

О РЕАЛИЗАЦИИ КИХ-ФИЛЬТРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЕВА

Рассмотрен подход к решению задачи фильтрации сигнала в очень узком частотном диапазоне. Такой задачей может служить ситуация, когда сигнал содержит несколько составляющих на близких частотах, и требуется выделить одну из них. Предложено для решения этой задачи использовать преобразование Фурье-Чебышева, обладающее неравномерной шкалой, которое может повысить инструментальные характеристики, такие как частотное разрешение и точность определения частот спектра сигнала без существенных на это расходов.

Ключевые слова: КИХ-фильтр – фильтр с конечной импульсной характеристикой, ФЧХ – фазо-частотная характеристика, АЧХ – амплитудно-частотная характеристика, ПФЧ – преобразование Фурье-Чебышева, ряд Фурье, явление Гиббса, ОДПФ- обратное дискретное преобразование Фурье

S.V. USTENKO

DVNZ "University of Kyiv National ekonomicheskyy Vadym Hetman"

ON THE IMPLEMENTATION OF FIR FILTERS USING FOURIER – CHEBISHEVA

An approach to solving the problem of filtering the signal in a very narrow frequency waveband zone. This task is the situation when the signal contains several composition - those reflected in the close frequencies, and want to select one of them. Proposed to tackle this problem by using the Fourier- Chebyshev having a non- uniform scale, which may increase the instrumental characteristics such as frequency resolution and accuracy of the frequency spectrum of the signal without the Existing- governmental spending on it.

Keywords: FIR filter - a filter with finite impulse response, phase response - phase- frequency response, frequency response - frequency response, PFCH - Fourier- Chebyshev, Fourier series, Gibbs phenomenon, ODPF- inverse discrete Fourier transform

Введение

На практике нередко возникает задача фильтрации сигнала в очень узком частотном диапазоне. Такой задачей может служить ситуация, когда сигнал содержит несколько составляющих на близких частотах, и требуется выделить одну из них, например телеграфия или скажем ДТМФ в телефонах. Для этого необходимо спроектировать цифровой фильтр с очень узкими полосами пропускания и переходными полосами. В зависимости от расположения составляющих сигнала, это может быть фильтр нижних, верхних частот, полосовой или заграждающий фильтр. Прямое проектирование таких устройств часто приводит к фильтрам очень высоких порядков, практическая реализация которых либо нерациональна, либо невозможна.

Анализ первоисточников

Известно, что выражение импульсной характеристики КИХ-фильтра с линейной ФЧХ имеет вид [1, 2]

$$h(n) = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot \exp(j\omega n) d\omega = \dots$$

$$\dots = \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})| \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{N-1}{2} \omega\right) \cdot \exp(j\omega n) d\omega, \quad (1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Данное выражение позволяет произвести аналитический расчет импульсной характеристики КИХ-фильтра с линейной ФЧХ. Однако для численного расчета, ввиду сложности с аналитическим вычислением интеграла (1), мы можем дискретизировать комплексный коэффициент передачи КИХ-фильтра. Это показано на рис.1 и рис. 2 для четного и нечетного количества коэффициентов КИХ-фильтра соответственно.

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} |H(e^{j\omega_k})| \cdot \exp(j\Phi(\omega_k)) \cdot \delta(\omega - \omega_k), \quad (2)$$

где $\delta(\omega)$ – дельта-функция:

$$\delta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = 0, \\ 0, & \text{если } \omega \neq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если АЧХ и ФЧХ дискретны на некоторой сетке частот, то комплексный коэффициент передачи представляется дискретными отсчетами. Подставляя (2) и (3) в (1) получим выражение, которое есть не что иное, как обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) комплексного коэффициента передачи

