

**АНИЗОТРОПНА ФІЛЬТРАЦІЯ З ВИКОРИСТАННЯМ ВАГОВОЇ ФУНКЦІЇ НА ОСНОВІ ГАУСІВСЬКОЇ МОДЕЛІ ПІКСЕЛЯ**

*Запропоновано метод підвищення якості анізотропної фільтрації тривимірних зображень за рахунок використання вагової функції на основі Гаусівської моделі пікселя для визначення кольору пікселя в екранній площині.*

*Ключові слова: анізотропна фільтрація, гаусівська модель пікселя, текстурування*

O.N. ROMANIUK, I.V. ABRAMCHUK, O.O. DUDNYK  
Vinnytsia National Technical University

**ANISOTROPIC FILTERING WITH WEIGHT FUNCTION BASED GAUSSIAN PIXEL MODEL**

*A method of improving the quality of anisotropic filtering three-dimensional images by using weight functions to determine the color of the pixel in the screen plane.*

*Keywords: anisotropic filtering, Gaussian pixel model, texturing,*

**Постановка задачі**

Розвиток засобів комп'ютерної графіки передбачає підвищення реалістичності формування графічних сцен. При побудові високореалістичних зображень використовують текстури [1,2,3], які накладають на графічні об'єкти. Текстурування дозволяє успішно вирішувати задачі, які трудомістко розв'язати прямими методами [1 та суттєво зменшити обчислювальні витрати.

На даному етапі при текстуруванні широко використовується анізотропна фільтрація, яка дозволяє більш точно визначати кольори пікселів, які відповідають елементам текстури, що розташовані не паралельно екрану. Це найбільш якісний і поширений метод текстурування. На відміну від ізотропних видів фільтрації (білінійна та трилінійна) використовується проекція пікселя на текстурну поверхню [1,3].

Для визначення кольору екранного пікселя використовують усереднення кольору всіх текселів, проекція яких відповідає даному пікселю.

З метою підвищення реалістичності відтворення тривимірних сцен при використанні анізотропної фільтрації важливо врахувати те, що інтенсивність кольору всередині пікселя зменшується нелінійно від його центра до периферійних зон.

Метою дослідження є підвищення реалістичності формування зображень за рахунок використання при анізотропній фільтрації вагових функцій, що відображають зміну кольору пікселя, який проектується на текстурну площину.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Серед методів фільтрації текстур найбільш поширеними є білінійна та трилінійна фільтрації.

Білінійна фільтрація [3] передбачає розрахунок кольору пікселя на екрані, за допомогою усереднення кольору чотирьох текселів, що задають проекцію цього пікселя з плоского екрану на тривимірну площину.

Трилінійна фільтрація [3], являє собою симбіоз мір-текстурування та білінійної фільтрації. Фактично виконується білінійна фільтрація на двох мір-рівнях, що в результаті дає 2 текселя по одному для кожного мір-рівня. Колір пікселя, який повинен бути виведений на екран, визначається в результаті інтерполяції за кольорами двох мір-текстур [2].

Ці типи фільтрації дозволяють відносно коректно розраховувати колір тільки для тих пікселів, відповідні текселі яких знаходяться в текстурній площині, яка паралельна екрану. Таке обмеження викликане тим, що вибірка груп з чотирьох текселів при білінійній фільтрації відбувається по строго заданому закону.

При використанні ізотропних методів, текселі завжди апроксимують коло, що і є проекцією екранного пікселя на площину текстури. Чим більше поверхня текстури відхиляється від паралелі екрану, тим більша буде значення похибки при визначенні кольору пікселя. У результаті чого, текстури, розташовані під гострими кутами, сильно розмиваються [2].

При анізотропній фільтрації проекція пікселя на поверхню текстури розглядається не як коло, а як витягнутий еліпс (рис. 1), що дозволяє точніше визначати кольори пікселів [2,3].

