УДК 519.2, 536.532

В.О. ЄРЬОМЕНКО
Тернопільський національний економічний університет
О.В. КОЧАН
Національний університет «Львівська політехніка»

ДОСЛІДЖЕННЯ КЛАСИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ БЕЗ ВІЛЬНОГО ЧЛЕНА. ЧАСТИНА І. ПОБУДОВА ЕМПІРИЧНО ЕФЕКТИВНИХ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ

Для поліноміальної регресійної моделі без вільного члена виявлені негативні наслідки безпосереднього використання метода найменших квадратів (МНК): сума емпіричних залишків, як правило, не дорівнює нулю, що суперечить стандартному припущення про рівність нулю математичного сподівання збурення, а також унеможливлює коректно визначити коефіцієнт детермінації.

Встановлено, що пакети прикладних програм, зокрема всі версії Excel, не враховують вказані недоліки. На підставі модифікації МНК побудовані статистичні оцінки невідомих параметрів та досліджені їх властивості. Отримані оцінки та їх числові характеристики виражені через МНК-оцінки та їх відповідні характеристики.

Розроблено ефективний алгоритм побудови варіантів інших лінійних оцінок, один з яких для фіксованої вибірки володіє найменшими стандартними помилками коефіцієнтів емпіричного рівняння регресії.

Ключові слова: Класична поліноміальна регресійна модель, метод найменших квадратів (МНК), МНК-оцінки, модифікації МНК, лінійні незміщені оцінки, мінімізація стандартних помилок.

VALERIY YEROMENKO
Ternopil National Economic University
OREST KOCHAN
Lviv National Polytechnic University

THE STUDY OF CLASSICAL POLYNOMIAL REGRESSION MODELS WITHOUT A CONSTANT TERM. PART I. BUILDING EMPIRICALLY EFFECTIVE ESTIMATES OF THE PARAMETERS OF REGRESSION MODELS

There is a drawback of direct method of least squares application for polynomial regression without a constant term found: sum of residuals, as a rule, is not zero. This contradicts to standard assumption of equality to zero of residual expectation and makes correct calculation the coefficient of determination impossible.

It is discovered that applied software, all versions of MS Excel in particular, do not take into account this drawback. Classical method of least squares is modified to design statistical estimates of unknown parameters and investigated their properties. Obtained estimates and their numerical characteristics are expressed using corresponding least squares characteristics and parameters.

Effective algorithm for designing other linear estimates of unknown coefficients is developed in this paper. One of these variants has smallest standard deviations of coefficients of empirical regression equation for a fixed sample.

Key words: Classical polynomial regression, the method of least squares, least-squares estimates, modified least squares, linear unbiased prediction, minimization of standard deviations.

Вступ. Математичне моделювання похибок широкої номенклатури компонентів інформаційно-вимірювальних систем зумовлює необхідність дослідження класичних поліноміальних регресійних моделей , вільний член яких, згідно із їх фізичним змістом, дорівнює нулю [1]. На перший погляд такий випадок не заслуговує уваги з урахуванням того, що у ряді пакетів прикладних програм, зокрема в Excel усіх версій, реалізується дослідження як загального, так і цього випадку. Однак виявляється [1], що випадок відсутності вільного члена вимагає окремого дослідження та обережності у статистичних висновках. Зауважимо, що автори посібників, у яких наведені результати дослідження лінійних за параметрами регресійних моделей з допомогою класичного методу найменших квадратів (МНК), явно або неявно постулюють відмінність від нуля вільного члена [2-5].

1. **Об'єктом дослідження** є поліноміальна класична регресійна модель

$$\tilde{Y} = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_k t^k + \tilde{U}, \tag{1}$$

де $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k$ невідомі параметри моделі; t - детермінована незалежна змінна; $\tilde{U}$ – неспостережувана випадкова величина (збурення); $\tilde{Y}$ – результуюча (залежна) випадкова величина.

Вхідною інформацією є статистичні дані вибірки обсягом $n > k$.

Метою роботи є вивчення питань:

1) негативні наслідки безпосереднього використання МНК;

2) здійснення модифікації МНК, з допомогою якої будуються статистичні оцінки невідомих параметрів та дослідження властивостей цих оцінок;

3) побудова емпіричних рівнянь регресії з мінімальними стандартними помилками коефіцієнтів регресії.

Нехай t набирає значення $t_1, t_2, \ldots t_n$, $t_i \neq t_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1,n}$. Тоді з (1) отримуються n рівнянь

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j t_i^j + U_i, \; i = \overline{1,n} . \tag{2}$$

Для повної специфікації моделі (2) покладемо, що виконуються наступні умови

$$M\left(U_i\right)=0\,,\ D(U_i)=\sigma^2\,,\ \operatorname{cov}(U_i,U_j)=0\,,\ \forall i,j=\overline{1,n}\,,i\neq j\,, \tag{3}$$

де σ^2 – невідомий параметр, який підлягає оцінюванню.

За конкретною вибіркою $\left\{\left(y_i,t_i\right),i=\overline{1,n}\right\}$ отримаємо оцінку моделі (2)

$$y_i=\sum_{j=1}^{k}a_j t_i^{\,j}+u_i\ ,\ i=\overline{1,n}\,, \tag{4}$$

де $a_1,a_2,...,a_k$ - оцінки невідомих параметрів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ відповідно; u_i - емпіричний залишок регресії для $t=t_i$. Позначимо

$$u_i=y_i-\widehat{y}_i=y_i-\sum_{j=1}^{k}a_j t_i^{\,j},i=\overline{1,n}. \tag{5}$$

Емпіричні залишки визначаються неоднозначно в залежності від методу знаходження оцінок параметрів. Однак згідно з першою умовою (3) у кожному випадку повинна виконуватися рівність

$$\sum_{i=1}^{n}u_i=0\,. \tag{6}$$

У випадку використання МНК оцінки $a_1,a_2,...a_k$ з урахуванням (5) знаходяться як розв'язок системи k нормальних рівнянь

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}u_i t_i^{\,j}=0,\qquad j=\overline{1,k}\,.\right. \tag{7}$$

Очевидно, що отримані МНК-оцінки в загальному випадку не задовольнятимуть рівність (6). Зауважимо, що наявність у поліноміальній моделі вільного члена зумовлює приєднання до системи (7) рівняння (6).

Більше того, невиконання (6) унеможливлює так звану декомпозицію дисперсій, оскільки виконується [1] рівність

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\widehat{y}_i-\overline{y}\right)^2-2\overline{y}\sum_{i=1}^{n}u_i+\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\widehat{y}\right)^2\,,$$

де $\overline{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\,/\,n$. Ця рівність не дозволяє коректно визначити коефіцієнт детермінації R^2.

