

## МЕТОД ІМІТАЦІЇ НЕРІВНОСТЕЙ НА ОСНОВІ ЗБУРЕННЯ ДИСТРИБУТИВНОЇ ФУНКЦІЇ ВІДБИВНОЇ ЗДАТНОСТІ ПОВЕРХНІ

Запропоновано новий метод імітації нерівностей на основі збурення дистрибутивної функції відбивної здатності. Запропоновано три підходи до апроксимації тригонометричної функції синуса через косинус.

Ключові слова: : дистрибутивна функція відбивної здатності, синус, кусково-кубічна апроксимація, формула Герона.

S.O. ROMANIUK, O.V. ROMANIUK

Vinnytsia National Technical University

### Method OF RELIEF IMITATION ON THE BASE OF PERTURBATION OF BIDIRECTIONAL REFLECTANCE DISTRIBUTION FUNCTION

There had been proposed new method of relief imitation on the base of perturbation of bidirectional reflectance distribution function. Three approaches to approximate sinus via cosines had been proposed.

Keywords: bidirectional reflectance distribution function, sinus, piecewise cubic approximation, Heron formula.

#### Постановка задачі

Формування високореалістичних зображень, що точно відображають предмети реального світу, є однією із найголовніших задач сучасної комп'ютерної графіки. Забезпечення реалістичності неможливе без точної передачі фактурних особливостей поверхонь тривимірних моделей.

Найкращі результати досягаються при застосування методів формування рельєфу, що змінюють геометрію моделі об'єкта, однак вони характеризуються надзвичайно великими обсягами обчислень, тому мають обмежене застосування. Гарного компромісу між якістю та швидкістю формування реалістичних зображень можна досягти завдяки методам, що імітують нерівності на поверхні, зокрема такі мілкі деталі як пори, тріщини, пісок тощо. До таких методів належать методи бамп-меппінгу та нормал-меппінгу [1-4].

У зазначених методах ідея імітації нерівностей ґрунтується на збуренні вектора нормалі та його подальшого використання у формулах визначення спекулярної та дифузної складових освітлення пікселя.

Найбільшу складність для розрахунку становить дистрибутивна функція  $\cos^n g$ , яка відповідає за спекулярну складову інтенсивності кольору, оскільки коефіцієнт спекулярності поверхні  $n$  може приймати значення від 1 до 1000.

Враховуючи, що розрахунок інтенсивностей кольору потрібно проводити для кожного пікселя зображення, то процедури збурення вектора нормалі і розрахунку дистрибутивної функції відбивної здатності вимагають значних обчислювальних витрат, тому метою даної роботи є підвищення продуктивності формування реалістичних зображень.

Задача дослідження полягає в одержанні формули для визначення дистрибутивної функції відбивної здатності, що не вимагає розрахунку нормалізованого збуреного вектора нормалі та в цілому дозволяє прискорити процес формування зображень рельєфних поверхонь.

Аналіз досліджень та публікацій

Ідея імітації нерівностей у методах бамп-меппінгу ґрунтується на збуренні вектора нормалі у кожній точці поверхні [1]

$$\mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{D},$$

де  $\mathbf{N}'$  - збурений вектор нормалі,  $\mathbf{N}$  - базовий вектор нормалі,  $\mathbf{D}$  - фактор збурення.

Збурений вектор нормалі  $\mathbf{N}'$  в подальшому необхідно нормалізувати [5]

$$\mathbf{N}_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \mathbf{i} + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \mathbf{j} + \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \mathbf{k}.$$

Далі нормалізований збурений вектор нормалі використовують для розрахунку спекулярної та дифузної складових кольору пікселя [6]

$$I_{\text{specular}} = I_l \cdot k_s \cdot \max(0, \mathbf{H} \cdot \mathbf{N}')^n = I_l \cdot k_s \cdot \cos^n g,$$

$$I_{\text{diffuse}} = I_l \cdot k_d \cdot \max(0, \mathbf{L} \cdot \mathbf{N}') = I_l \cdot k_d \cdot \cos q,$$

де  $I_l$  - інтенсивність кольору джерела світла,  $k_s$  - коефіцієнт спекулярного відбиття,  $\cos^n g$  - дистрибутивна функція відбивної здатності, яка дозволяє описувати відблиски на поверхні,  $g$  - кут між

вектором півшляху  $\vec{H} = \frac{\vec{L} + \vec{V}}{|\vec{L} + \vec{V}|}$ , де  $\vec{V}$  - вектор спостереження, та нормаллю до поверхні  $\vec{N}'$ ,  $n$  -

коефіцієнт спекулярності поверхні,  $k_d = \overline{0,1}$  - коефіцієнт дифузного відбиття,  $\cos q$  - косинус кута між вектором  $\vec{L}$ , який визначає напрямок світла, та нормаллю до поверхні  $\vec{N}'$ .