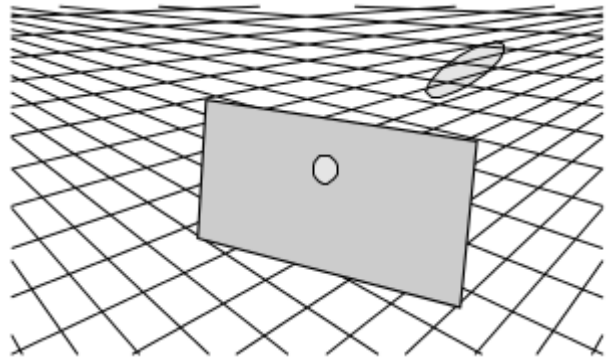


Рис. 1. Проекція пікселя на поверхню текстури

### Формулювання мети дослідження

Серед усіх моделей пікселя найбільш адекватною є гаусівська модель [4], згідно з якою інтенсивність кольору змінюється нелінійно від центру пікселя (рис. 2).

При анізотропній фільтрації важливо використати цю властивість, яка передбачає усереднення кольору пікселів усередині сліду відповідно до вагових функцій. В сучасних засобах комп'ютерної графіки найчастіше використовують вагові коефіцієнти, що відповідають відстані текселя до центру еліпса. Відстань від центру пікселя змінюється лінійно, тому такі методи не відповідають Гаусівській моделі пікселя [5].

Тому існує потреба підвищення реалістичності формування зображень за рахунок використання при анізотропній фільтрації вагових функцій на основі Гаусівської моделі пікселя, що відображають зміну кольору пікселя, який проектується на текстурну площину.

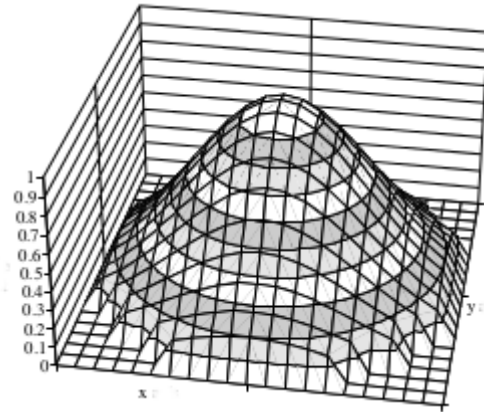


Рис. 2. Гаусівська модель пікселя

### Викладення основного матеріалу дослідження

Відповідно до Гаусівської моделі піксель в просторі екрану має форму тіла обертання кривої Гауса з діаметром основи рівним 1 та об'ємом рівним 1 [4]. При проекції в простір текстури його форма змінюється вздовж вектору нахилу полігону, при цьому основа фігури набуває форми еліпса (рис. 3). Значення кольору пікселя на екрані визначається значеннями кольорів усіх текселів, що формують еліпс. При цьому слід врахувати, що інтенсивність кольору текселів знижується по мірі віддалення від центру еліпсу до зон блюмінгу пропорційно висоті фігури в даній точці

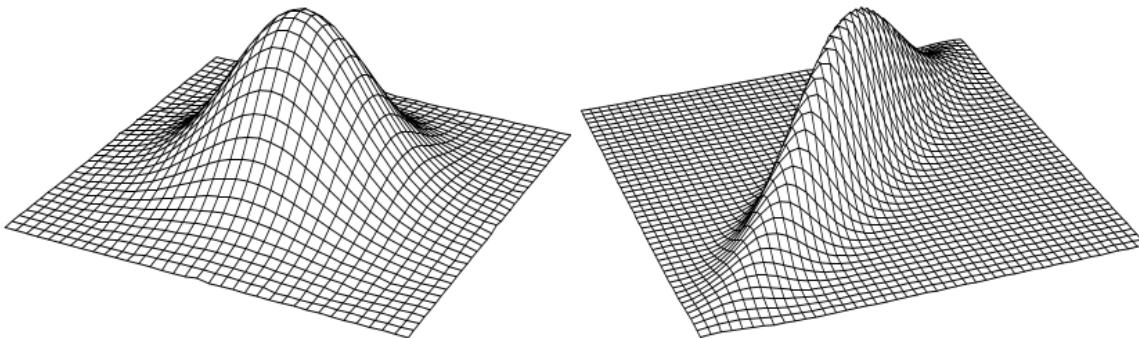


Рис. 3. Форма пікселя в просторі екрану та його проекції в просторі текстури відповідно до Гаусівської моделі пікселя

Координати центру еліпса визначають за формулами [1]:

$$u_i = \frac{A_1 \cdot x_i + B_1 \cdot y_i + C_1}{D \cdot x_i + E \cdot y_i + F},$$

$$v_i = \frac{A_2 \cdot x_i + B_2 \cdot y_i + C_2}{D \cdot x_i + E \cdot y_i + F}.$$

де  $u$  і  $v$  – текстурні координати,  $x$  і  $y$  – екранні координати об'єкта,  $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D, E, F$  – коефіцієнти полігону, який текстурується.