$$H(e^{j\omega_k}) = |H(e^{j\omega_k})| \cdot \exp(j\Phi(\omega_k)).$$

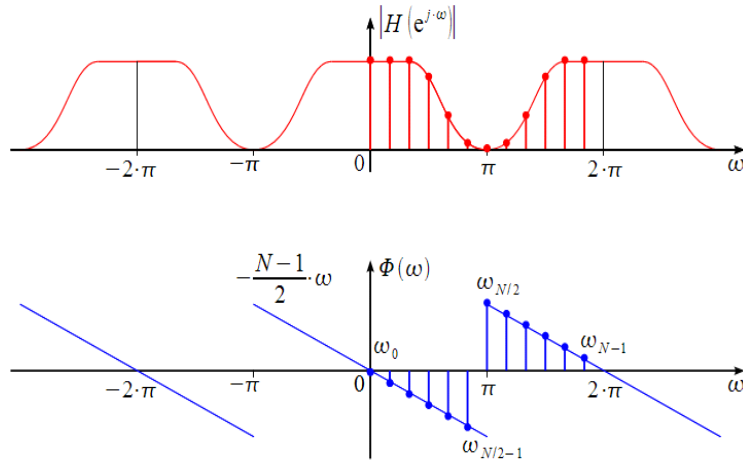


Рис. 1. Дискретизация периодической АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтра при четном N

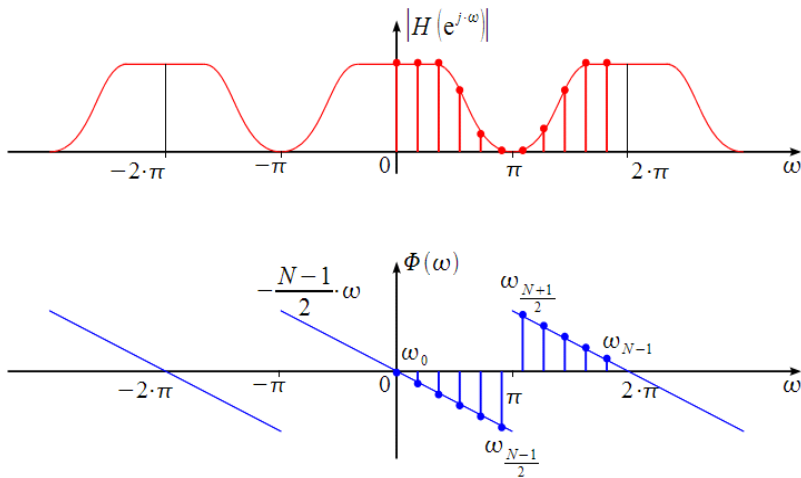


Рис. 2. Дискретизация периодической АЧХ и ФЧХ КИХ-фильтра при нечетном N

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N-1} |H(e^{j\omega_k})| \cdot \exp(j \cdot \Phi(\omega_k)) \cdot \exp\left(j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \cdot k \cdot n\right), \quad (4)$$

$$n = 0 \dots N - 1.$$

Таким образом, вычисляя ОДПФ комплексного коэффициента передачи, получим требуемые коэффициенты фильтра. Зная эти коэффициенты нетрудно построить необходимый фильтр по выражению, задающим свертку [1] вида

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(n-k) \quad (5)$$

где $h(k)$ – массив коэффициентов фильтра, рассчитанных по (4)

$x(n-k)$ – входной массив данных фильтра.

Естественно КИХ-фильтр, структура которого изображена на рис. 1, должен работать в соответствии с уравнением, задающим свертку