Процедури збурення та нормалізації вектора вимагають значних обчислювальних витрат, тому сьогодні надають перевагу методу нормал-меппінгу, який використовує наперед розраховані збурені вектори нормалей, які зчитуються зі спеціальної карти нормалей [4]. Використання карт нормалей передбачає трансформацію векторів  $\vec{L}$  і  $\vec{H}$  у дотичний простір об'єкта. Трансформація вектора у дотичний простір виконується шляхом його множення на 3x3 матрицю трансформації, стовпцями якої є вектори дотичної  $\vec{T}$ , бінормалі  $\vec{B}$  та нормалі  $\vec{N}$  до поточної точки поверхні

$$\begin{bmatrix} L''_x \\ L''_y \\ L''_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x & B_x & N_x \\ T_y & B_y & N_y \\ T_z & B_z & N_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix}.$$

Аналогічні дії виконують і для вектора  $\vec{H}$ .

Процедура трансформації вектора у дотичний простір вимагає виконання 9 операцій множення та 6 операцій додавання. В подальшому отриманий вектор необхідно нормалізувати.

Велика кількість обчислень, пов'язана з визначенням нормалізованого збуреного вектора нормалі зумовлює необхідність розробки нового методу, який би дозволив прискорити процес формування реалістичних зображень за рахунок вилучення процедур збурення та нормалізації векторів нормалей.

### Метод імітації нерівностей на основі збурення дистрибутивної функції відбивальної здатності поверхні

Традиційний бамп-меппінгу передбачає збурення нормалей в кожній точці поверхні з метою імітації нерівностей. Внаслідок збурення нормалі кут між вектором збуреної нормалі  $\vec{N}$  та вектором  $\vec{H}$  змінюється. Тому можна імітувати нерівності на поверхні безпосередньо шляхом зміни кута між вектором нормалі та вектором  $\vec{H}$  на певну величину  $dg$ .

У формулі зафарбовування Фонга [7] використовується дистрибутивна функція відбивальної здатності (ДФВЗ), яка з урахуванням запропонованого підходу прийме вигляд

$$\cos^n(g \pm dg), \quad (1)$$

де  $g$  – кут між вихідним вектором нормалі та вектором  $\vec{H}$ , а  $dg$  – збурення кута, який будемо називати кутом зміщення.

Знаходження кута  $g$  для розрахунку за формулою (1) з апаратної точки зору є трудомістким, оскільки потрібно знайти скалярних добуток двох векторів і виконати тригонометричну операцію arccos для розрахунку значення кута  $g$ . Для спрощення розрахунків виразимо формулу (1) через косинуси та синуси відповідних кутів. Тоді

$$\cos^n(g \pm dg) = (\cos g \cdot \cos dg \mp \sin g \sin dg)^n \quad (2)$$

Для розрахунку за формулою (4.2) доцільно зберігати значення косинуса кута зміщення  $dg$  у табличній формі, яку назвемо картою косинусів кутів зміщення. У формулі (2) використовуються не значення кутів, розрахунок яких є достатньо трудомістким, а тригонометричні функції між кутом і його збуренням.

Аналогічні дії виконуються і для збурення кута між векторами  $\vec{N}$  і  $\vec{L}$ .

На рис. 1 наведено приклади зображень, сформованих з використанням традиційного методу нормал-меппінгу та запропонованого методу збурення дистрибутивних функцій

На відміну від традиційного бамп-меппінгу запропонований підхід імітації нерівностей збуренням кутів дозволяє виключити процедуру збурення вихідного вектора нормалі та подальшу його нормалізацію, які є найтрудомісткішими у процесі імітації нерівностей. Це дає можливість підвищити продуктивність формування зображень рельєфних поверхонь.

