

УДК 621.396

О.В. БОНДАРЕНКО, Н.Н. ОДИНЦОВ, Н.М. САВИЦКАЯ

Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МОД В ВОЛНОВОДАХ
СЛОЖНОЙ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Получены выражения, определяющие собственные функции и собственные значения мод в волноводах составной секторной формы поперечного сечения.

Ключевые слова: волноводы, собственные функции, собственные значения

O.V. BONDARENKO, N.N. ODINCOV, N.M. SAVICKAYA
Odessa national academy of telecommunications named after O.S. Popov

DETERMINE THE CHARACTERISTICS OF MODES IN
THE COMPLEX CROSS-SECTIONAL SHAPE WAVEGUIDES

Determine formulae for define own functions and eigenvalues of modes in the component sector-shaped cross-section waveguide.

Keywords: waveguides, eigenfunctions, eigenvalues

В технике связи, а также в целом ряде других электротехнических устройств находят достаточно широкое применение металлические и диэлектрические волноводы. При этом чаще всего волноводы имеют прямоугольную либо круглую форму поперечного сечения.

Задача определения собственных функций и собственных значений мод в таких волноводах решается сравнительно просто, так как линии, ограничивающие контур поперечного сечения, совпадают с координатными поверхностями выбираемой при этом прямоугольной и цилиндрической систем координат соответственно, что не вызывает трудностей накладывать граничные условия для определения постоянных интегрирования при решении волнового уравнения [1, 2]. При этом используется, как правило, метод разделения переменных [1].

Особый случай представляют направляющие системы (НС) и, в частности, волноводы, имеющие сложную форму поперечного сечения, границы которой частично совпадают с координатными поверхностями выбранной системы координат, например такой, как крестообразная, Г-образная, Н-образная и другие. В этом случае для решения волнового уравнения возможно применить приближенные методы решения, такие как метод частичных областей [2], метод присоединенных уравнений [3] и другие. Кроме указанных выше форм поперечного сечения волноводов представляют практический интерес волноводы, имеющие составную секторную форму поперечного сечения (рис. 1). Частным случаем такой формы является волновод крестообразной секторной формы поперечного сечения (ВКСФПС) (рис. 1). Достоинством такой формы поперечного сечения является то, что электромагнитные волны в них, как показали исследования [4], сохраняют структуру поля волн волноводов круглой формы поперечного сечения и, вместе с тем, такая форма позволяет в заданных пределах изменять характеристики ВКСФПС (собственные значения), путем изменения параметров, характеризующих форму сечения.

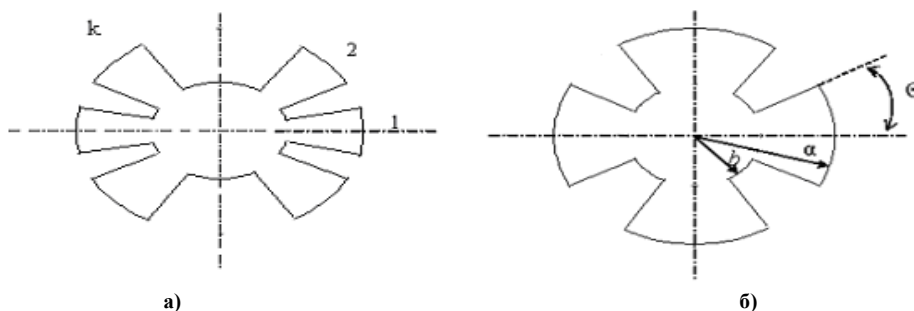


Рис. 1. Волноводы составной секторной формы

Диэлектрический волновод имеющий форму, представленную на рис. 1б), может быть использован в оптическом диапазоне длин волн. Иначе говоря, если сердцевине оптического волокна (ОВ) придать аналогичную данному рисунку форму, то при одномодовом режиме работы в случае существования в ОВ обыкновенной и необыкновенной волн связь между ними существенно уменьшится по сравнению с волокном круглой формы поперечного сечения, а переходное затухание между волнами увеличится. В результате может быть значительно уменьшена поляризационная модовая дисперсия сигнала в нем. Кроме того, на базе ВКСФПС могут быть созданы модоселективные направленные ответвители, обладающие хорошей избирательностью мод. В этой связи задача определения собственных функций и собственных

