УДК 519.876.5

Є.О. МАРЦЕНЮК
Тернопільський національний економічний університет

# ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ КРИТЕРІЇВ ОПТИМАЛЬНОСТІ ПАРАМЕТРІВ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В УМОВАХ СТОХАСТИЧНОЇ ТА ІНТЕРВАЛЬНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

*Розглянуто задачу ідентифікації математичних моделей типу «вхід-вихід» на основі аналізу випадкових та інтервальних даних. Встановлено, що в основі методів ідентифікації є критерії: у першому випадку – середньо квадратичного відхилення; у другому випадку – забезпечення заданої точності. Наведено особливості математичних задач ідентифікації в умовах стохастичної та інтервальної невизначеності.*

*Ключові слова: задача параметричної ідентифікації, моделі типу «вхід-вихід»*

YE.O. MARTSENYUK
Ternopil National Economic University

## CONSTRUCTING OPTIMALITY CRITERIA FOR PARAMETRIC IDENTIFICATION OF MATHEMATICAL MODELS UNDER STOCHASTIC AND INTERVAL UNCERTAINTY

*Abstract – The problem of "input-output" mathematical models identification, based on analysis of random and interval data. It was established that the basis of identification methods are the criteria: in the first case - the average deviation; in the second case – ensure a given accuracy. The peculiarities of mathematical problems in terms of identifying stochastic and interval uncertainty.*

*Keywords: parametric identification problem, models of the "input-output" type*

### Постановка проблеми

Математичні моделі типу «вхід–вихід» переважно будують із використанням індуктивного підходу [1]. В таких випадках математична модель пов'язує між собою вхідні та вихідні змінні. Для налаштування математичної моделі, тобто її ідентифікації, використовують результати експерименту. Для встановлення прогностичних властивостей математичної моделі необхідно провести дослідження природи невизначеності в експериментальних даних [2,3]. Більше того, природа невизначеності безпосередньо визначатиме методи та обчислювальні алгоритми ідентифікації математичних моделей. Таким чином в процесі аналізу даних та ідентифікації математичних моделей виникає протиріччя між потребою забезпечення певних прогностичних властивостей математичної моделі та вибором адекватного методу її ідентифікації і при цьому врахування особливостей невизначеності в даних.

### Постановка задачі

Нехай об'єкт будемо описувати функціональною залежністю у такому вигляді [3]:

$$y = \eta\left(\vec{x}, \vec{b}, \vec{z}\right),$$

де $y$ – вихідна змінна; $\vec{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T$ – вектор вхідних змінних, які можна змінювати в деякій області $\chi$; $\vec{b}$ – вектор параметрів функції $\eta$; $\vec{z}$ – вектор неврахованих або невизначених факторів, шумів, похибок та ін.

Основою для побудови математичної моделі системи часто є результати експерименту, які можна зобразити матрицею значень вхідних та вектора відповідних значень вихідної змінної у всіх спостереженнях [2]:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} \ldots x_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{N1} \ldots x_{Nn} \end{pmatrix}; \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_N \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Рядкам матриці $X$ відповідають вектори $\vec{x}_i$ ($i = 1, \ldots, N$) вхідних змінних, що при експериментуванні викликають відповідні значення вихідної змінної $y_i$.

Не порушуючи загальності, обмежимося випадком, коли функція $y = \eta\left(\vec{x}, \vec{b}, \vec{z}\right)$, в загальному випадку є відомою і її представляють у вигляді лінійної за параметрами залежності [3]:

$$y_0\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}, \vec{\beta}\right) = \beta_i \varphi_1\left(\vec{x}\right) + \ldots + \beta_m \varphi_m\left(\vec{x}\right), \tag{2}$$

де $\varphi_1\left(\vec{x}\right), \ldots, \varphi_m\left(\vec{x}\right)$ – відомі базисні функції; $\beta_1, \ldots, \beta_m$ – невідомі параметри(коефіцієнти залежності) математичної моделі, які необхідно налаштувати на основі результатів експерименту (1).

Якщо оцінки $b_1, \ldots, b_m$ параметрів $\beta_1, \ldots, \beta_m$ знайдені, то модель об'єкта матиме такий вигляд:

$$\widehat{y}(\vec{x}) = b_i\varphi_1(\vec{x}) + \ldots + b_m\varphi_m(\vec{x}) \tag{3}$$

Очевидно, модель узгоджується з даними експерименту $X, \vec{Y}$ тим краще чим менші відхилення між прогнозованими (обчисленими на основі моделі) значеннями компонент вектора $\hat{\vec{Y}}$ та експериментально отриманим вектором $\vec{Y}$. Унаслідок цього задачу параметричної ідентифікації формулюють так [12]: "за даними експерименту $X, \vec{Y}$, знаючи структуру (2) функції $f(\vec{x}, \vec{\beta})$, оцінити її параметри $\vec{\beta}$ за умовою

$$\Psi\left(\vec{Y} - \hat{\vec{Y}}\right) \xrightarrow{\vec{\beta}} min, \tag{4}$$

де $\Psi$ – деякий функціонал, що характеризує узгодження обчислених на основі моделі та експериментальних даних виходу.