Як ілюстрацію розглянемо модель (2) для випадку $k=2$ на підставі вибірки [6]

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	45,92	100	127,9	132,8	146	157,4	154,2	146

, (8)

де t_i - значення температури в сотнях градусів за Цельсієм, y_i - значення похибки неоднорідності хромелевого термоелектроду діаметром 0,7 мм при температурі експлуатації 800°C протягом 1000 годин. Із системи (7) отримаємо МНК-оцінки: $a_1=52,652803$, $a_2=-4,366166$, на підставі яких $\sum_{j=1}^{8}u_i=5.417063$. При цьому згідно із пакетом Excel $R^2=0,960132$ в той час як $\sum_{i=1}^{8}\left(y_i-\overline{y}\right)^2<\sum_{i=1}^{8}\left(\widehat{y}_i-\overline{y}\right)^2$.

Надалі інші оцінки параметрів розподілу, позбавлені недоліку МНК-оцінок, а також їх числові характеристики зобразимо через МНК-оцінки $a_1,a_2...a_k$ та їх характеристики і так звану сумарну нев'язку

$$\varepsilon\left(k\right)=\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{j=1}^{k}T_j a_j\,, \tag{9}$$

де

$$T_j=\sum_{i=1}^{n}t_i^{\,j},\,j=\overline{1,k}\,. \tag{10}$$

2. Для подолання розглянутого недоліка МНК-оцінювання невідомих параметрів розглянемо задачу знаходження умовного екстремуму

$$Q\left(b_1,b_2\ldots b_k\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\sum_{j=1}^{k}b_j t_i^{\,j}\right)^2\to\min$$

при умові

$$T_1b_1+T_2b_2+,\ldots,+T_kb_k=\sum_{i=1}^{n}y_i\,.$$

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа

$$L\left(b_1,b_2,\ldots,b_k,\lambda\right)=Q\left(b_1,b_2,\ldots,b_k\right)+\lambda\left(T_1b_1+T_2b_2+,\ldots,+T_kb_k-\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

дають наступну систему рівнянь для невідомих оцінок $b_1,b_2,...,b_k$ параметрів $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$:

$$\begin{cases} T_1b_1+T_2b_2+\ldots+T_kb_k=T_{y,o}\ , \\ T_2b_1+T_3b_2+\ldots+T_{k+1}b_k+T_1\dfrac{\lambda}{2}=T_{y,1}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{k+1}b_1+T_{k+2}b_2+\ldots+T_{2k}b_k+T_k\dfrac{\lambda}{2}=T_{y,k}\ , \end{cases}, \tag{11}$$

де

$$T_{y,m}=\sum_{i=1}^{n}t_i^m y_i,\ m=\overline{0,k}\ . \tag{12}$$

Позначивши

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & T_2 & \cdots & T_k & 0 \\ T_2 & T_3 & \cdots & T_{k+1} & T_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{k+1} & T_{k+2} & \cdots & T_{2k} & T_k \end{pmatrix},\ T_y=\begin{pmatrix} T_{y,o} \\ T_{y,1} \\ \ldots\ldots \\ T_{y,k} \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix},\ \Delta=\det T\ , \tag{13}$$

систему (11) запишемо в матричному виді

$$T\begin{pmatrix} b \\ \lambda/2 \end{pmatrix}=T_y\ . \tag{14}$$

Нижче встановимо невиродженість матриці T і залежність знака її визначника від k.

З (14)

$$b=BT_y\ , \tag{15}$$

де

$$B=\Delta^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1,k+1} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{k,1} & B_{k,2} & \cdots & B_{k,k+1} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

B_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента $(.)_{ij}$ матриці $T^{/}$, транспонованої до T.

Виразимо вектор b через вектор МНК-оцінок $a=col(a_1,a_2,...,a_k)$, тобто знайдемо такий k-вимірний вектор c, для якого виконується рівність

$$b=a+c\ . \tag{17}$$

Для цього врахуємо, що система рівнянь (7) має такий вид

$$\tilde{T}a=\begin{pmatrix} T_{y,1} \\ T_{y,2} \\ \ldots \\ T_{y,k} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

де

$$\tilde{T}=\begin{pmatrix} T_2 & T_3 & \cdots & T_{k+1} \\ T_3 & T_4 & \cdots & T_{k+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{k+1} & T_{k+2} & \cdots & T_{2k} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

На підставі (13), (17), (18) і (9) отримаємо

$$T\begin{pmatrix} c \\ \lambda/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon(k) \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки

$$c = \Delta^{-1}\varepsilon\left(k\right)B_{*1}\,,\; \lambda\!\big/\!_2 = \Delta^{-1}\varepsilon(k)B_{k+1,1}\,, \tag{20}$$

де B_{*1} – перший стовпець матриці ΔB (B визначена (16)). Отже, остаточно

$$b = a + \Delta^{-1}\varepsilon\left(k\right)B_{*1}\,. \tag{21}$$

Викладений метод природно назвати методом умовних найменших квадратів, а отримані оцінки (компоненти вектора b) невідомих параметрів – МУНК-оцінками.

3. Для дослідження властивостей МУНК-оцінок розглянемо випадок нефіксованої вибірки. Тоді результуюча ознака набирає значення $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, які є випадковими величинами. З'ясуємо залежність вектора b від цих величин.

Позначимо

$$\tau = \begin{pmatrix} t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^k \\ t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^k \end{pmatrix},\; Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \ldots \\ Y_n \end{pmatrix},\; \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_k \end{pmatrix},\; U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \ldots \\ U_n \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Тоді модель (2) у векторно-матричній формі запишеться в такій формі

$$Y = \tau\alpha + U, \tag{23}$$

а з урахуванням (10), (12), (13) і (19) рівняння (18) –

$$\tau^{/}\tau a = \tau^{/}Y\,, \tag{24}$$

звідки

$$a = \left(\tau^{/}\tau\right)^{-1}\tau^{/}Y\,, \tag{25}$$

Крім того з (9)

$$\varepsilon(k) = (1,1,...,1)Y - (T_1, T_2, ..., T_k)(\tau^{/}\tau)^{-1}\tau^{/}Y\,,$$

з (17) і (21)

$$b = (\tau^{/}\tau)^{-1}\tau^{/}Y + \Delta^{-1}[(1,1,...,1)Y - (T_1, T_2, ..., T_k)(\tau^{/}\tau)^{-1}\tau^{/}Y]B_{*1}\,, \tag{26}$$

а з урахуванням (23)

$$b = \alpha + (\tau^{/}\tau)^{-1}\tau^{/}U + \Delta^{-1}[\sum_{i=1}^{n}U_i - (T_1, T_2, ..., T_k)(\tau^{/}\tau)^{-1}\tau^{/}U]B_{*1}\,, \tag{27}$$

З рівняння (24) безпосередньо отримаємо рівності

$$a_j = x^{(j)}Y,\; j = \overline{1,k}\,, \tag{28}$$

де

$$x^{(j)} = \Delta_1^{-1}A_{j*}\tau^{/},\; \Delta_1 = \det\tilde{T} = \det(\tau^{/}\tau)\,, \tag{29}$$

A_{j*} – j-й рядок матриці A, елементи якої є алгебраїчним доповненням елементів матриці $\left(\tau^{/}\tau\right) = \tilde{T}$.