значений мод в волноводі крестообразної секторної форми поперечного сечення являється чрезвычайно важной как с теоретической, так и с практической точек зрения. На первом этапе исследования определим характеристики мод в металлическом волноводі крестообразной секторной формы поперечного сечения. В данном случае не может быть использован метод разделения переменных при решении волнового уравнения так как линии, ограничивающие контур поперечного сечения такого волновода только в некоторых местах совпадают с координатными поверхностями цилиндрической системы координат, которую естественно выбрать при решении волнового уравнения. Метод частичных областей в данном случае чрезвычайно трудно использовать ввиду того, что достаточно сложная форма поперечного сечения у волновода, составленного из секторов. Для анализа полей мод в таком волноводі желательно применить метод, обладающий универсальностью, сравнительной простотой и достаточной точностью. Этими свойствами в значительной степени обладает вариационный метод Ритца [5, 6].

Как известно [2] определение полей и нахождение собственных функций и собственных значений в волноводі с идеально проводящими стенками сводится к решению скалярного уравнения

$$\Delta_{\perp}\psi + \chi^2\psi = 0. \quad (1)$$

где $\nabla_{\perp}$ – двухмерный (поперечный) оператор Лапласа;

ψ – собственная функция магнитной моды, представляющая продольную компоненту магнитного вектора Герца, и связанная с продольным магнитным полем соотношением:

$$H_z = \chi^2\psi, \quad (2)$$

χ – собственное значение моды;

$$\chi^2 = k^2 - \beta^2, \quad (3)$$

k – волновое число в свободном пространстве;

β – фазовая постоянная этой моды.

Вначале определим собственные функции и собственные значения магнитных мод с краевым условием

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_L = 0, \quad (4)$$

где L – контур поперечного сечения волновода;

$\vec{n}$ – внешняя нормаль к контуру.

Для решения уравнения (1) естественно выбрана цилиндрическая система координат $(\vec{r}, \vec{\phi}, \vec{z})$ с началом в центре волновода и осью $\vec{z}$, совпадающей с осью волновода. Решение уравнения (1) будем искать на основе вариационного метода Ритца [5]. Согласно вариационному методу задача определения собственных значений мод сводится к исследованию на экстремум функционала

$$\chi^2 = \iint_S (\nabla_{\perp}\psi)^2 dS, \quad (5)$$

при условии, что

$$\iint_S \psi^2 dS = 1, \quad (6)$$

где $\nabla_{\perp}$ – двухмерный оператор Гамильтона;

ψ – собственная функция магнитной моды;

S – площадь поперечного сечения волновода.

Действительно [5], оператор Лапласа является самосопряженным ограниченным снизу оператором.

Найдем наименьшее собственное значение двухмерного оператора Лапласа:

$$\alpha = \inf \frac{(\Delta_{\perp}\psi, \psi)}{(\psi, \psi)}, \quad (7)$$

где в круглых скобках скалярное произведение, а $\inf$ – точная нижняя грань. Тогда α есть наименьшее собственное значение оператора $\Delta_{\perp}$ при условии существования элемента ψ_0 такого, что

$$\alpha = \frac{(\Delta_{\perp}\psi_0, \psi_0)}{(\psi_0, \psi_0)}. \quad (8)$$

Если такой элемент ψ_0 существует, то определение наименьшего собственного значения оператора $\Delta_{\perp}$ сводится к определению нижней грани величины (7) или то же что нижней грани величины

$$(\Delta_{\perp}\psi, \psi) \quad (9)$$

при дополнительном условии

$$(\psi, \psi) = 1. \quad (10)$$

Умножив скалярное уравнение (1) на ψ , получим:

$$\chi^2 = \frac{(\Delta_{\perp}\psi, \psi)}{(\psi, \psi)}. \quad (11)$$

Используя известную формулу Грина [7], получим:

$$(\Delta_{\perp}\psi, \psi) = \iint_S (\text{grad}_{\perp}\psi)^2 dS - \int_L \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dl. \quad (12)$$

Интеграл по контуру в выражении (12) равен нулю в силу граничного условия (4). Тогда из формулы (11) с учетом (10) и (12) получим:

$$\chi^2 = \iint_S (\text{grad}_{\perp}\psi)^2 dS = \iint_S (\nabla_{\perp}\psi)^2 dS. \quad (13)$$