Встановлення виду функціоналу $\Psi$ залежить від невизначеності в експериментальних даних і визначатиме безпосередньо процедури параметричної ідентифікації.

**Критерії оптимальності параметрів в задачах ідентифікації та аналізу даних**

Для розв'язування задачі ідентифікації найчастіше обґрунтовують використання методу найменших квадратів (МНК) [1]. В МНК за критерій узгодження експериментальних і розрахункових даних прийнята сума квадратів відхилень:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \left( y(\vec{x}_i) - \widehat{y}(x_i) \right)^2 . \tag{5}$$

За допомогою МНК при розв'язуванні задачі ідентифікації моделі у вигляді (2) оцінку $\vec{b}$ вектора невідомих параметрів $\vec{\beta}$ отримують за формулою:

$$\vec{b} = \left(F^T F\right)^{-1} F^T \vec{Y}, \tag{6}$$

де

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_1(\vec{x}_1)\ldots\varphi_m(\vec{x}_1) \\ \vdots \\ \varphi_1(\vec{x}_N)\ldots\varphi_m(\vec{x}_N) \end{pmatrix} \tag{7}$$

є матрицею значень базисних функцій моделі (3), розрахованих в точках експерименту, тобто на основі матриці $X$.

Дослідження МНК-оцінок $\vec{b}$ ґрунтується на гіпотезах про імовірнісну природу похибок в експериментальних даних, зокрема, методом регресійного аналізу.

Варто зазначити, що критерій мінімізації середньоквадратичного відхилення (5) найчастіше використовують при побудові математичних моделей. Використання зазначеного критерію пояснюється простотою алгоритму ідентифікації, а саме: він еквівалентний алгоритму розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь (6). При цьому часто не завжди це є коректним. Наприклад, коли в результаті побудови моделі оперують такою характеристикою прогностичних властивостей моделі як максимальна похибка прогнозу. В таких випадках критерій оптимальності оцінок параметрів моделі є неадекватним до цілей моделювання. Отже цілі моделювання мають визначати критерій оптимальності параметрів моделі.

Розглянемо більш детально випадки, коли цілі математичного моделювання однозначно не дають можливості використовувати критерій оптимальності параметрів моделі у вигляді середньоквадратичного відхилення.

Достатньо часто для задач прогнозування та управління математична модель повинна володіти певними прогностичними властивостями, які можуть відрізнятися для різних вхідних змінних. Наприклад, значення вихідної змінної повинно достатньо точно відтворюватися для області значень вхідних змінних в одному діапазоні і може бути менш точним для іншого діапазону. Такий випадок матимемо також, коли результати експерименту отримано із відносними похибками. В цьому випадку можемо звичайно використати взамін критерію оптимальності у вигляді середньоквадратичного відхилення, критерій мінімізації максимального відхилення. Проте такий підхід хоч і забезпечить рівномірність похибки прогнозування на області значень вхідних змінних, але не зможе забезпечити заданої точності моделі. До того ж критерій мінімаксу призведе до неадекватного пере ускладнення моделі.

Зважаючи на вище зазначене, у випадках коли необхідно різні точності відтворення значень вихідної змінної для різних діапазонів значень вхідних змінних [4]:

$$\left| y(\vec{x}_i) - y_0(\vec{x}_i) \right| \le \Delta_i , \tag{8}$$

або

$$\left|y(\vec{x}_i)-y_0(\vec{x}_i)\right|\le\delta\cdot\left|y(\vec{x}_i)\right|, \qquad (9)$$

де $\Delta_i$ - абсолютна похибка для різних значень вхідних змінних; $\delta$ – відносна похибка; $y(\vec{x}_i), y_0(\vec{x}_i)$ визначають, відповідно, експериментальне та прогнозоване (при заданих значеннях вхідних змінних $\vec{x}_i$) значення вихідної змінної, доцільно використати «критерій заданої точності»:

$$y^-(\vec{x}_i)\le y_0(\vec{x}_i)\le y_i^+(\vec{x}_i), \qquad i=1,\ldots,N \qquad (10)$$

