избыточных измерений при девяти вариантах временного усреднения):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Первый вариант усреднения} \\ 1. \left[(\overline{U}_{21} + U'_{i2} + U'_{i3}) - (k_2 U'_{i4} + U'_{i5}) \right] / x^*, \\ 2. \left[(\overline{U}_{21} + U'_{i2} + U'_{i3}) - (k_2 U'_{i4} + U'_{i6}) \right] / x^*, \\ \dots \\ 120. \left[(\overline{U}_{24} + U'_{i5} + U'_{i6}) - (k_2 U'_{i3} + U'_{i2}) \right] / x^*. \end{array} \right\} \dots \dots \left. \begin{array}{l} \text{девятый вариант усреднения} \\ 1. \left[(\overline{U}_{101} + U'_{i2} + U'_{i3}) - (k_2 U'_{i4} + U'_{i5}) \right] / x^*, \\ 2. \left[(\overline{U}_{101} + U'_{i2} + U'_{i3}) - (k_2 U'_{i4} + U'_{i6}) \right] / x^*, \\ \dots \\ 120. \left[(\overline{U}_{104} + U'_{i5} + U'_{i6}) - (k_2 U'_{i3} + U'_{i2}) \right] / x^*. \end{array} \right\} \quad (6)$$

При реализации пяти способов обеспечивается получение 5400 вариантов уравнений избыточных измерений (5 способов \times 9 вариантов усреднения \times 120 формализованных уравнений величин = 5400) крутизны преобразования. При этом затраты времени на обработку данных минимальны, поскольку усредняется только одна выходная величина.

Третья группа комбинаторных способов усреднения

Ее сущность состоит в том, что одна выходная величина в структуре базового комбинаторного уравнения величин не усредняется ($t = 1$), а остальные выходные величины усредняются циклически по 2, по 3, ..., по 10 величин ($t \neq 1$) в априори установленной последовательности (закономерности), приведенной в табл. 6 для каждого из пяти способов.

Образно усреднение осуществляется слева на право по вертикалям ансамбля формализованных комбинаторных уравнений величин, приведенных в табл. 2.1 и табл. 2.2. Цикл усреднений каждой последовательности из 120 комбинаторных уравнений величин осуществляется по возрастающей и состоит из девяти этапов.

На первом этапе получают 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 2, по 3, по 4 и по 5 одноименных выходных величин; на втором этапе — 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 6, по 7, по 8 и по 9 входящих в них выходных величин; на третьем этапе — 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 10, по 2, по 3 и по 4; на четвертом этапе — 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 5, по 6, по 7 и по 8; на пятом этапе — 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 9, по 10, по 2 и по 3; на шестом этапе — 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 4, по 5, по 6 и по 7; на седьмом этапе — 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 8, по 9, по 10 и по 2; на восьмом этапе — 120

комбинаторных уравнений величин при усреднении по 3, по 4, по 5 и по 6; на девятом этапе — 120 комбинаторных уравнений величин при усреднении по 7, по 8, по 9 и по 10 одноименных выходных величин.

Третья группа состоит из пяти комбинаторных способов, различающихся между собой совокупностями усредняемых выходных величин, используемых в структуре базового комбинаторного уравнения величин (см. табл. 6, третья строка).

Сущность третьей группы комбинаторных способов усреднения формализованоможно представить в виде табл. 6.

Таблица 6

Формализованное представление третьей группы комбинаторных способов усреднения

Усредняемые последовательности выходных величин по третьей группе комбинаторных способов ($m_2 = 4$)				
Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4	Способ 5
$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, U'_{i2}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, U'_{i3}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, U'_{j1}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, U'_{j2}$
Цикл усреднений каждой последовательности по возрастающей состоит из 9 этапов: 1) 2,3,4,5; 2) 6,7,8,9; 3) 10,2,3,4; 4) 5,6,7,8; 5) 9,10,2,3; 6) 4,5,6,7; 7) 8,9,10,2; 8) 3,4,5,6; 9) 7,8,9,10.				

В общем случае первый способ третьей группы комбинаторных способов формализовано может быть записан в виде системы или ансамбля комбинаторных уравнений величин (9 этапов по 120 формализованных уравнений величин):

$$\left. \begin{aligned}
 & 1. \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{i3} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{j1} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & 2. \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_6} \sum_{t=1}^{t=6} U'_{i2} + \frac{1}{k_7} \sum_{t=1}^{t=7} U'_{i3} \right) - \left(\frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=8} U'_{j1} + \frac{1}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \dots, \\
 & 9. \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_7} \sum_{t=1}^{t=7} U'_{i2} + \frac{1}{k_8} \sum_{t=1}^{t=8} U'_{i3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{j1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j2} \right) \right] / x^*.
 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Аналогично могут быть описаны и остальные четыре способа с учетом последовательностей выходных величин, приведенных в табл. 6, третья строка.