Согласно методу Ритца [5] приближенное решение ψ_n уравнения (1) при условии (4) находится в виде:

$$\psi_n = \sum_{i=1}^n a_i u_i. \quad (14)$$

Последовательность достаточно гладких координатных функций $\{u_i\}$ должна быть полной линейно независимой системой. В соответствии с методом Ритца данные функции не обязаны удовлетворять естественному граничному условию. Однако, для улучшения сходимости ряда, будем выбирать их частично удовлетворяющими условию (4) на части контура L поперечного сечения волновода.

Коэффициенты a_i в решении (14) выбираются исходя из минимума функционала (13) при условии (10). Таким образом, задача сводится к нахождению минимума функции n переменных:

$$(\nabla_{\perp}\psi_n, \nabla_{\perp}\psi_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\nabla_{\perp}u_i, \nabla_{\perp}u_j) a_i a_j, \quad (15)$$

связанных уравнением:

$$(\psi_n, \psi_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_i, u_j) a_i a_j = 1, \quad (16)$$

где в круглых скобках скалярное произведение функций.

Составим функцию:

$$F = (\nabla_{\perp}\psi_n, \nabla_{\perp}\psi_n) - \chi^2 (\psi_n, \psi_n) \quad (17)$$

и из условия $\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0$ получим симметричную систему:

$$\sum_{j=1}^n a_j \left| (\nabla_{\perp}u_i, \nabla_{\perp}u_j) - \chi^2 (u_i, u_j) \right| = 0, \quad (18)$$

где $i, j = 1, 2, 3 \dots n$.

Из условия равенства нулю определителя линейной однородной относительно a_j системы (18) получается характеристическое уравнение для χ^2 .

Наименьший из корней определителя системы (18) будет равен минимуму выражения (15). Для нахождения приближенного k -го собственного значения необходимо искать минимум (15) при дополнительных условиях ортогональности собственных функций:

$$(\psi_l, \psi_l) = 1, \quad (\psi_l, \psi_m) = 0, \quad (m = 1, 2, 3 \dots l-1), \quad (19)$$

где ψ_m – приближенное значение m -ой нормированной функции оператора Лапласа.

Итак, определим собственные функции и собственные значения магнитных мод в составном секторном волноводе. Моды H_{mn} круглого волновода при переходе в составной секторный волновод возбуждают в нем свои аналоги – моды квази- H_{mn} . Представим собственную функцию моды квази- H_{mn} в волноводе с числом секторов $2k$ в виде суперпозиции k вырожденных мод квази- H_{mn} , отличающихся друг от друга поляризациями:

$$\psi_{mn} = \sum_m a_m J_m(v_{mn} r/a) \sum_{j=1}^k \cos m \left[\phi + (j-1) \frac{\pi}{k} \right], \quad (20)$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка m ;

v_{mn} – n -ый корень уравнения $J'_m(x) = 0$;

a – размер поперечного сечения волновода (рис. 1);

r, ϕ – текущие координаты цилиндрической системы;

a_m – нормированный по площади S поперечного сечения волновода коэффициент, определяемый

из условия (6).

Для составного секторного волновода с произвольным числом секторов $2k$ удалось получить сравнительно простые аналитические выражения, определяющие в первом приближении собственные функции и собственные значения через функции Бесселя и их комбинации в общем виде только для мод квази- H_{mn} . Для мод квази- H_{mn} с произвольным m эти выражения получены только для крестообразного секторного волновода (рис.1б).

Таким образом, при $k = 2$ из (20) получим выражение для собственной функции моды квази- H_{mn} :

$$\psi_{mn} = \sum_m a_m J_m(v_{mn} r/a) (\cos m\phi - \sin m\phi). \quad (21)$$

Эта функция является приближенным решением уравнения (1) при условиях (2) и (19).