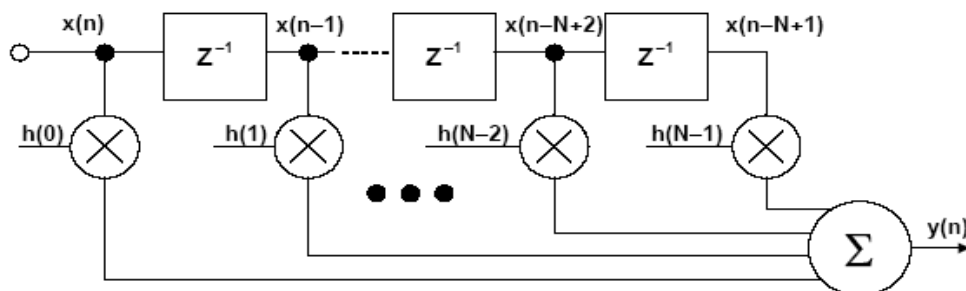


Рис. 3. Фильтр с конечной импульсной характеристикой порядка N

Число N в уравнении представляет собой число звеньев и определяет эффективность фильтра. КИХ-фильтр с числом звеньев N требует N циклов (операций) умножения с накоплением. Для уменьшения количества выполняемых операций используются 2 подхода: каскадная фильтрация с изменением частоты дискретизации на выходе каждого каскада[3], когда каждый каскад представляет собой КИХ-фильтр и устройство прореживания (дециматор), и фильтрация, совмещённая с децимацией. Децимация (или прореживание), как правило, используется в высокоскоростных системах для понижения частоты дискретизации входного сигнала. Например, для выделения узкополосного сигнала в 5 кГц из сигнала с частотой дискретизации 12,5 МГц необходимо провести прореживание в 2500 раз. Сначала определяется исходный коэффициент децимации (для частот 12,5 МГц и 5 кГц он будет равен, соответственно, 2500). Сама концепция децимации проиллюстрирована на рис.3. Верхняя диаграмма показывает исходный сигнал с полосой f_a , который дискретизирован с частотой f_s . Диаграмма, содержащая соответствующий спектр, показывает, что частота дискретизации значительно превышает частоту, требуемую для сохранения информации, содержащейся в полосе f_a , то есть сигнал с полосой f_a , является избыточно-дискретизированным сигналом. Полоса между частотами f_a и $f_s - f_a$ не содержит никакой полезной информации. Нижняя диаграмма показывает тот же самый сигнал, но частота дискретизации его уменьшена с коэффициентом M . В данном случае, каждый каскад представляет собой собственно фильтр (h_i) и дециматор (M_i). В каскадной структуре частота преобразуется в несколько этапов. В процессе прохода через каскадный фильтр частота дискретизации понижается постепенно, что приводит к существенному понижению требований к фильтрам защиты от наложения спектров и подавления зеркальных частот каждого каскада. Общий шаг децимации выражается как произведение меньших шагов [4]:

$$M = M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_I, \tag{6}$$

где M_i – шаг децимации N -го каскада.

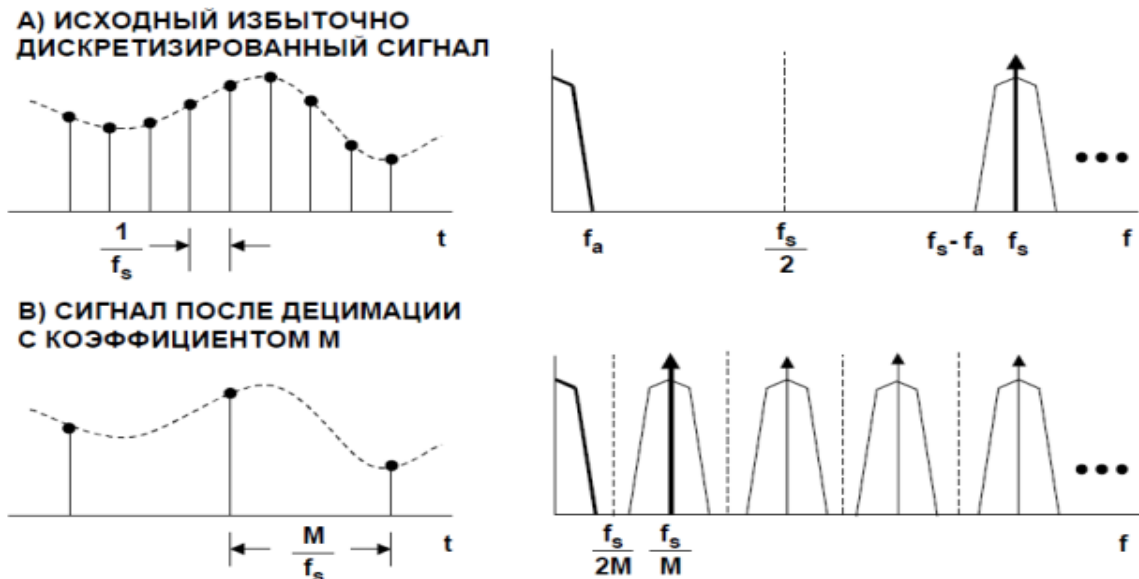


Рис. 4. Децимация дискретного сигнала с коэффициентом М

Каскадная же структура фильтрации представлена на рис. 5.