Пропонується значення  $\cos dg$  розраховувати як скалярний добуток нормалізованих незбуреного вектора нормалі та вектора  $\vec{H}$ , а значення  $\cos dg$  зчитувати з карти косинусів. Щоб розрахувати синуси, необхідно мати значення кутів, які безпосередньо не задані. Виконання тригонометричних функцій арккосинуса та синуса є досить трудомісткими з апаратної точки зору. Тому для розрахунку синусів запропоновано такі підходи.

Перший передбачає використання пам'яті, яка містить розраховані значення синусів для відповідних значень косинусів. Недоліком такого підходу є те, що при розпаралеленні процесу бамп-

мешпінгу потрібно збільшувати кількість блоків пам'яті. Тому для забезпечення можливості розпаралелення процесу формування зображень рельєфних поверхонь доцільно апроксимувати значення синуса через косинус. Відомо, що

$$\sin g = \sqrt{1 - \cos^2 g} . \quad (3)$$



Рис.1. Зображення “Диск”, сформовані з використанням: а) традиційного методу нормал-мешпінгу; б) запропонованого методу збудення дистрибутивних функцій

Визначення квадратного кореня вимагає значних обчислювальних витрат. Щоб прискорити процес розрахунку, запропоновано апроксимувати вираз  $\sqrt{1 - \cos^2 g}$  більш простою функцією.

#### Підходи до апроксимації синуса

ДФВЗ відповідає за спекулярну складову кольору, тобто формування відблиску, який чітко видно при малих значеннях кута між вектором нормалі та вектором  $\vec{H}$ . Зі збільшенням коефіцієнта спекулярності  $n$  значення кутів, при яких проявляється відблиск зменшуються. Враховуючи, що для коефіцієнта спекулярності  $n$  від 20 до 1000 відблиск має місце при кутах між вектором нормалі та вектором  $\vec{H}$  не більше ніж  $40^\circ$  [5], то необхідно забезпечити більшу точність апроксимації саме для малих значень синуса.

Розглянемо питання кусково-кубічної апроксимації синуса через функцію косинуса. Дослідження показали, що для забезпечення відносної похибки апроксимації, яка не перевищує 2 %, достатньо чотири діапазони. Для апроксимації  $\sin g$  через  $\cos g$  вибрано поліноми Чебишова третьої степені.

При апроксимації  $\sin g$ , для якого  $\cos g \in [0; 0,89]$ , поліномом Чебишова третьої степені з відносною похибкою, яка не перевищує 1,54%, отримано таку формулу

$$\sin_1 g \approx -0,845 \cos^3 g + 0,226 \cos^2 g - 0,145 \cos g + 1.$$

На другому діапазоні, на якому  $\cos g \in (0,89; 0,99]$ ,  $\sin g$  апроксимовано з максимальною відносною похибкою апроксимації 1,7%:

$$\sin_2 g \approx -147,121 \cos^3 g + 397,543 \cos^2 g - 360,144 \cos g + 109,806 .$$

При апроксимації  $\sin g$ , для якого  $\cos g \in (0,99; 0,9998]$ , поліномом Чебишова третьої степені з максимальна абсолютна похибка не перевищує 0,013 отримано таку формулу:

$$\sin_3 g \approx -103700 \cos^3 g + 308600 \cos^2 g - 306200 \cos g + 101300.$$

На четвертому діапазоні, на якому  $\cos g \in (0,9998; 1]$ ,  $\sin_4 g = 0$ .

На рис. 2 показано апроксимацію синуса для діапазону кутів  $[0^\circ; 90^\circ]$ .

Розглянемо метод розрахунку синуса, який для визначення квадратного кореня ітераційним шляхом використовує формулу Герона [8]:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{S}{x_n} \right), \quad x_0 \approx \sqrt{S}, \quad (4)$$

де  $x_0$  – довільне додатне число,  $S = \sin^2 g$ . Точність отриманого значення квадратного кореня залежить від кількості ітерацій.