Для определения ψ_{mn} и χ_{mn} можно ограничиться приближениями – функции $\cos m\phi J_m(v_{mn}r)$ и $\sin m\phi J_m(v_{mn}r)$, рассматриваемые для всех пар индексов, образуют ортогональную систему [4]. Для моды квази- H_{01} максимальная поправка к собственному значению, не превышает 6%, а к собственной функции – не более 10%. Последующие приближения дадут еще меньшие поправки. Тогда для моды квази- H_{mn} с учетом первого приближения выражение (21) будет иметь одно слагаемое

$$\psi_{mn} = a_m J_m(v_{mn} r/a) (\cos m\phi + \sin m\phi). \quad (22)$$

Собственное значение χ_{mn} мод квази- H_{mn} крестообразного секторного волновода определится в первом приближении из соотношения (18):

$$\chi_{mn} = \sqrt{\frac{(\nabla_{\perp} u_1, \nabla_{\perp} u_1)}{(u_1, u_1)}}. \quad (23)$$

В соответствии с (23) получим выражение для собственного значения χ_{mn} крестообразного секторного волновода:

$$\chi_{mn} = \frac{v_{mn}}{a} \left[\frac{(2\pi - 8\Theta) \frac{1}{2} \mu^2 Q_m(v_{mn}\mu) + 4\Theta Q_m(v_{mn})}{(2\pi - 8\Theta) \mu^2 P_m(v_{mn}\mu) + 8\Theta P_m(v_{mn})} \right], \quad (24)$$

Θ – угол, характеризующий раствора секторов (рис. 1).;

$\mu = \frac{b}{a}$; a и b – размеры поперечного сечения волновода (рис. 1).

При этом коэффициент a_{mn} , нормированный в соответствии с (4), определится выражением:

$$a_{mn} = \frac{\sqrt{2}}{a [\mu^2 (2\pi - 8\Theta) P_m(v_{mn}\mu) + 8\Theta P_m(v_{mn})]^{1/2}}; \quad (25)$$

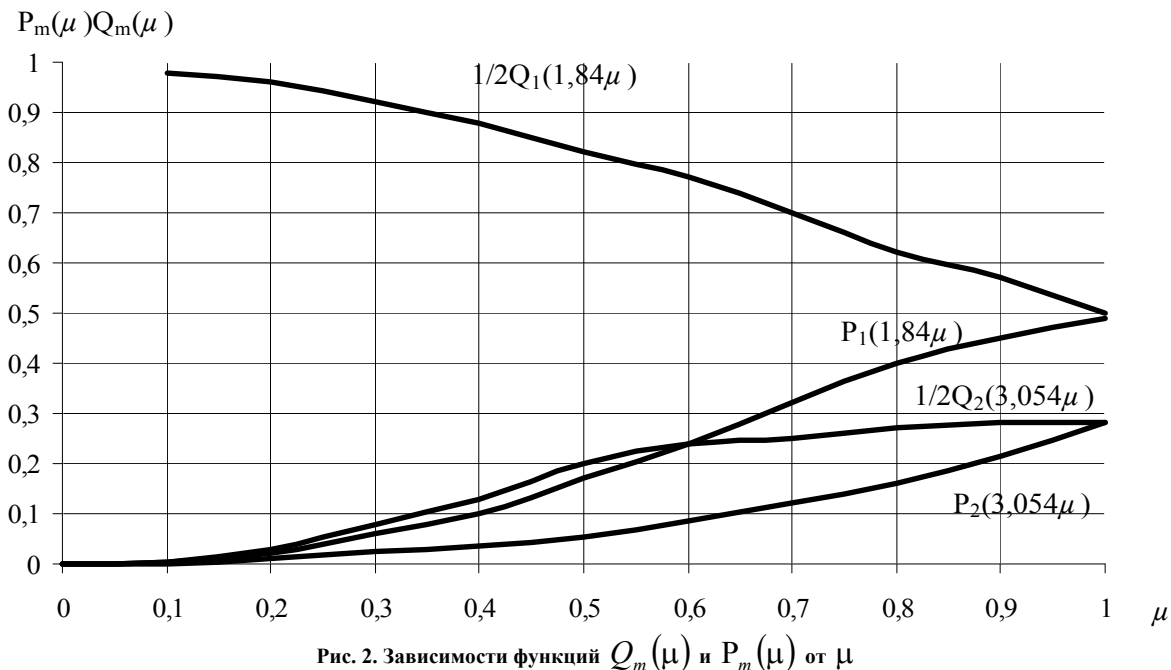
где

$$Q_m(x) = [J_{m-1}^2(x) - J_{m-2}(x)J_m(x) + J_{m+1}^2(x) - J_m(x)J_{m+2}(x)]; \quad (26)$$