Запишем формализованные уравнения величин, получаемые по первому – пятому способам усреднения третьей группы (при усреднении только по 2 — первый подход) через усредненные величины:

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{По первому способу —} & \text{По пятому способу —} \\
 & 1. \left[\left(\overline{U'_{11}} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{44}} + \overline{U'_{55}} \right) \right] / x^*, & 1. \left[\left(\overline{U'_{11}} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{44}} + \overline{U'_{55}} \right) \right] / x^*, \\
 & 2. \left[\left(\overline{U'_{11}} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{44}} + \overline{U'_{56}} \right) \right] / x^*, & 2. \left[\left(\overline{U'_{11}} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{44}} + \overline{U'_{56}} \right) \right] / x^*, \\
 & \dots, & \dots, \\
 & 120. \left[\left(\overline{U'_{14}} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{36}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{43}} + \overline{U'_{52}} \right) \right] / x^*, & 120. \left[\left(\overline{U'_{14}} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{36}} \right) - \left(k_2 \overline{U'_{43}} + \overline{U'_{52}} \right) \right] / x^*.
 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Приведенные формы записей (7) и (8) формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования необходимы для составления программного обеспечения алгоритмов обработки (усреднения) данных и наглядного понимания процессов комбинаторного пространственно-временного усреднения.

В результате усреднения 120 комбинаторных уравнений величин получим 5400 (5 способов × 9 этапов × 120 комбинаторных уравнений величин = 5400) комбинаторных вариантов формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования.

Формализовано процесс первого этапа усреднения в соответствии с первым, вторым, ..., пятым способами четвертой группы в общем случае описывается следующей совокупностью комбинаторных уравнений величин с указанием операции суммирования (всего шестьсот вариантов):

Способ 1

$$\left. \begin{aligned}
 &1. \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t3} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t4} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t5} \right) \right] / x^*, \\
 &\dots \\
 &61. \left[\left(U'_{12} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t3} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t4} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t1} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t5} \right) \right] / x^*, \\
 &\dots \\
 &115. \left[\left(U'_{14} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t5} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t6} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t1} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t2} \right) \right] / x^*, \\
 &\dots \\
 &120. \left[\left(U'_{14} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t5} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t6} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t3} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t2} \right) \right] / x^*,
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Способ 2

$$\left. \begin{aligned}
 &1. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t1} + U'_{12} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t3} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t4} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t5} \right) \right] / x^*, \\
 &61. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t2} + U'_{13} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t4} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t1} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t5} \right) \right] / x^*, \\
 &\dots \\
 &115. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t4} + U'_{15} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t6} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t1} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t2} \right) \right] / x^*, \\
 &\dots \\
 &120. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t4} + U'_{15} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t6} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t3} + \frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t2} \right) \right] / x^*,
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Способ 5

$$\left. \begin{aligned}
 &1. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t1} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t2} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t4} + U'_{t5} \right) \right] / x^*, \\
 &61. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t3} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t4} \right) - \left(\frac{k_2}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t1} + U'_{t5} \right) \right] / x^*, \\
 &\dots \\
 &115. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t4} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t5} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t6} \right) - \left(\frac{k_2}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t1} + U'_{t2} \right) \right] / x^*, \\
 &120. \left[\left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{t4} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{t5} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{t6} \right) - \left(\frac{k_2}{k_5} \sum_{t=1}^{t=5} U'_{t3} + U'_{t2} \right) \right] / x^*.
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В табл. 7, в качестве наглядного примера приведены формализованные уравнения величин, полученные в соответствие с первым способом усреднения третьей группы, причем для каждого из девяти этапов усреднения выходных величин. Это дает возможность проверки числа вариантов и составления соответствующих программ для обработки данных.

Аналогично могут быть описаны и остальные четыре способа, но при последовательностях выходных величин, указанных в табл. 6, третья строка.