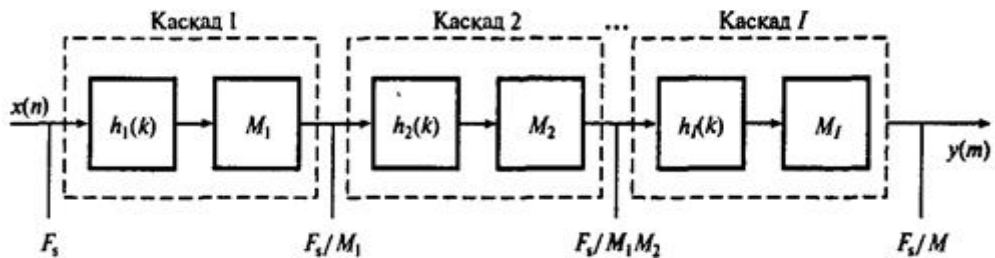


Рис. 5. Процесс многокаскадной децимации

Каждый каскад – это независимый дециматор, обозначенный пунктирным прямоугольником. Если $M \gg 1$, многокаскадный подход приводит к значительному снижению требований к вычислениям и памяти,

ослабленню характеристик фильтров, используемых в дециматорах и, следовательно, к использованию фильтров с меньшим порядком. Выбор коэффициента децимации и количества каскадов определяется в зависимости от условий конкретной задачи и параметров системы. Однако при децимации появляется эффект наложения копий спектров друг на друга, то есть элайзинг (рис.6), если сигнал не ограничен соответствующей полосой частот.

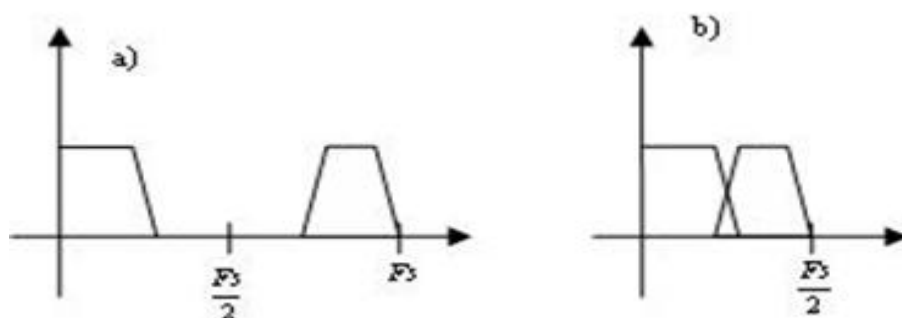


Рис. 6. Иллюстрация эффекта наложения при децимации:
а) дискретный спектр исходного сигнала,
б) дискретный спектр сигнала после децимации

Эффект наложения копий спектров можно существенно ослабить двумя способами. Первый заключается в разнесении полос каждого из сигналов на достаточное расстояние по частоте (рис ба), что приводит к неэффективному использованию всей полосы сигналов, в лучшем случае с коэффициентом $\frac{1}{2}$ (другими словами половину всей полосы сигналов не будет использовано, о чем уже говорилось ранее). Другой способ виден из рис. 6б и заключается в уменьшении переходной полосы АЧХ фильтра, т. е. увеличении коэффициента прямоугольности фильтра (коэффициент прямоугольности обычно определяется как отношение ширины полосы пропускания к сумме ширины полосы пропускания и ширины переходной полосы) [3].

Постановка задачи

Таким образом, из проведенного выше анализа видно, что каскадная структура фильтра предъявляет повышенные требования к прямоугольности АЧХ каждого каскада фильтра. Эти требования находятся в явном противоречии с вычислительными затратами на реализацию фильтра в цифровой форме, следовательно, такие фильтры иногда могут быть физически нереализуемые. Нахождение разумного компромисса в этом случае и есть целью этой работы.