Властивість 1. МУНК-оцінки є лінійними комбінаціями спостережених значень $Y_{1,}\; Y_2,\; ...,\; Y_k$:

$$b_j = v^{(j)}Y,\; j = \overline{1,k}\,, \tag{30}$$

де вектори $v^{(j)}$ вагових коефіцієнтів визначаються формулами:

$$v^{(j)} = x^{(j)} + \Delta^{-1}B_{j1}[(1,1,...,1) - \Delta_1^{-1}\sum_{s=1}^{k}T_s x^{(s)}],\; j = \overline{1,k}\,, \tag{31}$$

і задовольняють співвідношення

$$\begin{pmatrix} v^{(1)} \\ v^{(2)} \\ ... \\ v^{(k)} \end{pmatrix}\tau = I_k\,, \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{k}T_j v^{(j)} = (1,1,...,1)\,, \tag{33}$$

Рівності (30) і (31) отримуються з (26) з урахуванням (28) та (29), а співвідношення (32) випливає з (31) та рівностей

$$\begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ ... \\ x^{(k)} \end{pmatrix} \tau = I_k, \ (1,1,...,1)\tau = (T_1, T_2, ...T_k).$$

З першого рівняння системи (11) і співвідношень (12) та (30) отримаємо рівність відносно випадкових величин

$$[T_1 v^{(1)} + T_2 v^{(2)} + ... + T_k v^{(k)} - (1,1,...,1)]Y = 0,$$

з якої з необхідністю випливає рівність (33).

Властивість 2. Якщо виконується перша умова (3), тоді МУНК-оцінки $b_{1,}$ b_2, ..., b_k є незміщеними оцінками відповідних параметрів $\alpha_{1,}$ α_2, ..., α_k, тобто

$$M(b) = \alpha. \tag{34}$$

Ця рівність безпосередньо отримується з (27) з урахуванням детермінованості матриці T, властивостей математичного сподівання і першої умови (3).

Знайдемо коваріаційну матрицю вектора b МУНК-оцінок. Позначивши скаляр

$$d = \Delta^{-1}[\sum_{i=1}^{n} U_i - (T_1, ...T_k)(\tau'\tau)^{-1}\tau' U], \tag{35}$$

і використавши (27) та симетричність матриці $\tau'\tau$, отримаємо

$$\Sigma_b = M\left[(b-\alpha)(b-\alpha)'\right] = M\left\{\left[\left(\tau'\tau\right)^{-1}\tau' U + dB_{*1}\right]\left[U'\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1} + dB'_{*1}\right]\right\}.$$

З урахуванням (3), детермінованості T і властивостей математичного сподівання послідовно знайдемо:

$$M\left[\left(\tau'\tau\right)^{-1}\tau' UU'\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1}\right] = \left(\tau'\tau\right)^{-1}\tau' M\left(UU'\right)\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1} = \sigma^2\left(\tau'\tau\right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} M\left(\tau' Ud\right) &= \Delta^{-1}\left\{\tau'\left[M\left(U\sum_{i=1}^{n}U_i\right) - M\left(UU'\right)\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...,T_k\right)'\right]\right\} = \\ &= \sigma^2\Delta^{-1}\left[\tau'(1,...,1)' - \tau'\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...,T_k\right)'\right] = O_{k,1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M\left(d^2\right) &= \Delta^{-2}[M\left(\sum_{i=1}^{n}U_i\right)^2 - 2M\left(U'\sum_{i=1}^{n}U_i\right)\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...,T_k\right)' + \\ &+ \left(T_1,...,T_k\right)\left(\tau'\tau\right)^{-1}\tau' M\left(UU'\right)\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...,T_k\right)'] = \\ &= \sigma^2\Delta^{-2}\left[n - 2(1,...,1)\tau\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...,T_k\right)' + \left(T_1,...,T_k\right)\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...,T_k\right)'\right] = \\ &= \sigma^2\Delta^{-2}\left[n - \left(T_1,...,T_k\right)\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...,T_k\right)'\right] \end{aligned}, \tag{36}$$

де $O_{k,1}$ - нульовий k-вимірний вектор-стовпець. Тобто, попередньо

$$\Sigma_b = \sigma^2\left\{\left(\tau'\tau\right)^{-1} + \Delta^{-2}\left[n - \left(T_1,...T_k\right)\left(\tau'\tau\right)^{-1}\left(T_1,...T_k\right)'\right]B_{*1}B'_{*1}\right\}. \tag{37}$$

Для остаточного спрощення отриманого виразу врахуємо рівність

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 & ... & T_k & 0 \\ & & & & T_1 \\ & \tau'\tau & & & T_2 \\ & & & & ... \\ & & & & T_k \end{pmatrix}, \tag{38}$$

симетричність матриці $\tilde{T} = \tau'\tau$ і знайдемо $\Delta = \det T$, розклавши спочатку визначник за елементами першого рядка, а потім розкладаючи отримані визначники порядку k за елементами останніх стовпців:

$$\Delta = \det T = T_1 \begin{vmatrix} T_3 & T_4 & \dots & T_{k+1} & T_1 \\ T_4 & T_5 & \dots & T_{k+2} & T_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{k+2} & T_{k+3} & \dots & T_{2k} & T_k \end{vmatrix} - T_2 \begin{vmatrix} T_2 & T_4 & \dots & T_{k+1} & T_1 \\ T_3 & T_4 & \dots & T_{k+2} & T_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{k+1} & T_{k+2} & \dots & T_{2k} & T_k \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{k+1} T_k \begin{vmatrix} T_2 & T_3 & \dots & T_k & T_1 \\ T_3 & T_4 & \dots & T_{k+1} & T_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{k+1} & T_{k+2} & \dots & T_{2k-1} & T_k \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} (T_1^2 A_{11} + T_1 T_2 A_{21} + \dots + T_1 T_k A_{k1} +$$

$$+T_1 T_2 A_{12} + T_2^2 A_{22} + \dots + T_2 T_k A_{k2} + \dots + T_1 T_k A_{k1} + T_2 T_k A_{k2} + \dots + T_k^2 A_{kk}) =$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_{i,j=1}^{k} T_i T_j A_{ij} = (-1)^{k+1} \Delta_1 (T_1, \dots, T_k) (\tau' \tau)^{-1} (T_1, \dots, T_k)' .$$