Група правил вивода формалізованих рівнянь избыточних вимірювань крутизны преобразования

Базовое комбинаторное уравнение величин $\left[(U'_{i1} + U'_{i2} + U'_{i3}) - (k_2 U'_{j1} + U'_{j2}) \right] / x^*$		
Формализованные уравнения избыточных измерений (9×120 = 1080 вариантов по первому способу)		
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}}) - (k_2 \overline{U'_{44}} + \overline{U'_{55}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{36}}) - (k_2 \overline{U'_{44}} + \overline{U'_{53}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{36}}) - (k_2 \overline{U'_{42}} + \overline{U'_{53}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}}) - (k_2 \overline{U'_{44}} + \overline{U'_{56}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{23}} + \overline{U'_{34}}) - (k_2 \overline{U'_{41}} + \overline{U'_{55}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{36}}) - (k_2 \overline{U'_{43}} + \overline{U'_{51}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{25}} + \overline{U'_{36}}) - (k_2 \overline{U'_{43}} + \overline{U'_{52}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{62}} + \overline{U'_{73}}) - (k_2 \overline{U'_{84}} + \overline{U'_{95}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{65}} + \overline{U'_{76}}) - (k_2 \overline{U'_{84}} + \overline{U'_{93}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{65}} + \overline{U'_{76}}) - (k_2 \overline{U'_{82}} + \overline{U'_{93}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{62}} + \overline{U'_{73}}) - (k_2 \overline{U'_{84}} + \overline{U'_{96}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{63}} + \overline{U'_{74}}) - (k_2 \overline{U'_{81}} + \overline{U'_{95}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{65}} + \overline{U'_{76}}) - (k_2 \overline{U'_{83}} + \overline{U'_{91}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{65}} + \overline{U'_{76}}) - (k_2 \overline{U'_{83}} + \overline{U'_{92}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{102}} + \overline{U'_{23}}) - (k_2 \overline{U'_{34}} + \overline{U'_{45}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{26}}) - (k_2 \overline{U'_{34}} + \overline{U'_{43}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{26}}) - (k_2 \overline{U'_{32}} + \overline{U'_{43}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{102}} + \overline{U'_{23}}) - (k_2 \overline{U'_{34}} + \overline{U'_{46}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{103}} + \overline{U'_{24}}) - (k_2 \overline{U'_{31}} + \overline{U'_{45}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{26}}) - (k_2 \overline{U'_{33}} + \overline{U'_{41}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{26}}) - (k_2 \overline{U'_{33}} + \overline{U'_{42}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{52}} + \overline{U'_{63}}) - (k_2 \overline{U'_{74}} + \overline{U'_{85}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{55}} + \overline{U'_{66}}) - (k_2 \overline{U'_{74}} + \overline{U'_{83}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{55}} + \overline{U'_{66}}) - (k_2 \overline{U'_{72}} + \overline{U'_{83}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{52}} + \overline{U'_{63}}) - (k_2 \overline{U'_{74}} + \overline{U'_{86}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{53}} + \overline{U'_{64}}) - (k_2 \overline{U'_{71}} + \overline{U'_{85}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{55}} + \overline{U'_{66}}) - (k_2 \overline{U'_{73}} + \overline{U'_{81}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{55}} + \overline{U'_{66}}) - (k_2 \overline{U'_{73}} + \overline{U'_{82}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{92}} + \overline{U'_{103}}) - (k_2 \overline{U'_{24}} + \overline{U'_{35}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{95}} + \overline{U'_{106}}) - (k_2 \overline{U'_{24}} + \overline{U'_{33}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{95}} + \overline{U'_{106}}) - (k_2 \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{92}} + \overline{U'_{103}}) - (k_2 \overline{U'_{24}} + \overline{U'_{36}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{93}} + \overline{U'_{104}}) - (k_2 \overline{U'_{21}} + \overline{U'_{35}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{95}} + \overline{U'_{106}}) - (k_2 \overline{U'_{23}} + \overline{U'_{31}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{95}} + \overline{U'_{106}}) - (k_2 \overline{U'_{23}} + \overline{U'_{32}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{42}} + \overline{U'_{53}}) - (k_2 \overline{U'_{64}} + \overline{U'_{75}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{45}} + \overline{U'_{56}}) - (k_2 \overline{U'_{64}} + \overline{U'_{73}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{45}} + \overline{U'_{56}}) - (k_2 \overline{U'_{62}} + \overline{U'_{73}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{42}} + \overline{U'_{53}}) - (k_2 \overline{U'_{64}} + \overline{U'_{76}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{43}} + \overline{U'_{54}}) - (k_2 \overline{U'_{62}} + \overline{U'_{75}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{45}} + \overline{U'_{56}}) - (k_2 \overline{U'_{63}} + \overline{U'_{71}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{45}} + \overline{U'_{56}}) - (k_2 \overline{U'_{63}} + \overline{U'_{72}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{82}} + \overline{U'_{93}}) - (k_2 \overline{U'_{104}} + \overline{U'_{25}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{85}} + \overline{U'_{96}}) - (k_2 \overline{U'_{104}} + \overline{U'_{23}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{85}} + \overline{U'_{96}}) - (k_2 \overline{U'_{102}} + \overline{U'_{23}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{82}} + \overline{U'_{93}}) - (k_2 \overline{U'_{104}} + \overline{U'_{26}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{83}} + \overline{U'_{94}}) - (k_2 \overline{U'_{101}} + \overline{U'_{25}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{85}} + \overline{U'_{96}}) - (k_2 \overline{U'_{103}} + \overline{U'_{21}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{85}} + \overline{U'_{96}}) - (k_2 \overline{U'_{103}} + \overline{U'_{22}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{32}} + \overline{U'_{43}}) - (k_2 \overline{U'_{54}} + \overline{U'_{65}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{35}} + \overline{U'_{46}}) - (k_2 \overline{U'_{54}} + \overline{U'_{63}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{35}} + \overline{U'_{46}}) - (k_2 \overline{U'_{52}} + \overline{U'_{63}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{32}} + \overline{U'_{43}}) - (k_2 \overline{U'_{54}} + \overline{U'_{66}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{33}} + \overline{U'_{44}}) - (k_2 \overline{U'_{51}} + \overline{U'_{65}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{35}} + \overline{U'_{46}}) - (k_2 \overline{U'_{53}} + \overline{U'_{61}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{35}} + \overline{U'_{46}}) - (k_2 \overline{U'_{53}} + \overline{U'_{62}}) \right] / x^*$
1. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{72}} + \overline{U'_{83}}) - (k_2 \overline{U'_{94}} + \overline{U'_{105}}) \right] / x^*$	60. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{75}} + \overline{U'_{86}}) - (k_2 \overline{U'_{94}} + \overline{U'_{103}}) \right] / x^*$	118. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{75}} + \overline{U'_{86}}) - (k_2 \overline{U'_{92}} + \overline{U'_{103}}) \right] / x^*$
2. $\left[(U'_{11} + \overline{U'_{72}} + \overline{U'_{83}}) - (k_2 \overline{U'_{94}} + \overline{U'_{106}}) \right] / x^*$	61. $\left[(U'_{12} + \overline{U'_{73}} + \overline{U'_{84}}) - (k_2 \overline{U'_{91}} + \overline{U'_{105}}) \right] / x^*$	119. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{75}} + \overline{U'_{86}}) - (k_2 \overline{U'_{93}} + \overline{U'_{101}}) \right] / x^*$
.....	120. $\left[(U'_{14} + \overline{U'_{75}} + \overline{U'_{86}}) - (k_2 \overline{U'_{93}} + \overline{U'_{102}}) \right] / x^*$