Решение

Из анализа также очевидно, что решение задачи следует искать в представлении самой передаточной функции в частотной области. В приведенном выше методе расчета коэффициентов импульсной характеристики фильтра, который называется методом частотной выборки, применяется равномерная дискретизация АЧХ и ФЧХ с постоянным шагом. Однако при всей простоте данного метода, он хранит в себе подводные камни, связанные с эффектом Гиббса (рис.7) [1]. Этот эффект заключается в следующем. При дискретизации АЧХ мы задаем точки, через которые должна пройти АЧХ рассчитанного фильтра, однако мы не накладываем никаких ограничений на поведение АЧХ в других точках. При расчете мы получаем набор коэффициентов КИХ-фильтра как разложение в ряд Фурье комплексного коэффициента передачи. Эти коэффициенты разложение мы потом рассчитываем через ОДПФ. Поскольку мы ограничиваем количество коэффициентов разложения (количество коэффициентов КИХ-фильтра), то получаем усеченный ряд, который лишь аппроксимирует идеальную АЧХ и, в конечном счете, получаем пульсации этой АЧХ. Конечно, аппроксимация будет тем лучше, чем больше коэффициентов импульсной характеристики, т. е. чем чаще мы будем дискретизировать идеальную АЧХ, что не всегда является возможным. Поэтому обычно используют для расчета КИХ-фильтров еще и аппарат весовых кон. Использование весовых окон позволяет улучшить частотные характеристики КИХ-фильтров, однако уменьшает коэффициент прямоугольности фильтра. На рис.8 показано как отличается идеальная АЧХ от реальной.

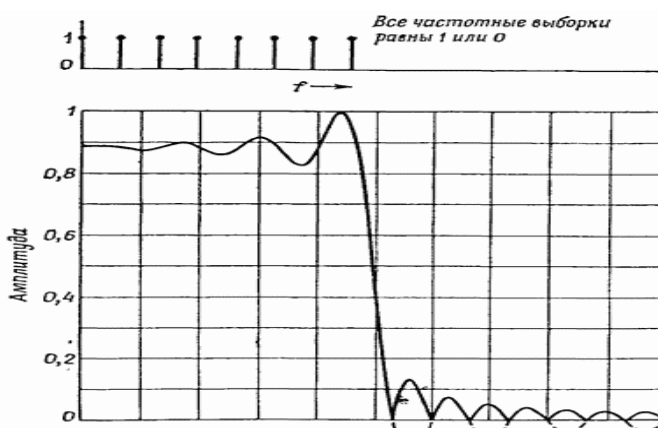


Рис. 7. Явление Гиббса

Вместе с тем, сказанное выше о эффекте (явлении) Гиббса, верно только частично, поскольку пульсация частотной характеристики связанная с усеченным рядом Фурье и выброс этой характеристики на

ее срезах, связанный с тем же усеченным рядом Фурье, есть разные вещи. При чем, выбросы, связанные с

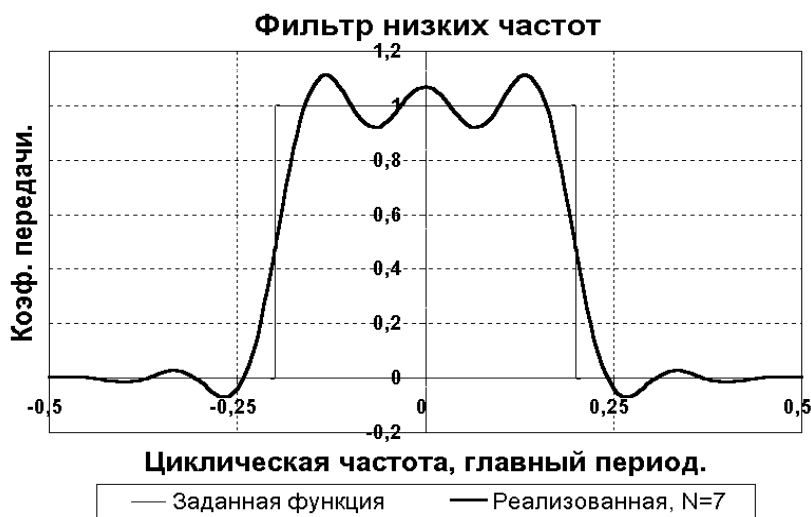


Рис. 8. АЧХ КИХ-фильтра (заданная и реальная)

но такой критерий не будет универсальным. Единственным способом существенно уменьшить влияние эффекта Гиббса можно, если увеличить количество точек дискретизации в переходной полосе комплексного коэффициента передачи КИХ-фильтра. Однако это не всегда желательно, поскольку приводит к увеличению количества коэффициентов импульсной характеристики фильтра и количества вычислений при технической реализации такого фильтра. Поэтому прибегают к некоторой хитрости. Очевидно, что частота дискретизации импульсной характеристики и частота дискретизации фильтруемого сигнала совпадают. С другой стороны, желательно чтобы переходную полосу (срез) фильтра задать, по крайней мере, тремя точками, как показано на рис. 9. Тогда меняя положение точки в переходной полосе (в данном случае точку $i + 1$) удастся уменьшить влияние явления Гиббса. Заметим, подбор точек в переходной полосе фильтра, в конечном счете, иногда составляет основу расчета фильтра методом линейного программирования.