Звідси

$$(T_1, \dots T_k)(\tau'\tau)^{-1}(T_1, \dots T_k)' = (-1)^{k+1} \Delta \Delta_1^{-1}, \tag{39}$$

Відмітимо, що згідно з (19) Δ_1 є визначником Грама, породженим системою k лінійно незалежних n-вимірних векторів $\left\{ \left(t_1^j,\ t_2^j,\ \dots,\ t_n^j \right),\ j = \overline{1,k} \right\}$, де $k < n$. А тому згідно [7] $\Delta_1 > 0$ і квадратична форма $(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_k)\tau'\tau(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_k)' > 0$ для всіх нетривіальних значень ξ_i. Тоді можна довести, що $(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_k)(\tau'\tau)^{-1}(\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_k)' > 0$, якщо $\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \neq 0$. Тобто, з (39) випливає, що матриця T є невиродженою і $(-1)^{k+1}\Delta > 0$.

Отже, врахувавши (39) і рівність $\sum_a = (\tau'\tau)^{-1}$, з (37) отримаємо

$$\Sigma_b = \sigma^2 \left[\Sigma_a + \Delta^{-2} \left(n - |\Delta| \Delta_1^{-1} \right) B_{*1} B_{*1}' \right], \tag{40}$$

тобто

$$\sigma_{b_i}^2 = D(b_i) = \sigma^2 \left[K_{ii} + \Delta^{-2} \left(n - |\Delta| \Delta_1^{-1} \right) B_{i1}^2 \right],\ i = \overline{1,k}, \tag{41}$$

$$\operatorname{cov}(b_i, b_j) = \sigma^2 \left[\operatorname{cov}(a_i, a_j) + \Delta^{-2} \left(n - |\Delta| \Delta_1^{-1} \right) B_{i1} B_{j1} \right],\ i, j = \overline{1,k},\ i \neq j,$$

де K_{ii} - i-й діагональний елемент матриці $(\tau'\tau)^{-1}$.

У співвідношеннях (40), (41) невідомим є параметр σ^2, який підлягає оцінюванню. Позначимо $u = (u_1,\ u_2, \dots, u_n)'$, $u_i = y_i - \sum_{j=1}^{k} b_j t_i^j$, $i = \overline{1,n}$. Тоді згідно з (22), (23), (27) і (35) для нефіксованої вибірки

$$u = Y - \tau b = \tau\alpha + U - \tau \left[\alpha + (\tau'\tau)^{-1} \tau' U + dB_{*1} \right] = \left[I_n - \tau (\tau'\tau)^{-1} \tau' \right] U - d\tau B_{*1},$$

$$u' = U' \left[I_n - \tau (\tau'\tau)^{-1} \tau' \right] - dB_{*1}' \tau',$$

$$u'u = U' \left[I_n - \tau (\tau'\tau)^{-1} \tau' \right]^2 U - dU' \left[I_n - \tau (\tau'\tau)^{-1} \tau' \right] \tau B_{*1} - dB_{*1}' \tau' \left[I_n - \tau (\tau'\tau)^{-1} \tau' \right] U + d^2 B_{*1}' \tau' \tau B_{*1},$$

де I_n - одинична матриця порядку n.

Оскільки матриця $I_n - \tau(\tau'\tau)^{-1}\tau'$ ідемпотентна, а другий і третій доданки рівні нулю, то

$$M(u'u) = M\left\{ U' \left[I_n - \tau (\tau'\tau)^{-1} \tau' \right] U \right\} + M(d^2) B_{*1}' \tau' \tau B_{*1}, \tag{42}$$

Стандартні обчислення з використанням (3) дають рівність

$$M\left\{ U' \left[I_n - \tau (\tau'\tau)^{-1} \tau' \right] U \right\} = (n-k)\sigma^2, \tag{43}$$

У відповідності із змістом B_{ij} та (16)

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} B \\ \Delta^{-1} B_{k+1,1}\ \dots \Delta^{-1} B_{k+1,k+1} \end{pmatrix};$$

всі рядки від другого до $(k+1)$-го матриці T ортогональні до першого стовпця матриці T^{-1}, а тому з врахуванням (38), $\tau'\tau B_{*1} = -B_{k+1,1}(T_1\ , \dots,\ T_k)'$.

Розклад $\det T^{/}$ по першому стовпцю дає рівність $(T_1,...,T_k)B_{*1}=\Delta$, враховуючи яку отримаємо $B_{*1}^{/}\tau\tau^{/}B_{*1}=-B_{k+1,1}\Delta$. Але згідно з означенням та (29) $B_{k+1,1}=(-1)^{k+2}\Delta_1=(-1)^k\Delta_1$. Тому

$$B_{*1}^{/}\tau^{/}\tau\ B_{*1}=(-1)^{k+1}\Delta_1\Delta=\Delta_1|\Delta|, \tag{44}$$

З (36) та (39) випливає рівність

$$M\left(d^2\right)=\sigma^2\Delta^{-2}\left(n-|\Delta|\Delta_1^{-1}\right), \tag{45}$$

Підставивши (43) - (45) в (42), остаточно отримаємо

$$M\left(u^{/}u\right)=\sigma^2\left[n\left(1+\Delta_1|\Delta|^{-1}\right)-k-1\right], \tag{46}$$

Рівність (46) означає, що незміщена оцінка S^2 параметра σ^2 визначається за формулою

$$S^2=\sum_{i=1}^{n}u_i^2\left[n\left(1+\Delta_1|\Delta|^{-1}\right)-k-1\right]^{-1}, \tag{47}$$

Підсумовує викладене

Властивість 3. Якщо виконуються умови (3), тоді оцінена коваріаційна матриця МУНК-оцінок b має такий вид

$$\widehat{\Sigma}_b=S^2\left[\Sigma_a+\Delta^{-2}\left(n-|\Delta|\Delta_1^{-1}\right)B_{*1}B_{*1}^{/}\right], \tag{48}$$

де S^2, Δ і Δ_1 визначені співвідношеннями (47), (13) і (29) відповідно.