$$P_m(x) = [J_m^2(x) - J_{m-1}(x)J_{m+1}(x)]; \quad (27)$$

Таким образом, из выражений (24) и (25) могут быть получены величины собственных значений χ и нормированных коэффициентов a любой моды квази- H_{mn} крестообразного секторного волновода через функции $Q_m(v_{mn}\mu)$ и $P_m(v_{mn}\mu)$, которые представляют собой некоторые комбинации бесселевых функций первого рода порядка m .

На рис. 2 представлены в качестве примера графики функций $\frac{1}{2}Q_1(1,84\mu)$, $\frac{1}{2}Q_2(3,054\mu)$ и $P_1(1,84\mu)$, $P_2(3,054\mu)$ рассчитанные по формулам (26) и (27) соответственно.



Выводы

- полученные в данной работе соотношения позволяют определить в первом приближении характеристики мод квази- H_{mn} в крестообразном секторном волноводе, а также мод квази- H_{0n} в составном секторном волноводе с произвольным числом секторов;
- для определения собственных значений χ и нормированных коэффициентов собственных функций необходимо знать параметры μ и Θ , характеризующие форму поперечного сечения волновода, а также предложенные в работе функции $Q_m(\nu_{mn}, \mu)$ и ;
- аналогично рассмотренному здесь вопросу определения собственных функций и собственных значений мод квази- H_{mn} в металлическом волноводе, на основе метода Ритца, могут быть определены характеристики мод в диэлектрическом волноводе крестообразной секторной формы поперечного сечения. Однако эта задача является более сложной, так как при этом краевое условие (4) не выполняется.

Литература

1. Машковцев Б.М. Теория волноводов / Б.М. Машковцев, К.Н. Цибизов, Б.Ф. Емелин – М.-Л.: Наука, 1966 - 354 с.
2. Коган Л.Н. Сложные волноводные системы / Л.Н. Коган, Б.М. Машковцев, К.И. Цибизов. – Л.: Судпромшз, 1963. – 355 с.
3. Демидович Б.П. Численные методы анализа / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова – М.: Наука, 1967. – 368 с.
4. Макаров Т.В. Волны квази- H_{01} и квази- H_{02} в крестообразном волноводе / Т.В. Макаров, Н.Н. Одинцов / Антенны. – М.: Связь, 1973. – С. 129–136.
5. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М. - Л.: Гиттл, 1950 – 428 с.
6. Краснов М.Л. Вариационное исчисление / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А.И. Киселев – М.: Наука, 1973. – 192 с.
7. Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Л. Гильберт – М. - Л.: Гиттл, 1951 – том 1 – 476 с., том 2 – 544 с.

References

1. Mashkovtsev B.M. Teoriya volnovodov / B.M. Mashkovtsev K.N. Tsibizov, B.F. Emelin – M.-L.: Nauka, 1966 - 354 s.
2. Kogan L.N. Slozhnye volnovodnye sistemy / L.N. Kogan, B.M. Mashkovtsev, K.I. Tsibizov. – L.: Sudpromshz, 1963. – 355 s.
3. Demidovich B.P. Chislennue metody analiza / B.P. Demidovich, I.A. Maron, E.Z. Shyvalova. – M.: Nauka, 1967. – 368 s.
4. Makarov T.V. Volnu kvazi- H_{01} i kvazi- H_{02} v krestobraznom volnovode / T.V. Makarov, N.N.Odinov / Antennu. – M.: Svyaz', 1973. – S. 129–136.
5. Mikhlin S.G. Pryamye metody v matematicheskoy fizike / S.G. Mikhlin. – M. - L.: Gittl, 1950 – 428 s.
6. Krasnov M.L. Variacionnoe ischislenie / M.L. Krasnov, G.I. Makarenko, A.I. Kisel'ov. – M.: Nauka, 1973. – 192 s.
7. Kyrant R. Metody matematicheskoy fiziki / R. Kyrant, L. Gil'bert. – M. - L.: Gittl, 1951 – tom 1 – 476 s., tom 2 – 544 s.