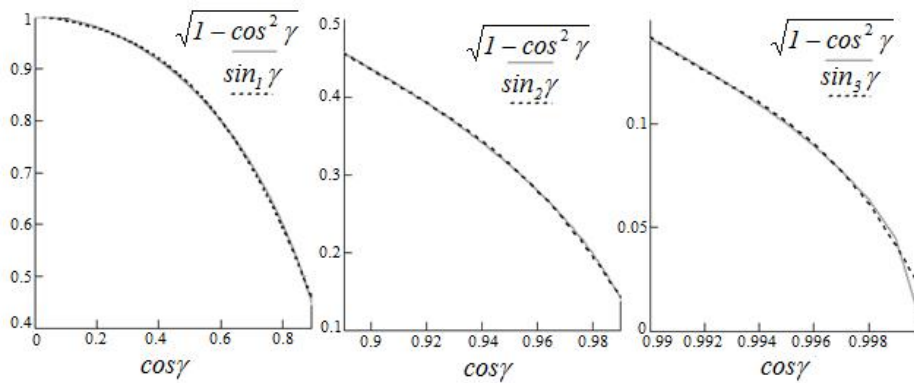


Рис.2. Графіки кусково-кубічної апроксимації синуса

Проведені дослідження показали, що при використанні початкового значення  $x_0 = 1/4$ , спільного для всіх значень  $\sin^2 g$ , для апроксимації синуса за формулою Герона з відносною похибкою, що не перевищує 0,25%, необхідно 4 ітерації. При цьому максимальна відносна похибка апроксимації для значень  $\sin^2 g > 0,002$  становить 0,22% (рис.3).

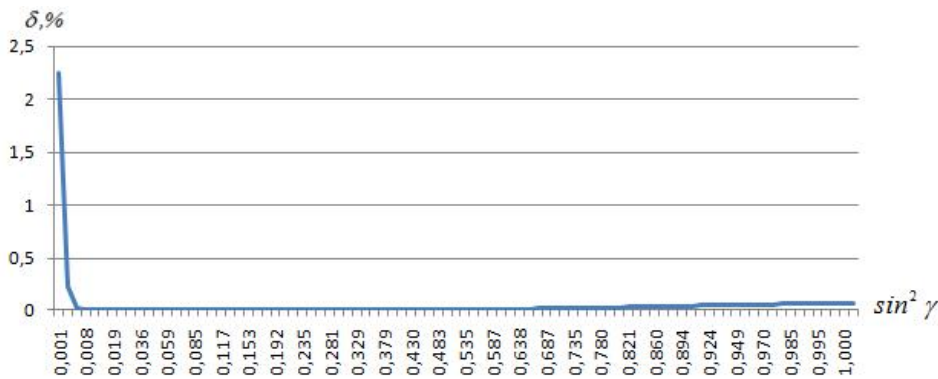


Рис. 3. Графік максимальної відносної похибки апроксимації синуса при виконанні 4 ітерацій формули Герона

Виконання 4 ітерацій за формулою (4) є трудомістким, оскільки передбачає чотири операції ділення. Знайдемо формулу для визначення синуса, яка містить лише одну операцію ділення.

Після першої ітерації

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{S}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + 4S \right) = \frac{1}{8} + 2S. \quad (5)$$

Після другої ітерації отримаємо

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{S}{x_1} \right) = \frac{x_1^2 + S}{2x_1}.$$

Знайдемо  $x_3$  з урахуванням формули для визначення  $x_2$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{x_1^2 + S}{2x_1} + \frac{2x_1S}{x_1^2 + S} \right) = \frac{(x_1^2 + S)^2 + 4x_1^2S}{4x_1(x_1^2 + S)}. \quad (6)$$

Уведемо позначення  $r_1 = (x_1^2 + S)$ . Тоді вираз (6) прийме вигляд  $x_3 = \frac{r_1^2 + 4x_1^2S}{4x_1r_1}$ .

Для четвертої ітерації можна записати

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( \frac{r_1^2 + 4x_1^2S}{4x_1r_1} + \frac{4x_1r_1S}{r_1^2 + 4x_1^2S} \right) = \frac{(r_1^2 + 4x_1^2S)^2 + 16x_1^2r_1^2S}{8x_1r_1(r_1^2 + 4x_1^2S)}. \quad (7)$$

Уведемо позначення  $r_2 = x_1^2S$  і  $r_3 = r_1^2 + 4r_2$ . Тоді формула (7) буде мати вигляд

$$x_4 = \frac{r_3^2 + 16r_2r_1^2}{8x_1r_1r_3} = \frac{r_3^2/8 + 2r_2r_1^2}{x_1r_1r_3}. \quad (8)$$

Таким чином для розрахунку синуса запропонованим методом необхідно виконати 1 операцію ділення, 7 операцій множення, 4 операції додавання та 9 операцій зсуву. Для процесорів сімейства Pentium Core 2 виконання операції квадратного кореня займає 70 тактів [9]. Сумарна кількість тактів, необхідна для реалізації запропонованої формули, становить 61 такт, що на 12,8% менше порівняно з традиційним підходом.