Четвертая группа комбинаторных способов усреднения

Выходные величины в структуре базового комбинаторного уравнения величин, кроме одной, попар-

но групується и усредняются по 2, по 3, ..., по 10 одноименных величин ($t \neq 1$) в априори установленной последовательности, приведенной в табл. 8 для каждого из пяти способов. Усреднение осуществляется по горизонтали ансамбля формализованных комбинаторных уравнений величин, приведенных в табл. 2.1 и табл. 2.2, пятью способами при 72 вариантах (законах) усреднения (см. табл. 8).

Таким образом получают 360 комбинаторных вариантов усреднения.

Приведенные 72 варианта усреднений 120 формализованных уравнений величин по способу 5 обеспечивают получение 43200 (5 способов \times 72 вариантов \times 120 формализованных уравнений величин = 43200) формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования.

Сущность четвертой группы комбинаторных способов усреднения, включающей 5 способов группирования выходных величин при 72 вариантах усреднения 120 комбинаторных уравнений величин, формализовано может быть представлена в виде табл. 8.

Таблица 8

Формализованное представление четвертой группы комбинаторных способов усреднения

Усредняемые пары выходных величин по четвертой группе комбинаторных способов ($m_2 = 4$)				
Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4	Способ 5
$U'_{i1}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$U'_{i1}, U'_{i2}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, U'_{i3}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, U'_{j1}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, U'_{j2}$
Усреднения выходных величин по:				
1) 2,2,3,3; 5) 2,2,7,7; 9) 3,3,2,2; 13) 3,3,7,7; ... 65) 10,10,2,2; 69) 10,10,6,6;				
2) 2,2,4,4; 6) 2,2,8,8; 10) 3,3,4,4; 14) 3,3,8,8; ... 66) 10,10,3,3; 70) 10,10,7,7;				
3) 2,2,5,5; 7) 2,2,9,9; 11) 3,3,5,5; 15) 3,3,9,9; ... 67) 10,10,4,4; 71) 10,10,8,8;				
4) 2,2,6,6; 8) 2,2,10,10; 12) 3,3,6,6; 16) 3,3,10,10; ... 68) 10,10,5,5; 72) 10,10,9,9.				