Зауважимо, що

$$n+(-1)^k\Delta\Delta_1^{-1}\equiv n-|\Delta|\Delta_1^{-1}>0, \tag{49}$$

оскільки з урахуванням $\Delta_1>0$ ця нерівність рівносильна нерівності $n\Delta_1+(-1)^k\Delta>0$, правильність якої отримується з використанням (13), (29) і властивостей визначника:

$$n\Delta_1+(-1)^k\Delta=(-1)^k\begin{vmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & n\\ & & & & T_1\\ & & \tau^{/}\tau & & \dots\\ & & & & T_k\end{vmatrix}+(-1)^k\begin{vmatrix}T_1 & T_2 & \dots & T_k & 0\\ & & & & T_1\\ & & \tau^{/}\tau & & \dots\\ & & & & T_k\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^k\begin{vmatrix}T_1 & T_2 & \dots & T_k & n\\ & & & & T_1\\ & & \tau^{/}\tau & & \dots\\ & & & & T_k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n & T_1 & T_2 & \dots & T_k\\ T_1 & & & & \\ \dots & & \tau^{/}\tau & & \\ T_k & & & & \end{vmatrix}>0,$$

де останній визначник є визначником Грама системи $k+1$ лінійно незалежних векторів $\left\{\left(t_1^i,\ t_2^i,\ ...,\ t_n^i\right),\ i=\overline{0,k}\right\}$.

4. Дослідимо питання про ефективність отриманих МУНК-оцінок в порівнянні із іншими оцінками.

Згідно з теоремою Гауса-Маркова всі МНК-оцінки невідомих параметрів лінійної моделі з вільним членом є ефективними в класі лінійних незміщених оцінок. У випадку використання МУНК крім рівності (32), характерної для МНК, додатково використовується співвідношення (33), яке є наслідком примусового виконання рівності (6). Це додаткове співвідношення може стати перешкодою на шляху отримання рівномірно ефективних оцінок.

Вид діагональних елементів матриці (48) з урахуванням нерівності (49) вказує на можливість їх зменшення при знаходженні альтернативних оцінок. Однак згідно з МУНК це вестиме до збільшення чисельника відповідного S^2. Крім цього слід також враховувати зміну значень знаменника відповідного S^2. У зв'язку з цим поставимо задачу знаходження інших оцінок параметрів, для яких елементи оціненої коваріаційної матриці обчислюються за найпростішими формулами. Тоді на підставі отриманих результатів можна обирати ефективні (емпірично) оцінки.

Розглянемо довільні інші лінійні оцінки

$$\tilde{a}_1=z^{(1)}Y,\ \tilde{a}_2=z^{(2)}Y,\ ...,\tilde{a}_k=z^{(k)}Y, \tag{50}$$

параметрів $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ відповідно, де $z^{(i)}=\left(z_1^{(i)},\ z_2^{(i)},\ ...\ ,z_n^{(i)}\right),\ i=\overline{1,k}$. Позначимо

$$Z=\begin{pmatrix}z^{(1)}\\ z^{(2)}\\ \dots\\ z^{(3)}\end{pmatrix},\ \tilde{a}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_1\\ \tilde{a}_2\\ \dots\\ \tilde{a}_k\end{pmatrix}, \tag{51}$$

Можна показати, що вимога незміщеності і виконання рівності (6) веде до виконання системи рівнянь

$$\begin{cases} Z\tau = I_k \ , & (52) \\ (T_1,\ T_2,\ ...,\ T_k) Z = (1,\ 1,\ ...,\ 1)\ , & (53) \end{cases}$$

аналогічної (32), (33).

Зауважимо, що ця система є перевизначеною. При цьому виконання рівняння (53) веде до перетворення довільного одного із скалярних рівнянь системи (52) в арифметичну тотожність. Щоб переконатися в цьому достатньо помножити зліва (52) на k-вимірну невироджену матрицю $I_k^{(j)}$, яку отримуємо із I_k заміною j-го рядка на $(T_1, T_2, ..., T_k)$, де $j = \overline{1,k}$. Разом з тим виконання (52) не гарантує виконання (53).

Нехай $j = \overline{1,k},\ \delta_{ij}$ - символ Кронекера. Оскільки розв'язком задачі умовного екстремуму

$$z^{(j)} \left(z^{(j)} \right)^{/} \Rightarrow \min \ ,$$

$$z^{(j)}\tau = \left(\delta_{1j},\ \delta_{2j},\ ...,\ \delta_{kj} \right)$$

є вектор $x^{(j)}$, визначений (29), то з урахуванням (40) $\sigma_{b_j}^2 \geq \sigma_{a_j}^2$, при цьому рівність досягається тільки у випадку $B_{*1} = O_{k,1}$.

Ідея побудови альтернативних оцінок до МУНК-оцінок полягає в тому, що $k-1$ оцінки параметрів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ покладаються рівними відповідним МНК-оцінкам, а k-та оцінка визначається з рівності

$$\sum_{j=1}^{k} T_j \tilde{a}_j = \sum_{i=1}^{n} y_i \ , \tag{54}$$

Для реалізації цієї ідеї позначимо $(1,...,1)$ - n-вимірний вектор-рядок, всі елементи якого рівні 1,

$$\tilde{x}^{(j)} = T_j^{-1} \left[(1,...,1) - \left(T_1 x^{(1)} + ... + T_{j-1} x^{(j-1)} + T_{j+1} x^{(j+1)} + ... + T_k x^{(k)} \right) \right],\ j = \overline{1,k}\ , \tag{55}$$

$C^{(j)} - k \times n$-матриця, j-й рядок якої утворюють компоненти вектора $\tilde{x}^{(j)} - x^{(j)}$, а решта рядків – нульові, $x^{(i)}\ (i = \overline{1,k})$ визначені (29). Тоді «покращені» оцінки невідомих параметрів визначимо векторними рівностями

$$a^{(j)} = \left[\left(\tau^{/} \tau \right)^{-1} \tau^{/} + C^{(j)} \right] Y,\ j = \overline{1,k}\ , \tag{56}$$

де $a^{(j)} = \left(a_1^{(j)},\ a_2^{(j)},\ ...,\ a_k^{(j)} \right)^{/}$.

Відмітимо, що тим самим реалізовано $\tilde{a}_i = a_i$ для $i = \overline{1,k},\ i \neq j,\ \tilde{a}_j$ знаходиться з рівняння (54) з урахуванням рівносильності (54) та (53).