Суттєво зменшити обчислювальну складність при визначенні квадратного кореня можна за рахунок виконання 2 ітерацій формули Герона з поділом можливих значень  $\sin^2 g$  на п'ять діапазонів і використанням для кожного діапазону окремого початкового значення  $x_0$  (табл.1). При виборі початкових значень обирались значення, які кратні степені двійки, оскільки їх легко отримати шляхом простого зсуву.

Таблиця 1

Початкові значення  $x_0$  для різних діапазонів значень  $\sin^2 g$

Діапазон значень $\sin^2 g$	Початкове значення $x_0$
0,5–1	$x_0 = 1$
0,12–0,5	$x_0 = 1/2$
0,03–0,12	$x_0 = 1/4$
0,003–0,03	$x_0 = 1/8$
0–0,003	$x_0 = 1/32$

Для початкового значення  $x_0$  уведемо позначення  $x_0 = 1/2^k$ , де  $k = 0, 1, 2, 3, 5$ . Тоді першу та другу ітерацію формули (4) запишемо так

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^k} + 2^k S \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1 + 2^{2k} S}{2^k} \right) = \frac{1 + 2^{2k} S}{2^{k+1}}, \quad (9)$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{S}{x_1} \right). \quad (10)$$

Максимальна відносна похибка апроксимації для значень  $\sin^2 g > 0,005$  не перевищує 0,2%, а для діапазону  $[0,0003 \div 0,005]$  – 1,3%.

На рис. 4 зображено графік відносної похибки апроксимації синуса ітераційним методом для випадку виконання 2 ітерацій та п'яти різних початкових значень  $x_0$ .

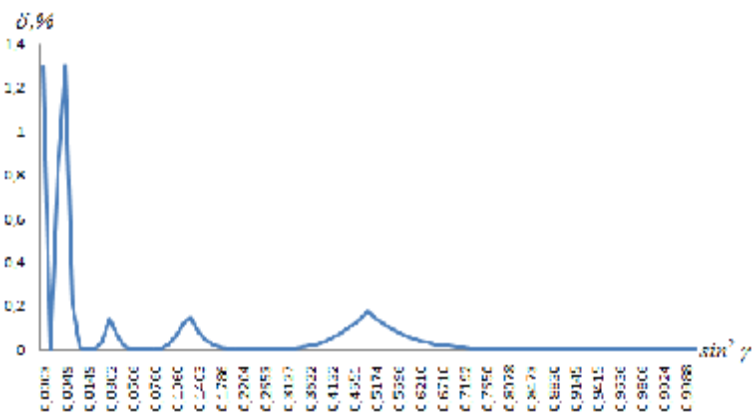


Рис.4. Графік максимальної відносної похибки апроксимації синуса при виконанні 2 ітерацій формули Герона

Особливістю формул (9) та (10) є те, що вони містять лише одну операцію ділення, 1 операцію інкрементування, 1 операцію

додавання та 3 операції зсуву, якими можна замінити операцію множення на  $2^{2k}$  та операції ділення на  $2^{k+1}$  і 2. З урахуванням перевірки значення  $\sin^2 g$  на належність до певного діапазону для реалізації запропоновано підходу необхідно 31 такт, що на 55,7% менше порівняно з традиційним підходом.

**Висновки**

У роботі запропоновано метод імітації нерівностей на поверхні, який характеризується відсутністю операцій збурення векторів нормалей та подальшої їх нормалізації, що суттєво спрощує процес формування зображень рельєфних поверхонь. Було запропоновано нову формулу для визначення спекулярної складової інтенсивності кольору, у якій імітація нерівності на поверхні відбувається шляхом зміни кута між вектором нормалі та вектором  $\vec{H}$  на певну величину  $dg$ .

Оскільки запропонована формула вимагає розрахунку значень синусів, що важко реалізовується апаратним шляхом, було запропоновано три підходи до апроксимації синусів через косинус більш простими виразами.

При використанні кусково-кубічної апроксимації з поділом значень квадрата синуса на чотири діапазони максимальна відносна похибка не перевищує 2%.

Запропоновано модифікацію формули Герона, яка за 4-ри ітерації забезпечує знаходження синуса з похибкою 0,22% для значень квадрата синуса більше 0,002. Даний підхід до апроксимації синуса вимагає виконання лише 1 операції ділення, 7 операцій множення, 4 операції додавання та 9 операцій зсуву. Сумарна кількість тактів, необхідна для реалізації запропонованої формули, становить 61 такт, що на 12,8% менше порівняно з традиційним підходом.