Конечно, одной точки в переходной полосе маловато для устранения эффекта Гиббса, но с другой стороны увеличение количества точек передаточной функции фильтра не всегда желательно, так как приводит к увеличению вычислительных затрат, а в некоторых случаях и невозможно из-за нехватки данных (сигнал заранее оцифрован). Но если невозможно увеличить количество точек АЧХ по тем или иным причинам, то их следует перераспределить. Так мы приходим к тому, что проводить дискретизацию АЧХ и ФЧХ необходимо неравномерно так, чтобы, в конечном счете, получить больше точек в переходной полосе фильтра, например, по закону арккосинуса, рис. 10.

Тогда полагая в (1), что $\omega = \arccos x$ имеем

$$h(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j \arccos x}) e^{jn \arccos x} d(\arccos x),$$

или

явлением Гиббса, могут значительно превышать пульсации АЧХ в зоне пропускания, рис 7. Стало быть, явление Гиббса - некоторое особое поведение частичных сумм ряда Фурье в окрестности точки резкого изменения АЧХ на срезе фильтра. Ясно, что соответствующая весовая обработка передаточной характеристики на срезах может привести к сглаживанию пульсаций в полосах пропускания и непропускания (рис. 8), однако получить для нее математические соотношения в явном виде не удастся. Нетрудно также связать подавление боковых лепестков с компенсацией «хвостов» функций,

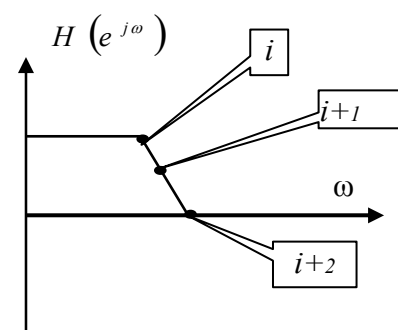


Рис. 9. Точки переходной полосы

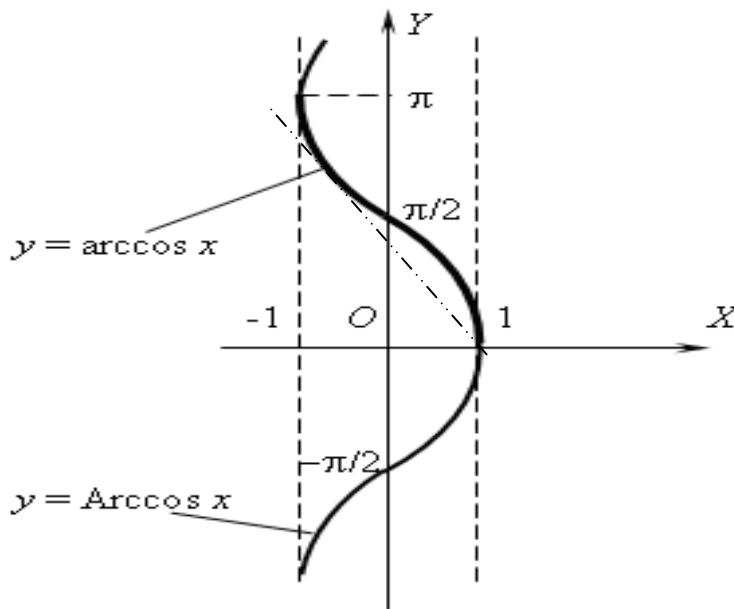


Рис. 10. Арккосинус

$$h(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H(e^{j \arccos x})}{\sqrt{1-x^2}} e^{jn \arccos x} dx$$

Далее, заменив $\arccos x$ его главным значением, имеем

$$h(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H(e^{j \arccos x})}{\sqrt{1-x^2}} e^{jn \arccos x} dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{H(e^{j \arccos x})}{\sqrt{1-x^2}} e^{jn \arccos x} dx,$$

или окончательно

$$h(n) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{H(e^{j \arccos x})}{\sqrt{1-x^2}} e^{jn \arccos x} dx. \tag{7}$$

Полученное выражение есть не что иное как преобразование Фурье-Чебышева, в котором действительная часть весовой функции $e^{jn \arccos x}$ есть полиномы Чебышева первого рода $T(nx)$, мнимая часть этой же функции ненормированные полиномы Чебышева второго рода $U(nx)$. Более подробно это преобразование описано в [5, 6], где исследованы его свойства и характеристики. На рис.11 приведен вид гребенки фильтров Фурье-Чебышева, из которого видно, что эта гребенка имеет огибающую, обусловленную множителем $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. График этой огибающей приведен на рис. 12.

