

## ОЦІНКА ПОТУЖНОСТІ ТАЙМЕРНИХ КОДІВ З УРАХУВАННЯМ КІЛЬКОСТІ ІНФОРМАЦІЙНИХ ВІДРІЗКІВ І ЗНАЧЕННЯ ТВІРНОГО ЕЛЕМЕНТА $\Delta$

Встановлено число інформаційних елементів таймерних сигнальних конструкцій, що максимізують потужність коду, при заданому числі значущих моментах модуляції ( $i$ ), інтервалу часу формування конструкції ( $T_{\text{кк}}$ ), величини твірного елемента ( $\Delta$ ), а також сформульовані умови вибору коефіцієнтів  $A_i$  рівняння якості  $\sum A_i x_i = 0 \pmod{A_0}$ .

Ключові слова: таймерна сигнальна конструкція, кодова комбінація, твірний елемент  $\Delta$ , найквістовий елемент.

Y.S. HOROKHOV, D.N. BEKTURSUNOV, M.V. ZAKHARCHENKO,  
V.V. KORCHYNSKIY, B.K. RADZIMOVSKIY  
Odessa national academy of telecommunication by O. S. Popov

## EVALUATION OF TIMER CODES POWER WITH GIVEN THE NUMBER OF INFORMATION PIECES AND VALUE OF GENERATING ELEMENT $\Delta$

Established a number of information items of timer signal constructions which maximize a code power at a given number ( $i$ ) significant modulation moments and interval ( $T_{\text{кк}}$ ) and value of generating element ( $\Delta$ ). Also formulated the conditions of selection coefficients  $A_i$  of quality equation  $\sum A_i x_i = 0 \pmod{A_0}$ .

Keywords: timer signal construction, code combination, generating element  $\Delta$ , nyquist element.

### Вступ

З початку XXI століття інформацію в основному передають у цифровому вигляді, тому серед телекомунікаційних систем та мереж особливого розвитку набули телекомунікаційні системи та мережі передавання даних, всесвітня комп'ютерна мережа Інтернет, корпоративні й регіональні комп'ютерні мережі та інше.

Серед важливих показників телекомунікаційних мереж є властивість виконувати свою основну функцію в заданих умовах – забезпечувати якість передавання інформації в мінімальні терміни затримки.

Ефективність системи передачі залежить від характеристик якості. Розрізняють показники ефективності [1]: прагматичну (ступінь задоволення системою її призначення), технічну (технічна досконалість), технологічну (простота розроблення та створення), експлуатаційну (зручність використання і обслуговування) та економічну ефективність (доцільність здійснення затрат для створення та функціонування системи).

В зв'язку з необхідністю передавати зростаючі об'єми інформації актуальним залишається підвищення швидкості передачі, особливо при роботі по каналах з обмеженою смугою пропускання та потужністю [1].

### Зв'язок потужності таймерного коду з заданим числом інформаційних відрізків і значенням твірного елемента $\Delta$

Одним з методів підвищення швидкості передачі є використання таймерних сигналів [2], в яких за рахунок зменшення відстані між кодовими словами вдається на заданому інтервалі реалізації синтезувати більше число реалізацій в порівнянні з позиційним кодуванням.

Відомо, що при позиційному кодуванні по каналу передаються коефіцієнти  $\alpha_i$  полінома десятичного числа  $N_{(a)}$

$$N_{(a)} = \alpha_{m-1} a^{m-1} + \alpha_{m-2} a^{m-2} + \dots + \alpha_1 a^1 + \alpha_0, \quad \alpha = a-1; a-2; \dots; 0, \quad (1)$$

де  $a$  – число станів інформаційного параметра каналу.

Враховуючи, що кожний коефіцієнт передається сигналом на одному інтервалі найквістового елемента  $t_0$ , то довжини кодової комбінації ( $T_{\text{кк}} = mt_0$ ), відповідаючи десятковому числу  $N_{(a)}$ , дорівнюють ступені полінома (1)  $m$ .

Мінімальна енергетична відстань такого коду відповідає енергії одного найквістового елемента. В ТСК мінімальна відстань між кодовими конструкціями визначається енергією базового твірного елемента  $\Delta = t_0/s$ ,  $s \in 1, 2, 3, \dots$ , де  $k$  – ціле число. Конкретне значення елемента  $\Delta$  розраховується із забезпеченням доцільної ймовірності прийнятого кодового слова в даному каналі.