Використавши (29) та (55), отримаємо

$$C^{(j)}\tau = O_{k,k}\ , \tag{57}$$

Знайдемо коваріаційну матрицю $\Sigma_{a^{(j)}}$ вектора оцінок $a^{(j)}$, використавши (23), (3), (56) та (57):

$$a^{(j)} - \alpha = \left[\left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} + C^{(j)} \right] \left(\tau\alpha + U \right) - \alpha = \left[\left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} + C^{(j)} \right] U\ ,$$

$$\Sigma_{a^{(j)}} = M\left[\left(a^{(j)} - \alpha \right) \left(a^{(j)} - \alpha \right)^{/} \right] = \left[\left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} + C^{(j)} \right] \times$$

$$\times M\left(UU^{/} \right) \left[\tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} + \left(C^{(j)} \right)^{/} \right] = \sigma^2 \left[\left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} + C^{(j)} \left(C^{(j)} \right)^{/} \right].$$

Отже,

$$\sigma_{a_i^{(j)}}^2 = \sigma^2 K_{ii},\ i \neq j,\ i = \overline{1,k};\ \sigma_{a_j^{(j)}}^2 = \sigma^2 \left[K_{jj} + \left(\tilde{x}^{(j)} - x^{(j)} \right) \left(\tilde{x}^{(j)} - x^{(j)} \right)^{/} \right]. \tag{58}$$

Знайдемо незміщену оцінку параметра σ^2. Для цього позначимо $u^{(j)} = Y - \tau a^{(j)}$. Тоді врахувавши (23), (3), (56), (57), ідемпотентність матриці $I_n - \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/}$ і властивості сліду матриці, отримаємо

$$u^{(j)} = \left[I_n - \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} - \tau C^{(j)} \right] U\ ,$$

$$\begin{aligned} \left(u^{(j)} \right)^{/} u^{(j)} &= U^{/} \left[I_n - \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} - \left(C^{(j)} \right)^{/} \tau^{/} \right] \left[I_n - \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} - \tau C^{(j)} \right] U = \\ &= U^{/} \{ \left[I_n - \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} \right]^2 - \tau C^{(j)} + \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} \tau C^{(j)} + \left(C^{(j)} \right)^{/} \tau^{/} \tau C^{(j)} - \\ &- \left(C^{(j)} \right)^{/} \tau^{/} + \left(C^{(j)} \right)^{/} \tau^{/} \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} \} U = U^{/} \left[I_n - \tau \left(\tau^{/}\tau \right)^{-1} \tau^{/} + \left(C^{(j)} \right)^{/} \tau^{/} \tau C^{(j)} \right] U\ ; \end{aligned} \tag{59}$$

$$M\left[\left(u^{(j)}\right)^{/}u^{(j)}\right]=\sigma^{2}tr\left[I_{n}-\tau\left(\tau^{/}\tau\right)^{-1}\tau^{/}+\left(C^{(j)}\right)^{/}\tau^{/}\tau C^{(j)}\right]=$$
$$=\sigma^{2}\left\{tr\left[I_{n}-\tau\left(\tau^{/}\tau\right)^{-1}\tau^{/}\right]+tr\left[\left(C^{(j)}\right)^{/}\tau^{/}\tau C^{(j)}\right]\right\}=$$
$$=\sigma^{2}\left\{n-k+tr\left[\tau^{/}\tau C^{(j)}\left(C^{(j)}\right)^{/}\right]\right\}=\sigma^{2}\left\{n-k+T_{2j}\left(\tilde{x}^{(j)}-x^{(j)}\right)\left(\tilde{x}^{(j)}-x^{(j)}\right)^{/}\right\}.$$

Доведемо, що

$$\left(\tilde{x}^{(j)}-x^{(j)}\right)\left(\tilde{x}^{(j)}-x^{(j)}\right)^{/}=T_{j}^{-2}\left[n-\left|\Delta\right|\Delta_{1}^{-1}\right],\ \ j=\overline{1,k}\,, \tag{60}$$

Нехай $j=1$. Тоді згідно з (29) $x^{(1)}=\Delta_{1}^{-1}A_{1*}\tau^{/}$,

$$x^{(1)}\left(x^{(1)}\right)^{/}=\Delta_{1}^{-1}A_{11}\,, \tag{61}$$

$$\tilde{x}^{(1)}=T_{1}^{-1}\left[\left(1,\ ...,\ 1\right)-\Delta_{1}^{-1}\left(T_{2}A_{2*}+...+T_{k}A_{k*}\right)\tau^{/}\right],$$
$$x^{(1)}\left(\tilde{x}^{(1)}\right)^{/}=T_{1}^{-1}\Delta_{1}^{-1}A_{1*}\tau^{/}\left[\left(1,\ ...,\ 1\right)^{/}-\Delta_{1}^{-1}\tau\left(T_{2}A_{2*}^{/}+...+T_{k}A_{k*}^{/}\right)\right]=$$
$$=T_{1}^{-1}\Delta_{1}^{-1}A_{1*}\left\{\begin{pmatrix}T_{1}\\T_{2}\\...\\T_{k}\end{pmatrix}-\Delta_{1}^{-1}\left[\begin{pmatrix}0\\T_{2}\Delta_{1}\\...\\0\end{pmatrix}+...+\begin{pmatrix}0\\0\\...\\T_{k}\Delta_{1}\end{pmatrix}\right]\right\}=\Delta_{1}^{-1}A_{11}\,, \tag{62}$$

$$\tilde{x}^{(1)}\left(\tilde{x}^{(1)}\right)^{/}=T_{1}^{-2}\left[\left(1,\ ...,\ 1\right)-\Delta_{1}^{-1}\left(T_{2}A_{2*}+...+T_{2}A_{k*}\right)\tau^{/}\right]\left[\begin{pmatrix}1\\...\\1\end{pmatrix}-\Delta_{1}^{-1}\tau\left(T_{2}A_{2*}^{/}+...+T_{k}A_{k*}^{/}\right)\right]=$$
$$=T_{1}^{-2}\left\{\begin{array}{l}n-\Delta_{1}^{-1}\left(T_{1},\ ...,\ T_{k}\right)\left(T_{2}A_{2*}^{/}+...+T_{k}A_{k*}^{/}\right)-\Delta_{1}^{-1}\left(T_{2}A_{2*}+...+T_{k}A_{k*}\right)\left(T_{1},\ ...,\ T_{k}\right)^{/}+\\+\Delta_{1}^{-2}\left(T_{2}A_{2*}+...+T_{k}A_{k*}\right)\left[T_{2}\begin{pmatrix}0\\\Delta_{1}\\...\\0\end{pmatrix}+...+T_{k}\begin{pmatrix}0\\0\\...\\\Delta_{1}\end{pmatrix}\right]\end{array}\right\}=$$
$$=T_{1}^{-2}\left[n-2\Delta_{1}^{-1}\left(T_{1},\ ...,\ T_{k}\right)\begin{pmatrix}A_{21}\ A_{31}\ ...A_{k1}\\A_{22}\ A_{32}\ ...A_{k2}\\..................\\A_{2k}\ A_{3k}\ ...A_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_{2}\\T_{3}\\....\\T_{k}\end{pmatrix}+\Delta_{1}^{-1}\left(T_{2},...,\ T_{k}\right)\begin{pmatrix}A_{21}\ A_{22}\ ...A_{2k}\\A_{31}\ A_{32}\ ...A_{3k}\\..................\\A_{k1}\ A_{k2}\ ...A_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\T_{2}\\....\\T_{k}\end{pmatrix}\right]=$$
$$=T_{1}^{-2}\left(n-2\Delta_{1}^{-1}\xi_{1}+\Delta_{1}^{-1}\xi_{2}\right).$$