Формализованные уравнения избыточных измерений крутизны преобразования, полученные согласно первому комбинаторному способу усреднения четвертой группы, в общем случае можно представить в виде следующей системы (совокупности):

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j1} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i3} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{j1} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \dots \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i3} \right) - \left(\frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j2} \right) \right] / x^*; \\
 & \dots \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i2} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i3} \right) - \left(\sum_{t=1}^{t=2} U'_{j1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i2} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j1} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \dots \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i2} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{j1} + \frac{1}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{j2} \right) \right] / x^*.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для контроля и анализа числа полученных вариантов, формализованные уравнения избыточных измерений крутизны преобразования системы (12) целесообразно представлять в упрощенном виде через усредненные величины, причем для конкретного способа усреднения, например, для первого:

8 вариантов при 1-м подходе

8 вариантов при 9-м подходе

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[(U'_{i1} + \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i3}}) - (k_2 \overline{U'_{j1}} + \overline{U'_{j2}}) \right] / x^*, \\
 & \left[(U'_{i1} + \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i3}}) - (k_2 \overline{U'_{j1}} + \overline{U'_{j2}}) \right] / x^*, \\
 & \dots \\
 & \left[(U'_{i1} + \overline{U'_{i2}} + \overline{U'_{i3}}) - (k_2 \overline{U'_{j1}} + \overline{U'_{j2}}) \right] / x^*,
 \end{aligned} \right\} , \left. \begin{aligned}
 & \left[(U'_{i1} + \overline{U'_{i4}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{j3}} + \overline{U'_{j2}}) \right] / x^*, \\
 & \left[(U'_{i1} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{j3}} + \overline{U'_{j4}}) \right] / x^*, \\
 & \dots \\
 & \left[(U'_{i1} + \overline{U'_{i5}} + \overline{U'_{i6}}) - (k_2 \overline{U'_{j4}} + \overline{U'_{j3}}) \right] / x^*.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Приведенные аналитические выражения (12) и (13) дают возможность корректно составлять программы обработки данных результатов определения значений крутизны преобразования.

Пятая группа комбинаторных способов усреднения

Выходные величины в структуре базового комбинаторного уравнения величин, кроме одной, группируются и усредняются попарно по 2, по 3, ..., по 10 одноименных величин ($t \neq 1$) в априори установленной последовательности, приведенных в табл. 9 для каждого из пяти способов.

Усреднение осуществляется по горизонтали ансамбля формализованных комбинаторных уравнений величин, приведенных в табл. 2.1 и табл. 2.2 при 72 закономерных вариантах усреднения, приведенных в табл. 9.

Реализация пятой группы комбинаторных способов усреднения дают возможность получить 43200 формализованных уравнений (5 способов \times 72 вариантов \times 120 уравнений величин = 43200) избыточных измерений крутизны преобразования.

Сущность пятой группы комбинаторных способов усреднения, состоящей из 5 способов группирования выходных величин при 72 (8 вариантов \times 9 этапов) вариантах усреднения 120 комбинаторных уравнений величин формализовано может быть представлена в виде табл. 9.

Таблица 9

Формализованное представление пятой группы комбинаторных способов усреднения

Усредняемые пары выходных величин по пятой группе комбинаторных способов				
Способ 1	Способ 2	Способ 3	Способ 4	Способ 5
$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$	$\overline{U'_{i1}}, \overline{U'_{i2}}, \overline{U'_{i3}}, \overline{U'_{j1}}, \overline{U'_{j2}}$
Усреднения выходных величин по $8 \times 9 = 72$ вариантам, в том числе:				
1) 2,3,2,3; 5) 2,7,2,7; 9) 3,2,3,2; 13) 3,7,3,7; ... 65) 10,2,10,2; 69) 10,6,10,6;				
2) 2,4,2,4; 6) 2,8,2,8; 10) 3,4,3,4; 14) 3,8,3,8; ... 66) 10,3,10,3; 70) 10,7,10,7;				
3) 2,5,2,5; 7) 2,9,2,9; 11) 3,5,3,5; 15) 3,9,3,9; ... 67) 10,4,10,4; 71) 10,8,10,8;				
4) 2,6,2,6; 8) 2,10,2,10; 12) 3,6,3,6; 16) 3,10,3,10; ... 68) 10,5,10,5; 72) 10,9,10,9.				