Из этого графика видно, что огибающая имеет весьма плоскую вершину, однако заваленную на самих концах интервала $[-1, 1]$. Это означает, что гребенка представляет собой полосовой фильтр с весьма хорошими параметрами. Поскольку этот множитель есть в выражении 7, то АЧХ фильтра будет взвешена (умножена) функцией $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Однако на интервале $[-0,5, 0,5]$ мы имеем плоскую вершину с увеличенным примерно вдвое количеством точек дискретизации. Тогда, задав АЧХ в этом интервале, на рис. 12 показано пунктирной линией, получим почти вдвое больше точек в переходной полосе фильтра. Выполнив вычисления по выражению (7) получим импульсную характеристику фильтра с подавленным эффектом Гиббса. Если же теперь снять АЧХ такого фильтра, то окажется, что величина пульсации АЧХ в полосе пропускания будут значительно меньше, что видно из графика 11.

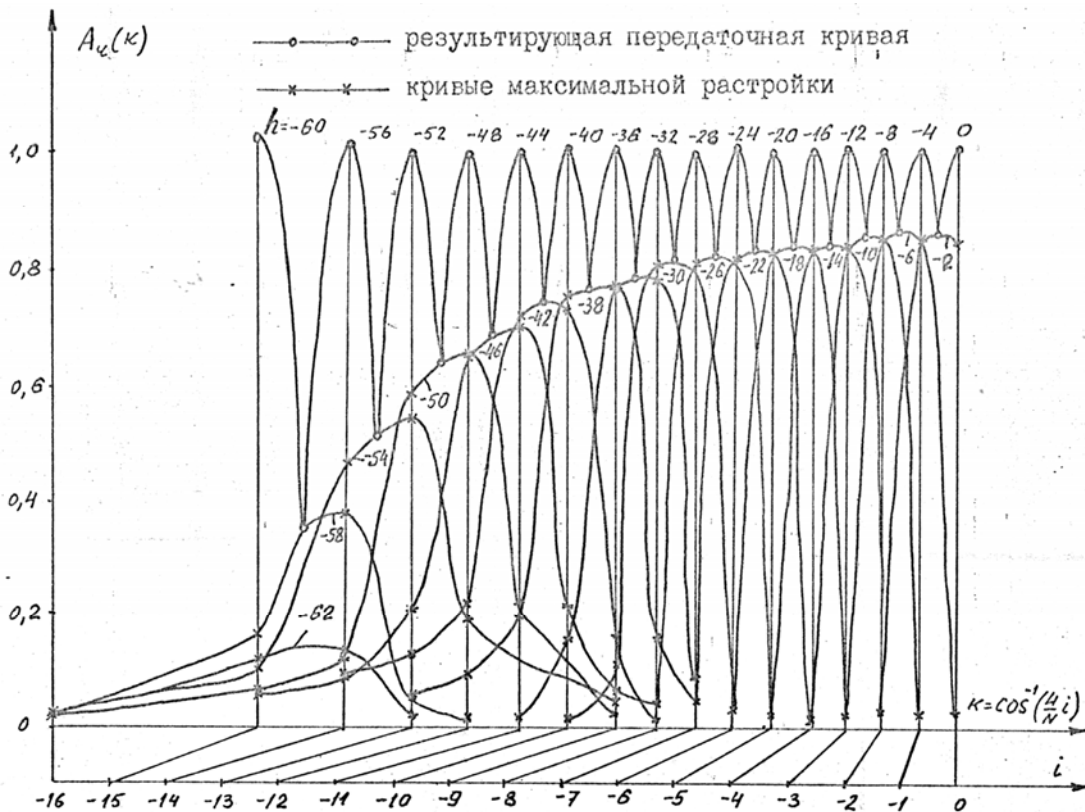


Рис. 11. Гребенка фильтров преобразования Фурье-Чебышева и преобразования Фурье, снятая экспериментально