Використавши (39) в такій формі

$$\left(T_{1},\ ...,\ T_{k}\right)A\left(T_{1},\ ...,\ T_{k}\right)^{/}=\left(-1\right)^{k+1}\Delta\,,$$

де $A=\left(A_{ij}\right),\ i,j=\overline{1,k}$, а також симетричність A, знайдемо

$$\xi_{1}=\left(-1\right)^{k+1}\Delta-T_{1}\sum_{i=1}^{k}T_{i}A_{i1},\ \ \xi_{2}=\left(-1\right)^{k+1}\Delta-T_{1}\sum_{i=1}^{k}T_{i}A_{i1}-T_{1}\sum_{i=2}^{k}T_{i}A_{ik}\,,$$
$$-2\xi_{1}+\xi_{2}=\left(-1\right)^{k}\Delta+T_{1}^{2}A_{11}\,,$$

звідки

$$\tilde{x}^{(1)}\left(\tilde{x}^{(1)}\right)^{/}=T_{1}^{-2}\left[n-\left|\Delta\right|\Delta_{1}^{-1}\right]+\Delta_{1}^{-1}A_{11}\,, \tag{63}$$

оскільки $\left(-1\right)^{k+1}\Delta>0$. Тоді з урахуванням (61) – (63) остаточно отримаємо (60). Аналогічно розглядаються випадки $j=\overline{2,k}$.

Використавши (60), з (59) знайдемо незміщену оцінку S_{j}^{2} параметра σ^{2} для вектора оцінок $a^{(j)}$:

$$S_{j}^{2}=\sum_{i=1}^{n}\left(u_{i}^{(j)}\right)^{2}\left\{n-k+T_{2j}T_{j}^{-2}\left[n-\left|\Delta\right|\Delta_{1}^{-1}\right]\right\}^{-1},\ \ j=\overline{1,k}\,, \tag{64}$$

а з (58) отримаємо оцінку $\widehat{\sigma}_{a_{j}}^{2}$ дисперсії $\sigma_{a_{j}}^{2}$

$$\hat{\sigma}^2_{a_j^{(j)}} = S_j^2 \left\{ K_{jj} + T_j^{-2} \left[n - |\Delta| \Delta_1^{-1} \right] \right\}, \qquad (65)$$

Залишається отримати найпростіші представлення суми квадратів залишків, які фігурують в (64), а також в (47).

Доведемо, що

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i^{(j)} \right)^2 = Q + T_{2j} T_j^{-2} \varepsilon^2(k), \quad j = \overline{1,k}, \qquad (66)$$

де

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} a_j t_i^j - y_i \right)^2, \qquad (67)$$

a_1, a_2, ..., a_k – МНК-оцінки; $\varepsilon(k)$ визначене (9).

Нехай $j = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} Q_1 - Q &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\tilde{a}_1 t_i + a_2 t_i^2 + ... + a_k t_i^k - y_i \right)^2 - \left(a_1 t_i + a_2 t_i^2 + ... + a_k t_i^k - y_i \right)^2 \right] = \\ &= 2\left(\tilde{a}_1 - a_1 \right) \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \left(\tilde{a}_1 + a_1 \right) t_i^2 + a_2 t_i^3 + ... + a_k t_i^{k+1} - t_i\, y_i \right] = \\ &= 2\left(\tilde{a}_1 - a_1 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\tilde{a}_1 + a_1 \right) T_2 + a_2 T_3 + ... + a_k T_{k+1} - \sum_{i=1}^{n} t_i\, y_i \right] = \left(\tilde{a}_1 - a_1 \right)^2 T_2 , \end{aligned} \qquad (68)$$

При цьому враховано друге з системи нормальних рівнянь (18) для МНК. Згідно з означенням $\tilde{a}_1$ та (9)

$$\tilde{a}_1 - a_1 = T_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - T_2 a_2 - ... - T_k a_k \right) - a_1 = T_1^{-1} \varepsilon(k), \qquad (69)$$

Тому з урахуванням (68) і (69) отримаємо (66) для випадку $j = 1$: $Q_1 = Q + \left(Q_1 - Q \right) = Q + T_2\, T_1^{-2} \varepsilon^2(k)$. Розгляд випадків $j = \overline{2,k}$ здійснюється аналогічно.

Для випадку МУНК-оцінок

$$Q_M = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} b_j t_i^j - y_i \right)^2 = Q + \Delta_1 |\Delta|^{-1} \varepsilon^2(k), \qquad (70)$$

Справді, використавши (11), (18), (20), (29) і розклад визначника матриці $T^{/}$ по першому стовпцю послідовно отримаємо

$$\begin{aligned} Q_M - Q &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{k} b_j t_i^j - y_i \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} a_j t_i^j - y_i \right)^2 \right] = \left(b_1 - a_1 \right) \times \left(\sum_{j=1}^{k} b_j T_{j+1} - \sum_{i=1}^{n} t_i y_i + \sum_{j=1}^{k} a_j T_{j+1} - \sum_{i=1}^{n} t_i y_i \right) + \\ &+ ... + \left(b_k - a_k \right) \left(\sum_{j=1}^{k} b_j T_{j+k} - \sum_{i=1}^{n} t_i^k y_i + \sum_{j=1}^{k} a_j T_{j+k} - \sum_{i=1}^{n} t_i^k y_i \right) = -\Delta^{-1} \varepsilon(k) \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{k} T_j B_{j1} = -\varepsilon(k) \frac{\lambda}{2} = \\ &= -\varepsilon^2(k) \Delta^{-1} B_{k+1,1} = \left(-1 \right)^{k+1} \Delta_1 \Delta^{-1} \varepsilon^2(k) = \Delta_1 \left| \Delta^{-1} \right| \varepsilon^2(k), \end{aligned}$$

звідки з урахуванням рівності $Q_M = Q + \left(Q_M - Q \right)$ отримаємо (70).