Формализовано первый комбинаторный способ пятой группы в общем случае может быть записан так:

$$\left. \begin{aligned}
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{i3} \right) - \left(\sum_{t=1}^{t=2} U'_{j1} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{i3} \right) - \left(\sum_{t=1}^{t=2} U'_{j1} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \dots \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i2} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i3} \right) - \left(\sum_{t=1}^{t=2} U'_{j1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \dots \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i2} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{i3} \right) - \left(\frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{i3} \right) - \left(\frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j1} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{j2} \right) \right] / x^*, \\
 & \dots \\
 & \left[\left(U'_{i1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{i2} + \frac{1}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{i3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{j1} + \frac{1}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{j2} \right) \right] / x^*
 \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

или, через усредненные выходные величины, как:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{8 вариантов при 1-м подходе} \\
 \left[(U'_{11} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{33}}) - (k_2 \overline{U'_{24}} + \overline{U'_{35}}) \right] / x^*, \\
 \left[(U'_{11} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{43}}) - (k_2 \overline{U'_{24}} + \overline{U'_{46}}) \right] / x^*, \\
 \dots\dots\dots \\
 \left[(U'_{11} + \overline{U'_{22}} + \overline{U'_{104}}) - (k_2 \overline{U'_{23}} + \overline{U'_{106}}) \right] / x^*,
 \end{array} \right\} \dots, \left. \begin{array}{l}
 \text{8 вариантов при 9-м подходе} \\
 \left[(U'_{11} + \overline{U'_{104}} + \overline{U'_{26}}) - (k_2 \overline{U'_{103}} + \overline{U'_{22}}) \right] / x^*, \\
 \left[(U'_{11} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{36}}) - (k_2 \overline{U'_{103}} + \overline{U'_{34}}) \right] / x^*, \\
 \dots\dots\dots \\
 \left[(U'_{11} + \overline{U'_{105}} + \overline{U'_{96}}) - (k_2 \overline{U'_{104}} + \overline{U'_{33}}) \right] / x^*.
 \end{array} \right\} \quad (13)$$

Приведенные аналитические выражения (12) и (13), представляющие девять подходов (этапов) при восьми вариантах усреднения) наглядно представляют структуры всех вариантов формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования с пространственно-временным усреднением.

Шестая группа комбинаторных способов усреднения

Выходные величины в структуре базового комбинаторного уравнения величин, кроме одной, группируются и усредняются попарно по 2, по 3, ..., по 10 одноименных величин ($t \neq 1$) в априори установленной последовательности, приведенной в табл. 10 для каждого из пяти способов.

Усреднение осуществляется по горизонтали ансамбля из 120 формализованных комбинаторных уравнений величин (см. табл. 2.1 и табл. 2.2) пятью способами при 72 вариантах (законах) усреднения (см. табл. 10).

Реализация шестой группы комбинаторных способов усреднения дает возможность также получить 43200 (5 способов × 72 вариантов × 120 уравнений величин = 43200) формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования, как и при реализации пятой группы.

Различия между приведенными группами комбинаторных способов усреднения состоят в используемых закономерностях усреднения выходных величин.

В общем случае первый комбинаторный способ усреднения шестой группы аналитически можно записать таким образом:

$$\left. \begin{array}{l}
 \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{ii2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{ii3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{ij1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{ij2} \right) \right] / x^*, \\
 \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{ii2} + \frac{1}{k_4} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{ii3} \right) - \left(\frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=4} U'_{ij1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{ij2} \right) \right] / x^*, \\
 \dots\dots\dots \\
 \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{ii2} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ii3} \right) - \left(\frac{1}{k_5} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ij1} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{ij2} \right) \right] / x^*, \\
 \dots\dots\dots \\
 \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ii2} + \frac{1}{k_2} \sum_{t=1}^{t=2} U'_{ii3} \right) - \left(\sum_{t=1}^{t=2} U'_{ij1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ij2} \right) \right] / x^*, \\
 \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ii2} + \frac{1}{k_3} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{ii3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_5} \sum_{t=1}^{t=3} U'_{ij1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ij2} \right) \right] / x^*, \\
 \dots\dots\dots \\
 \left[\left(U'_{11} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ii2} + \frac{1}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{ii3} \right) - \left(\frac{k_2}{k_9} \sum_{t=1}^{t=9} U'_{ij1} + \frac{1}{k_{10}} \sum_{t=1}^{t=10} U'_{ij2} \right) \right] / x^*.
 \end{array} \right\} \quad (14)$$