У формулі (9) позначено $y^-(\vec{x}_i); y_i^+(\vec{x}_i)$ – нижня та верхня межі інтервалу для вихідної змінної, які визначаються на основі формул (8), (9):

$$y^-(\vec{x}_i)=y(\vec{x}_i)-\Delta_i, \qquad y^+(\vec{x}_i)=y(\vec{x}_i)+\Delta_i \qquad (11)$$

або

$$y^-(\vec{x}_i)=y\ (\vec{x}_i)\left(1-\delta\cdot\left|y(\vec{x}_i)\right|\right), \quad y^-(\vec{x}_i)=y\ (\vec{x}_i)(1+\delta\cdot\left|y(\vec{x}_i)\right|). \qquad (12)$$

На відміну від випадку використання критерію мінімізації середньоквадратичного відхилення, у випадку «критерію заданої точності» (10) обчислювальна схема для оцінки параметрів математичної моделі ускладнюється і полягає в розв’язуванні системи інтервальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} y^-(\vec{x}_1)\le b_1\varphi_1(\vec{x}_1)+\ldots+b_m\varphi_m(\vec{x}_1)\le y^+(\vec{x}_1); \\ \vdots \\ y^-(\vec{x}_i)\le b_1\varphi_1(\vec{x}_i)+\ldots+b_m\varphi_m(\vec{x}_i)\le y^+(\vec{x}_i); \\ \vdots \\ y^-(\vec{x}_N)\le b_1\varphi_1(\vec{x}_N)+\ldots+b_m\varphi_m(\vec{x}_N)\le y^+(\vec{x}_N); \end{cases} \qquad (13)$$

Слід зазначити, що розв’язком інтервальної системи є область параметрів, яку геометрично можна представити многогранником. Для оцінки області параметрів переважно використовують процедури лінійного програмування [3].

Оскільки кожна *i*-та нерівність в системі (13) забезпечує належність значення функції $\hat{y}(\vec{x})$ в *i*-тій точці експерименту, відповідному $i$ - тому інтервалу виходу, то одночасне виконання умов, заданих нерівностями системи, означає існування розв’язку задачі, тобто “проходження” функції $\hat{y}(\vec{x})$ через усі інтервали.

Відмінність між використанням критерію мінімізації середньо квадратичного відхилення і критерієм заданої точності проілюстрована на рис.1 у випадку побудови лінійної (за вхідними змінними та за параметрами) моделі об’єкта із одним «входом» та одним «виходом».

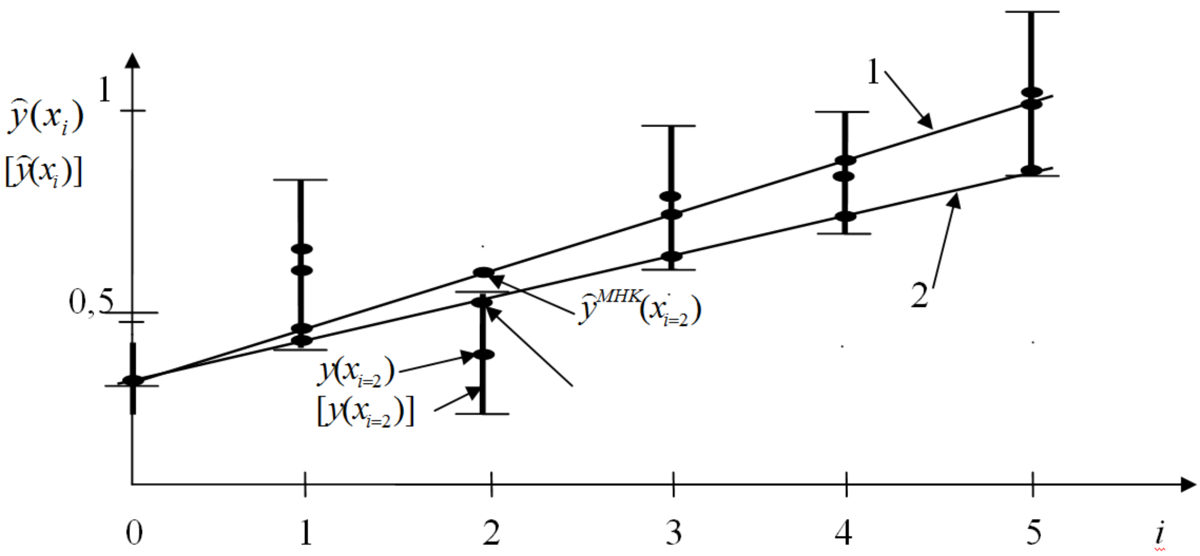


**Рис. 1. Ілюстрація результатів обчислення оцінок параметрів на основі МНК та за критерієм «заданої точності» (10) для лінійної моделі.**