Число реалізацій сигнальних конструкцій на інтервалі  $m$  найквістових елементів при заданих значеннях  $i, s, m$

$$N_{PT} = C_{ms-i(s-1)}^i = \frac{(ms - i(s - i))!}{i!(ms - is)!} \quad (2)$$

Якщо при позиційному кодуванні  $N_{PT} = a^m$ , то при ТСК  $N_{PT} \gg a^m$ . Наприклад, в двійковому каналі при  $m = 5$  кількість  $N_{PT} = 32$ , для ТСК при  $s = 5, i = 3, m = 5 - N_{PT} = 286$ , а при  $s = 7 - N_{PT} = 680$ , що в 21,25 рази більше. Знайдемо залежність потужності  $\|L\|$  простого коду від числа значущих моментів модуляції та довжини сигнальної конструкції. Спочатку розглянемо питання визначення числа значущих моментів модуляції, що забезпечує максимальну потужність  $\|L\|$  простого таймерного коду при заданих  $m$  та  $s$ . Для цього сформулюємо і доведемо теорему про максимальну потужність таймерних сигнальних конструкцій.

*Теорема 1.* Для простого таймерного коду максимальна потужність  $\max \|L\| = \binom{ms - i(s - 1)}{i}$ , якщо  $i = \left\lfloor \frac{ms}{s + 1} \right\rfloor, \forall s > 0$  (множина  $s$  більше нуля) та  $\forall m \geq 0$ . Звідси

$$\max \|L\| > \binom{ms - (i - 1)(s - 1)}{i - 1}, \quad (3)$$

$$\max \|L\| > \binom{ms - (i + 1)(s - 1)}{i + 1}. \quad (4)$$

*Доведення.* Теорему буде доведено, якщо доведемо вирази (3), (4).

Припустимо, що  $(ms, s + 1) \neq 1$ , тоді  $i = \left\lfloor \frac{ms}{s + 1} \right\rfloor$  й нерівність набуде вигляду

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2ms}{s + 1} + (s - 1) + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2ms}{s + 1} + 1\right)} < \frac{\Gamma\left(\frac{2ms}{s + 1} + 1\right)}{\frac{ms}{s + 1} \cdot \Gamma\left(\frac{ms}{s + 1} + 1\right)},$$

де  $\Gamma(x)$  – гама-функція. Після перетворень остаточно маємо:

$$\left(\frac{m}{m + 1 + s}\right) \prod_{k=1}^{s-1} \left(1 + \frac{1}{1 + (s - k) \frac{s + 1}{ms}}\right) < 1. \quad (5)$$

Дослідимо (5) в двох граничних випадках, коли  $s \rightarrow 0$  та  $s \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{m}{m + 1 + s}\right) \prod_{k=1}^{s-1} \left(1 + \frac{1}{1 + (s - k) \frac{s + 1}{ms}}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}},$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m + 1 + s}\right) \prod_{k=1}^{s-1} \left(1 + \frac{1}{1 + (s - k) \frac{s + 1}{ms}}\right) = 0.$$

Отже, доведено вірність нерівності (3).

Аналогічно для виразу (4) можна записати

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2ms}{s + 1} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{ms}{s + 1} - s + 1\right) \cdot \left(\frac{ms}{s + 1} + 1\right)} < \frac{\Gamma\left(\frac{2ms}{s + 1} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{ms}{s + 1} + 1\right)},$$

$$2 \left(\frac{ms + s + 1}{ms - (s - 1)(s + 1)}\right) \prod_{k=1}^{s-1} \left(1 + \frac{1}{ms - (s - k)(s + 1)}\right) > 1.$$

Очевидно, що останній вираз є вірним для  $\forall s \geq 0$  при  $\forall m \geq 0$ , тим самим рівняння (4) доведене. Для випадку, коли  $(ms, s + 1) = 1$ , вірність виразів (3) і (4) впливає із властивостей гама-функції  $\Gamma(x)$  при

$x \geq 2$ . Теорему доведено.

Особливий інтерес становить аналіз залежності  $\|L\|$  простого таймерного коду зі змінним числом значущих моментів модуляції від довжини кодової комбінації за фіксованих значень  $s$ . Для блокових кодів, як відомо, збільшення довжини блока на одиницю призводить до подвоєння потужності. Аналогічно для таймерного коду при  $s = 1$  маємо  $\|L\| = 2^m$ , і збільшення  $m$  на одиницю веде до подвоєння  $\|L\|$ . Розглянемо випадок, коли  $s > 1$  та  $m \gg s$ . Тоді  $s(m-i) + i \rightarrow m$ , і можна записати

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^{m+1} \binom{s(m-i) + i}{i}}{\sum_{i=0}^m \binom{s(m-i) + i}{i}} = 2.$$

Це вказує на те, що  $s$  впливає лише на швидкість збіжності до граничного значення, тому для  $m \approx s$  граничне значення співвідношення потужностей більше двох.

Синтез асиметричних ТСК, які виправляють та виявляють помилки, полягає в тому, що необхідно знайти залежність вагових коефіцієнтів  $A_k (k=1, i)$  та модулі  $A_0$  порівняння  $\sum_{k=1}^i A_k x_k \equiv 0 \pmod{A_0}$  умови якості приймання. Нижче подана теорема, яка є основою для побудови кодів з виправленням помилок.