Для анализа формализованных уравнений избыточных измерений крутизны преобразования целесообразно представлять через усредненные выходные величины для каждого способа усреднения, например, для всех пяти способов, как показано ниже:

преобразования с использованием шести групп комбинаторных способов пространственно-временного усреднения выходных величин. Приведена классификация правил вывода уравнений избыточных измерений.

Дано определение второй (из шести) группы правил вывода уравнений избыточных измерений с пространственно-временным усреднением. Показана возможность формализованного описания каждого правила.

Установлено, что основу второй группы правил вывода составляют шесть групп комбинаторных способов пространственно-временного усреднения выходных величин.

Пространственно-временное усреднение открывает новые перспективы по формированию заданного ансамбля уравнений избыточных измерений крутизны преобразования с разными свойствами, зависящими как от сим-метрии структур, так и от функциональных связей структур с входными и выходными физическими величинами.

Показана возможность получения от 5.400 до 1.312.200 результатов избыточных измерений крутизны преобразования со случайной составляющей погрешности. Такой результат методами прямых измерений при ограниченном времени измерений достичь не возможно.

Полученные результаты свидетельствует о действенности принципа эргодичности при создании комбинаторных способов усреднения.

Предстоит большая работа по исследованию статистических свойств избыточных и сверхизбыточных измерений при линейной и нелинейной функциях преобразования измерительного канала.

Особое внимание следует уделять разработке правил выбора ансамблей с близкими к нормальному законам распределения вероятностей, способов оценивания вероятностей при сверхизбыточных измерениях, способов оценивания математических ожиданий и дисперсии для ансамблей уравнений избыточных измерений, полученных путем преобразования и пространственно-временного усреднения ограниченного числа $1/3 - 8(10)$ входных величин.

Теоретически существует реальная возможность определения истинного значения физических величин метода-ми сверхизбыточных измерений поскольку только они обеспечивают исключение систематической составляющей погрешности измерений и уменьшение случайной составляющей погрешности результата измерений в 100 – 1000 раз.

В перспективе будут детально рассмотрены правила вывода и получения ансамбля уравнений избыточных измерений при разном числе входных физических величин ($m = 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 10(12)$) и числе измерительных преобразований их от 2-х до 10-и и более.

Весьма важной является задача написания прикладных программ по параллельной обработке данных и получению априори заданного количества уравнений избыточных измерений крутизны преобразования и искомой физической величины в целом, прикладных программ по оценкам вероятностей, математического ожидания и дисперсии для ансамблей уравнений избыточных измерений и т.д.

Литература

1. Кондратов В.Т. Теория избыточных и сверхизбыточных измерений: формализованное описание общих правил вывода уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Сообщение 4 / В. Т. Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2013. – № 4. – С. 3 – 17.
2. Кондратов В.Т. Теория избыточных и сверхизбыточных измерений: формализованное описание первой группы правил вывода уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Сообщение 5 / В. Т. Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2013. – № 4. – С. 115 – 128.
3. Кондратов В.Т. Теория избыточных и сверхизбыточных измерений: формализованное описание второй группы правил вывода уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Сообщение 6 / В. Т. Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2013. – № 4. – С. 134 – 147.
4. Кондратов В.Т. Теория избыточных и сверхизбыточных измерений: формализованное описание третьей группы правил вывода уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Сообщение 7.1 / В. Т. Кондратов // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 1. – С. 233 – 242.
5. Кондратов В.Т. Теория избыточных и сверхизбыточных измерений: формализованное описание третьей группы правил вывода уравнений избыточных измерений крутизны преобразования. Сообщение 7.2 / В. Т. Кондратов // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2014. – № 2. – С. 223 – 236.
6. Алиев Т.М., Тер-Хачатуров А.А. Измерительная техника. М.: Высшая шк. – 1991. – 384 с.
7. Закон больших чисел. Режим доступа: <http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/tv/theme0/10.asp> .