Із проведеного аналізу можемо констатувати, що стохастичний підхід не придатний для розв’язування вище зазначених задач математичного моделювання. Основною причиною цього є застосування моделі випадкової похибки. До того ж критерії узгодження результатів експерименту і результатів моделювання у вигляді мінімізації середньоквадратичного відхилення та мінімізації середнього

значення модулів відхилень не забезпечують заданої точності математичної моделі в межах точності спостережень. Цей факт ілюструє приклад, представлений на рисунку 1.

На рисунку 1 точки на лінії «1» відображають значення вихідної змінної об'єкта, обчислені для п'яти дискрет на основі лінійної моделі $\hat{y}^{МНК}(x_i)$, яку своєю чергою побудовано на основі МНК- оцінок параметрів із застосуванням вибірки випадкових значень $y(x_i)$ ($i$= 0,…,5). Точки на лінії «2» відображають значення тієї ж характеристики, але обчислені на основі лінійної моделі $\hat{y}^{ЗТ}(x_i)$, яку своєю чергою побудовано за критерієм «заданої точності» (10) на основі інтервальних даних $[y(x_i)] = [y^-(x_i); y^+(x_i)]$. При цьому нижню $y^-(x_i)$ та верхню $y^+(x_i)$ межі інтервалів обчислено за формулами (11), (12) виходячи із умов заданої допустимої похибки на різних дискретах.

Як бачимо із рис.1, на дискреті $i$=2 значення характеристики $\hat{y}^{МНК}(x_i)$, обчислене на основі МНК – оцінок параметрів моделі характеристики об'єкта не належить інтервалу $[y^-(x_i); y^+(x_i)]$ наційдискреті, відповідно не задовольняє критерій «заданої точності» (10).

## Висновки

Розглянуто задачу параметричної ідентифікації математичних моделей типу «вхід –вихід» на основі аналізу випадкових та інтервальних даних. Показано, що в основі методів ідентифікації є критерії: у першому випадку – середньо квадратичного відхилення; у другому випадку – забезпечення заданої точності. Встановлено, що критерії узгодження результатів експерименту і результатів моделювання у вигляді мінімізації середньоквадратичного відхилення та мінімізації середнього значення модулів відхилень не забезпечують заданої точності математичної моделі в межах точності спостережень.

## Література

1. Ивахненко А.Г. Индуктивный метод самоорганизации сложных систем /А.Г. Ивахненко– К.: Наукова думка, 1982. – 245 с.
2. Letzky E.K. Design of experiments and data analysis: New trends and results / E.K.Letzky, A.P.Voshinin, N.P.Dyvak, S.J.Simoff, A.I.Orlov, V.G.Gorsky, E.P.Nikitina, V.N.Nosov / Edited by E.K. Letzky. – Moscow: ANTAL., 1993. – 192 p.
3. Дивак М.П. Задачі математичного моделювання статичних систем із інтервальними даними / М.П. Дивак. – Тернопіль: Видавництво ТНЕУ «Економічна думка», 2011. – 216с.
4. Вощинин А.П. Планирование оптимального насыщенного эксперимента в задачах построения интервальных моделей / А.П.Вощинин, М.П. Дывак // Заводская лаборатория. – 1993. - №1. – С. 56 – 59.

### References

1. Ivakhnenko A.G. Inductive method self-organizing complex systems / A.G. Ivakhnenko – Kyiv: Naukova dumka, 1982. – 245 p.
2. Letzky E.K. Design of experiments and data analysis: New trends and results / E.K.Letzky, A.P.Voshinin, N.P.Dyvak, S.J.Simoff, A.I.Orlov, V.G.Gorsky, E.P.Nikitina, V.N.Nosov / Edited by E.K. Letzky. – Moscow: ANTAL., 1993. – 192 p.
3. Dyvak M.P. Problems of mathematical modeling static systems with interval data / M.P. Dyvak. – Ternopil: TNEU publishing house «Ekonomichna dumka», 2011. – 216 p.
4. Voshchinin A.P. Planning an optimal saturate experiment in constructing interval models / A.P.Voshchinin, M.P.Dyvak // Zavodskaya laboratoriya. – 1993. – №1. – C. 56–59.

Рецензія/Peer review : 22.5.2015 р. Надрукована/Printed : 21.6.2015 р.
Стаття рецензована редакційною колегією