**Теорема 2.** Якщо коефіцієнти  $A_k$  порівняння

$$\sum_{k=1}^i A_k x_k \equiv 0 \pmod{A_0}$$

визначено так, що

$$A_k = (e_0 + 1)^{k-1}, \\ A_0 = (e_0 + 1)^i,$$

то помилки кратності меншої чи рівної  $i$  величиною  $[-e_0, e_0]$  виявляються з імовірністю 1.

**Доведення.** Вектор помилки  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_i)$  й кодове слово  $\vec{X}$  скалярно складаються, тому  $\hat{X} = \vec{X} + \vec{e}$  та

$$\sum_{k=1}^i A_k \hat{x}_k \equiv \sum_{k=1}^i A_k (x_k + e_k) \equiv \sum_{k=1}^i A_k e_k \pmod{A_0},$$

де  $e_k \in [-e_0, e_0], k = (1, i)$ .

Припустимо,  $e_k = e_0$ , тоді

$$\sum_{k=1}^i A_k e_0 \equiv e_0 \sum_{k=1}^i (e_0 + 1)^{k-1} \equiv (e_0 + 1)^i - 1 \pmod{A_0}, \quad (6)$$

для  $e_k = -e_0$  маємо

$$\sum_{k=1}^i A_k e_0 \equiv -[(e_0 + 1)^i - 1] \equiv -A_0 + 1 \pmod{A_0}. \quad (7)$$

Беручи до уваги вирази (6), (7), дістаємо  $\left| \sum_{k=1}^i A_k e_k \right| < A_0 \forall e_k \in [-e_0, e_0]$ , що й треба було довести.

#### Висновок

Код виправляє помилки кратності меншої чи рівної  $i$  величиною  $\left( -\left\lfloor \frac{e_0}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{e_0}{2} \right\rfloor \right)$ . Для того щоб код виявив помилки кратності меншої чи рівної  $i$  величиною  $\left( -\left\lfloor \frac{e_0}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{e_0}{2} \right\rfloor \right)$ , усі синдроми  $S$  мають бути різними. Методом математичної індукції можливо показати, що всі  $\left( 2 \left\lfloor \frac{e_0}{2} \right\rfloor \right)^i$  – синдроми різні.

#### Література

1. Бройдо В.Л. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: учебник для вузов: Питер, 2004 – 703с.: ил.

2. Теория передачи сигналов: учебник для вузов/ А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, М.В. Назаров, Л.М. Финк, М. Радио и связь, 1986. – 304 с., ил.
3. Захарченко М.В., Кільдішев В.Й., Мартинова О.М. Системи передавання даних. Том 1 Ефективність блокового кодування. ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2014. – 488 с.
4. В.М. Захарченко. Синтез багатопозиційних часових кодів – К.: Техніка, 1999. – 284 с.
5. Бабкин В.Ф., Крюков А.Б. Кодирование дискретных функцией с заданной суммой значений. – В кн.: Кодирование в сложных системах. –М.: Наука, 1974. – С. 184-188.
6. Бабкин В.Ф., Штарков Ю.М. Нумерация последовательностей с заданным числом переходов. В кн.: Кодирование в сложных системах. –М.: Наука, 1974. – С. 175-180.

### References

1. Broido V.L. Vichislitelnie sistemi\_ seti i telekommunikacii\_ uchebnik dlya vuzov\_ Piter\_ 2004 – 703s\_ il.
2. Teoriya peredachi signalov\_ uchebnik dlya vuzov/ A.G. Zyuko\_ D.D. Klovskaa\_ M.V. Nazarov\_ L.M. Fink\_ M. Radio i svyaz\_ 1986. – 304 s\_ il.
3. Zaharchenko M.V.\_ Kildishev V.I.\_ Martinova O.M. Sist
4. V.M. Zaharchenko. Sintez bagatopoziciinih chasovih kodiv – K.\_ Tehnika\_ 1999. – 284 s.
5. Babkin V.F.\_ Kryukov A.B. Kodirovanie diskretnih funkciei s zadannoi summoi znachenii. – V kn\_ Kodirovanie v slojnih sistemah. –M\_ Nauka\_ 1974. – S. 184\_ 188.
6. Babkin V.F.\_ Shtarkov Yu.M. Numeraciya posledovatelnosti s zadannim chisлом perehodov. V kn\_ Kodirovanie v slojnih sistemah. –M\_ Nauka\_ 1974. – S. 175\_ 180.

Рецензія/Peer review : 27.5.2015 р.

Надрукована/Printed : 21.6.2015 р.

Стаття рецензована редакційною колегією