References

1. Kondratov V.T. Teorija izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij: formalizovannoe opisanie obschikh pravil vyvoda uravnenij izbytochnykh izmerenij krutizny preobrazovanij. Soobshhenie 4. Vymiruvalna ta obchysluvalna tekhnika v tekhnologichnykh protcesakh. – 2013. – № 4. – С. 3 – 17.
2. Kondratov V.T. Teorija izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij: formalizovannoe opisanie pervoj grupy pravil vyvoda uravnenij izbytochnykh izmerenij krutizny preobrazovanij. Soobshhenie 5. Vymiruvalna ta obchysluvalna tekhnika v tekhnologichnykh protcesakh. – 2013. – № 4. – С. 115 – 128.

3. Kondratov V.T. Teorija izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij: formalizovanoje opisanie vtoroj grupy pravil vyvoda uravnenij izbytochnykh izmerenij krutizny preobrazovanij. Soobshhenie 6. Vymiruvalna ta obchysluvalna tekhnika v tekhnologichnykh procesakh. – 2013. – № 4. – С. 134 – 147.

4. Kondratov V.T. Teorija izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij: sushhnost sverkhizbytochnykh izmerenij. Soobshhenie 7.1. Visnyk Khmelniczkogo naczionalnogo universitetu. Tekhnichni nauky. – 2014. – № 1. – С. 233 – 242.

5. Kondratov V.T. Teorija izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij: sushhnost sverkhizbytochnykh izmerenij. Soobshhenie 7.2. Visnyk Khmelniczkogo naczionalnogo universitetu. Tekhnichni nauky. – 2014. – № 2. – С. 223 – 236.

6. Aliev T.M., Ter-Khachaturov A.A. Izmeritel'naja tekhnika. M.: Vysshaja shkola. – 1991. – 384 s.

7. Zakon bolshikh chisel. Rezhim dostupa: <http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/tv/theme0/10.asp>.

Рецензія/Peer review : 20.2.2014 р.

Надрукована/Printed : 26.3.2014 р.

УДК 004.921

S.I. VYATKIN, S.A. ROMANYUK

Institute of Automation and Electrometry, SB RAS

FUNCTION REPRESENTATION IN GEOMETRIC MODELING

There had been considered the issue of synthesis by means of perturbation functions. The free forms based on the analytical perturbation functions have an advantage of spline representation of surfaces, that is, a high degree of smoothness, and an advantage of arbitrary form for a small number of perturbation functions.

Keywords: Geometric modeling, function-based surface representation, perturbation functions, patches of arbitrary forms.

С.И. ВЯТКИН, С.А. РОМАНИЮК

Институт автоматизации и электрометрии СО РАН

ФУНКЦИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

Розглянуто питання синтезу з використанням функцій збурення. Вільні форми на основі аналітичних функцій збурення мають переваги сплайнового подання поверхонь, тобто характеризуються високою ступінню гладкості і забезпечують формування довільної форми при невеликій кількості функцій збурення.

Ключові слова: геометричне моделювання, функцій завдання поверхонь, функцій збурення, патчі довільних форм.

Statement of the Problem

Several representations of geometric objects are currently used in computer graphics. Each of the objects, according to its properties, is used in different fields, beginning from 3D simulation and CAD systems up to real-time visualization systems.

The polygonal surface representation is a piecewise linear interpolation of a surface. Its merit is a simple representation and universal application because the piecewise linear representation exists for any surface. We should mention the insignificant computational expenses required for visualization and geometric transformations. The drawback is large database for storing the information on the surface geometry. Highly detailed models (multiresolution geometric models), e.g., antique sculptures, subjected to computer reconstruction have hundreds of millions of triangles.

The spline representation of surfaces [1], along with analytical representation, is used in AutoCAD and 3D Studio systems. It is characterized by a highly accurate representation of 2D and 3D objects.

The functional representation describes most accurately the object geometry and has the smallest size of the required data. Procedures of functional representation demonstrate compact and flexible representation of surfaces and objects that are results of logical operations on volumes. Its disadvantage is complicated geometrical processing and visualization in real time.

Analysis of Research and publications

Several kernels described in [2]:

- Gaussian function (Blinn, Bloomenthal, Shoemake)

$$h(r)=\exp(-a^2r^2)^2, \quad r>0 \quad (1)$$

Note:

Produced point, line, plane and stopped for arc and triangle.

- Inverse function (Wyvill, van Overveld)

$$h(r)=1/r, \quad r>0 \quad (2)$$

- Inverse squared function (Wyvill, van Overveld)

$$h(r)=1/r^2, \quad r>0 \quad (3)$$

Note:

Yielded solutions for various primitives. For planes solution, however, did not converge and solution for arcs is expressed via elliptical integrals. It is too difficult.

- Metaballs (Nishimura)