Отже, отримано $k+1$ емпіричних рівнянь:

$$\begin{aligned} \hat{y}^{(1)} &= \tilde{a}_1^{(1)} t + \tilde{a}_2^{(1)} t^2 + ... + \tilde{a}_k^{(1)} t^k, \\ \hat{y}^{(2)} &= \tilde{a}_1^{(2)} t + \tilde{a}_2^{(2)} t^2 + ... + \tilde{a}_k^{(2)} t^k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{y}^{(j)} &= \tilde{a}_1^{(j)} t + \tilde{a}_2^{(j)} t^2 + ... + \tilde{a}_k^{(j)} t^k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{y}^{(k)} &= \tilde{a}_1^{(k)} t + \tilde{a}_2^{(k)} t^2 + ... + \tilde{a}_k^{(k)} t^k, \\ \hat{y}^{(M)} &= b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_k t^k, \end{aligned} \qquad (71)$$

де $a_i^{(j)} = a_i \ (i \neq j)$, a_1, a_2, ..., a_k – МНК-оцінки параметрів α_1, α_2, ..., α_k відповідно; $\tilde{a}_j^{(j)} (j = \overline{1,k})$ – визначається з рівняння

$T_1 a_1^{(j)} + T_2 a_2^{(j)} + ... + T_{j-1} a_{j-1}^{(j)} + T_j \tilde{a}_j^{(j)} + T_{j+1} a_{j+1}^{(j)} + ... + T_k a_k^{(j)} = \sum y_i$, b_1, b_2, ..., b_k – МУНК-оцінки, визначені з (21).

Емпіричні дисперсії коефіцієнтів цих рівнянь визначаються за формулами

$$\hat{\sigma}^2_{a_i^{(j)}}=\frac{\left(Q+T_{2j}T_j^{-2}\varepsilon^2(k)\right)K_{ii}}{n-k+T_{2j}T_j^{-2}\left(n-|\Delta|\Delta_1^{-1}\right)},\ i=\overline{1,k},\ i\neq j,$$

$$\hat{\sigma}^2_{\tilde{a}_j^{(j)}}=\frac{\left(Q+T_{2j}T_j^{-2}\varepsilon^2(k)\right)\left[K_{jj}+T_j^{-2}\left(n-|\Delta|\Delta_1^{-1}\right)\right]}{n-k+T_{2j}T_j^{-2}\left(n-|\Delta|\Delta_1^{-1}\right)},\ j=\overline{1,k}, \tag{72}$$

$$\hat{\sigma}^2_{b_i}=\frac{\left(Q+\Delta_1|\Delta|^{-1}\varepsilon^2(k)\right)\left[K_{ii}+\Delta^{-2}(n-|\Delta|\Delta_1^{-1})B_{i1}^2\right]}{n\left(1+\Delta_1|\Delta|^{-1}\right)-k-1},\ i=\overline{1,k}.$$

На підставі обчислень дисперсій за формулами (72) обирається те з емпіричних рівнянь (71), коефіцієнти якого мають мінімальні стандартні помилки.

Для вибірки (8) отримано наступні емпіричні рівняння для кожного з трьох варіантів, а також використання МНК і МУНК на підставі пакету Excel 2010 для $k=3$

$$\hat{y}^{(1)}=60,90648536t-7,659103896t^2+0,293243613t^3$$
$$(4,834698667)\quad(1,784075093)\quad(0,156752121)$$
$$\hat{y}^{(2)}=60,9631651t-7,669106203t^2+0,293243613t^3$$
$$(4,83222277)\quad(1,783432665)\quad(0,156691241),$$
$$\hat{y}^{(3)}=60,9631651t-7,659103896t^2+0,291669175t^3$$
$$(4,830282853)\quad(1,78266624)\quad(0,156642565),$$
$$\hat{y}_{LS}=60,9631651t-7,659103896t^2+0,293243613t^3$$
$$(4,839671079)\quad(1,786131063)\quad(0,156932762),$$
$$\hat{y}_{CLS}=60,74002054t-7,607019812t^2+0,289669215t^3$$
$$(4,844418988)\quad(1,785831630)\quad(0,156859564).$$

Отже, третій варіант обчислення оцінок дає емпірично ефективні оцінки параметрів моделі, які є кращими навіть у порівнянні з МНК.

Наступним актуальним кроком дослідження вказаних моделей є формування статистичних висновків про значущість параметрів та моделі в цілому, виборі оптимального степеня полінома, побудова довірчих інтервалів параметрів моделі та регресійної кривої.

Література

1. Yeromenko V. The Conditional Least Squares Method for Thermocouples Error Modeling / V. Yeromenko O. Kochan // Proceedings of the 2013 IEEE 7 International Conference IDAACS’2013, September 12-14, 2013. - Berlin, Germany. – 2013. – P. 157-163.

2. Rawlings J.O. Applied Regression Analysis: A Research Tool, Second Edition / J.O. Rawlings, S.G. Pantula, D.A. Dickey. - Springer-Verlag - 1998. - 678 p.

3. Грубер Й. Эконометрия, том 1. Введение в эконометрию / Й. Грубер. – К.: „Астарта”,1996. – 397 с.

4. G. Seber A. Lee. Linear Regression Analysis, Second Edition. JohnWiley&Sons, 2003. 572 p.

5. Джонстон Дж. Эконометрические методы: пер. с англ. – Москва: Статистика, 1980. – 444 с.

6. Рогельберг И.Л. Изменения термоэлектрической силы проволок из хромеля и алюмеля при нагреве на воздухе при 800°С продолжительностью до 10000 ч. Том III. /И.Л. Рогельберг, Н.А. Пигидина, Э.Н. Покровская и др. // – Сб. Исследование сплавов для термопар. – Труды института Гипроцветметобработка. – Москва: Металлургия, 1969.

7. Bellman R. Introduction to matrix analysis. SIAM, Philadelphia, 1997. 403 p.

References

1. Yeromenko V. The Conditional Least Squares Method for Thermocouples Error Modeling / V. Yeromenko O. Kochan // Proceedings of the 2013 IEEE 7 International Conference IDAACS’2013, September 12-14, 2013. - Berlin, Germany. – 2013. – P. 157-163.

2. Rawlings J.O. Applied Regression Analysis: A Research Tool, Second Edition / J.O. Rawlings, S.G. Pantula, D.A. Dickey. - Springer-Verlag - 1998. - 678 p

3. Hruber Y. Ekonometria, tom 1. Vvedenye v ekonometriyu / Y. Hruber. – K.: „Astarta”,1996. – 397 s.

4. G. Seber A. Lee. Linear Regression Analysis, Second Edition. JohnWiley&Sons, 2003. 572 p.

5. Dzhonston Dzh. Jekonometricheskie metody: per. s angl. – Moskva: Statistika, 1980. – 444 s.

6. Rogel'berg I.L. Izmenenija termojelektricheskoj sily provolok iz hromelja i aljumelja pri nagreve na vozduhe pri 800°S prodolzhitel'nost'ju do 10000 ch. Tom III. /I.L. Rogel'berg, N.A. Pigidina, Je.N. Pokrovskaja i dr. // – Sb. Issledovanie splavov dlja termopar. – Trudy instituta Giprocvetmetobrabotka. – Moskva: Metallurgija, 1969.

7. Bellman R. Introduction to matrix analysis. SIAM, Philadelphia, 1997. 403 p.

Рецензія/Peer review : 2.12.2014 р. Надрукована/Printed :24.12.2014 р.