Третій підхід до апроксимації синуса передбачає виконання двох ітерацій формули Герона з поділом значень квадрата синуса на п'ять діапазонів. За такого підходу потрібно виконати лише одну операцію ділення, 1 операцію інкрементування, 1 операцію додавання та 3 операції зсуву, якими можна замінити операцію множення на  $2^{2k}$  та операції ділення на  $2^{k+1}$  і 2. З урахуванням перевірки значення  $\sin^2 g$  на належність до певного діапазону для реалізації запропонованого підходу необхідно 31 такт, що на 55,7% менше порівняно з традиційним підходом. Максимальна відносна похибка апроксимації для значень  $\sin^2 g > 0,005$  не перевищує 0,2%, а для діапазону  $[0,0003 \div 0,005]$  – 1,3%.

### Література

1. Blinn J. F. Simulation of wrinkled surfaces / J.F.Blinn // In Proceedings of the 5<sup>th</sup> annual conference on Computer graphics and interactive techniques, ACM Press. – 1978. – P. 286–292.
2. Kilgard J. A practical and robust bump-mapping technique for today's / J. Kilgard // In GDC 2000: Advanced OpenGL Game Development. - July 2000. – 24 p.
3. Peercy M. Efficient bump mapping hardware / M. Peercy, J. Airey, B. Cabral // SIGGRAPH'97. – NY. : ACM, 1997. – P. 303–306. – ISBN 0-89791-896-7.
4. Ikedo T. Illumination Engine for a Billion Pixels per Second / T. Ikedo // Technical Report HCIS-2203-03. – 2003. – 32 p.
5. Pharr M. Physically Based Rendering: From Theory to Implementation/ M. Pharr, G. Humphreys. – МК, 2010. – 1167 p.
6. Романюк О. Н. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об'єктів. Монографія. / О. Н. Романюк, А. В. Чорний. - Вінниця : УНІВЕСУМ-Вінниця, 2006. — 190 с.
7. Phong B.T. Illumination for computer generated images / B.T. Phong // Comm. of the ACM. – 18(6). – June 1975. – P. 311-317.
8. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. — М.: Лань, 2009. — 672 с.
9. Fog A. Instruction tables. Lists of instruction latencies, throughputs and microoperation breakdowns for Intel, AMD and VIA CPUs / A. Fog. – Copenhagen University College of Engineering, 2011. – 191 p.

### References

1. Blinn J. F. Simulation of wrinkled surfaces / J.F.Blinn // In Proceedings of the 5<sup>th</sup> annual conference on Computer graphics and interactive techniques, ACM Press. – 1978. – P. 286–292.
2. Kilgard J. A practical and robust bump-mapping technique for today's / J. Kilgard // In GDC 2000: Advanced OpenGL Game Development. - July 2000. – 24 p.
3. Peercy M. Efficient bump mapping hardware / M. Peercy, J. Airey, B. Cabral // SIGGRAPH'97. – NY. : ACM, 1997. – P. 303–306. – ISBN 0-89791-896-7.
4. Ikedo T. Illumination Engine for a Billion Pixels per Second / T. Ikedo // Technical Report HCIS-2203-03. – 2003. – 32 p.
5. Pharr M. Physically Based Rendering: From Theory to Implementation/ M. Pharr, G. Humphreys. – МК, 2010. – 1167 p.
6. Romaniuk O.N. Highly productive methods and means of shading three-dimensional graphic objects/ Monograph / O. N. Romaniuk, A.V. Chorny. - Vynytisia : UNIVERSUM-Vinnytsia, 2006. — 190 p.
7. Phong B.T. Illumination for computer generated images / B.T. Phong // Comm. of the ACM. – 18(6). – June 1975. – P. 311-317.
8. Demydovych B. P. Fundamentals of computational mathematic / B. P. Demydovych, I.A. Maron. — М.: Lan', 2009. — 672 p.
9. Fog A. Instruction tables. Lists of instruction latencies, throughputs and microoperation breakdowns for Intel, AMD and VIA CPUs / A. Fog. – Copenhagen University College of Engineering, 2011. – 191 p.

Рецензія/Peer review : 19.5.2014 p.

Надрукована/Printed :25.6.2014 p.