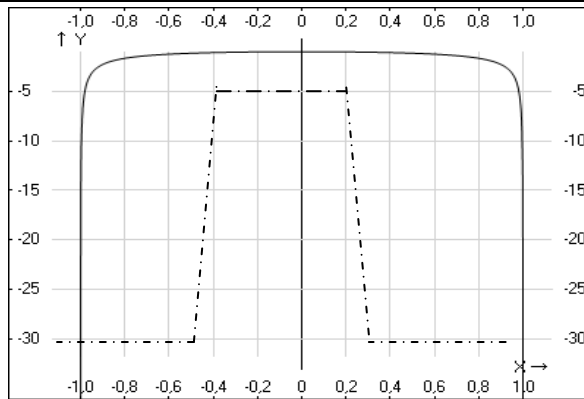


Рис.12. Огибающая гребенки фильтров преобразования Фурье-Чебышева

Выводы

Таким образом, применение преобразования Фурье-Чебышева для расчета импульсной характеристики полосовых КИХ-фильтров обладает неоспоримым эффектом. В этом случае при неравномерной дискретизации требуемой АЧХ по сравнению с равномерно дискретизируемой АЧХ имеем следующие преимущества. Пульсации в переходной полосе фильтра и явление Гиббса значительно уменьшены. Коэффициент прямоугольности значительно лучше. При равных условиях (шаг при равномерной дискретизации АЧХ равен среднему шагу при неравномерной дискретизации АЧХ) порядок фильтра уменьшается по крайней мере в полтора раза и, следовательно, во столько раз уменьшается количество вычислений. Оконечные каскады полосовых КИХ-фильтров, рис. 5. следует строить по приведенной выше методике, поскольку при большем коэффициенте прямоугольности устраняются эффекты перекрытия полос. При этом экономия вычислений в каскадных фильтрах будет уменьшаться, в зависимости от количества используемых каскадов с неравномерной дискретизацией АЧХ.

Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. - Изд. 2-е, испр. — М. : Техносфера, 2007. — 856 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 848 с.
3. Айфичер Э., Джервис Б. Цифровая обработка сигналов: практический подход: Пер. с англ. – 2-е изд. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 992 с.
4. Кестер У. Проектирование систем цифровой и смешанной обработки сигналов. – М. : Техносфера, 2010. – 328 с.
5. Дискретное преобразование Фурье – Чебышева / Б. Н. Малиновский, С. В. Устенко, М. В. Семотюк, А. Ф. Бульбанюк. – В кн. : Разработка средств кибернетической техники. Киев: ИК АН УССР, 1982, с. 98 – 103.
6. А.С. СССР № 1136181, БИ № 3, 1985// Устенко С.В. Устройство для ортогонального преобразования цифровых сигналов по Фурье-Чебышеву

References

1. Oppengeym A., Shafer R. Tsifrovaya obrabotka signalov. - Izd. 2-e, ispr. — М. : Tehnosfera, 2007. — 856 s.
2. Rabiner L., Gould B. Teoriya i primeneniye tsifrovoy obrabotki signalov. — М.: Mir, 1978. — 848 s.
3. Ayficher E., Dzhervis B. Tsifrovaya obrabotka signalov: prakticheskiy podhod: Per. s angl. – 2-e izd. – М. : Izdatelskiy dom «Vilyams», 2004. – 992 s.
4. Kester U. Proektirovaniye sistem tsifrovoy i smeshannoy obrabotki signalov. – М. : Tehnosfera, 2010. – 328 s.
5. Diskretnoye preobrazovaniye Fure – Chebyisheva / B. N. Malinovskiy, S. V. Ustenko, M. V. Semotyuk, A. F. Bulbanyuk. – V kn. : Razrabotka sredstv kiberneticheskoy tehniki. Kiev: IK AN USSR, 1982, s. 98 – 103.
6. A.S. SSSR # 1136181, BI # 3, 1985// Ustenko S.V. Ustroystvo dlya ortogonalnogo preobrazovaniya tsifrovyyh signalov po Fure-Chebyishevu

Рецензія/Peer review : 8.1.2015 р. Надрукована/Printed :23.1.2015 р.
Стаття рецензована редакційною колегією