Рівняння еліпса складають за наступним алгоритмом [6]:

Визначення векторів осей:

$$(U_x, V_x) = \left( \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx} \right)$$

$$(U_y, V_y) = \left( \frac{du}{dy}, \frac{dv}{dy} \right), \quad (1)$$

Визначення коефіцієнтів рівняння:

$$A = V_x^2 + V_y^2$$

$$B = -2(U_x V_x + U_y V_y)$$

$$C = U_x^2 + U_y^2$$

$$F = (U_x V_y + U_y V_x)^2$$

Кінцеве рівняння:

$$AU^2 + BUV + CV^2 = F, \quad (2)$$

де  $U = u - u_0, V = v - v_0$ .

Для еліпса, осі якого паралельні осям координат висоту фігури в заданій точці можна обрахувати таким чином:

$$W(u, v) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{(u-u_0)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(v-v_0)^2}{\sigma_2^2} \right]}. \quad (3)$$

Дисперсії нормального закону розподілу виберемо з умов:

$$\sigma_1 = \frac{L}{6}, \sigma_2 = \frac{d}{6}$$

де  $L$  та  $d$  – довжини осей еліпса.

Для довільно орієнтованого еліпса необхідно врахувати його кут нахилу. Поворот на кут  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  визначається новими координатами  $u_1 = u \cdot \cos(\theta) + v \cdot \sin(\theta)$ ,  $v_1 = u \cdot \sin(\theta) + v \cdot \cos(\theta)$ . Таким чином, функція 3 для довільно орієнтованого еліпса матиме вигляд:

$$W(u, v) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{[(u-u_0) \cdot \cos(\theta) + (v-v_0) \cdot \sin(\theta)]^2}{\sigma_1^2} + \frac{[-(u-u_0) \cdot \sin(\theta) + (v-v_0) \cdot \cos(\theta)]^2}{\sigma_2^2} \right]}. \quad (4)$$

Кут нахилу еліпса визначимо за формулою

$$\theta = \arctg \left( \frac{V_x}{U_x} \right). \quad (5)$$

Для визначення довжини осі еліпса складемо систему рівнянь на основі рівняння (2) та канонічного рівняння прямої:

$$\begin{cases} \frac{u - u_0}{U_x} = \frac{v - v_0}{V_x} \\ AU^2 + BUV + CV^2 = F. \end{cases}$$

Оскільки, відповідно до рівняння (2),  $U = u - u_0, V = v - v_0$  можна виконати таку заміну:

$$\begin{cases} \frac{U}{U_x} = \frac{V}{V_x} \\ AU^2 + BUV + CV^2 = F. \end{cases}$$

Виразимо  $U$  через  $V$ :

$$\begin{cases} U = \frac{V U_x}{V_x} \\ A \left( \frac{V U_x}{V_x} \right)^2 + B V \frac{V U_x}{V_x} + C V^2 = F. \end{cases}$$

Розв'язком квадратного рівняння є:

$$V = \pm V_x \sqrt{\frac{F}{A U_x^2 + B U_x V_x + C V_x^2}}. \quad (6)$$

Підставивши формулу (5) в рівняння  $U = \frac{V U_x}{V_x}$ , отримаємо:

$$U = \pm U_x \sqrt{\frac{F}{A U_x^2 + B U_x V_x + C V_x^2}}.$$

Оскільки  $U, V$  є проекціями півосі еліпса на осі координат, довжину осі еліпса можна визначити за теоремою Піфагора:

$$\begin{aligned}
 L &= 2\sqrt{\left(\pm V_x \sqrt{\frac{F}{AU_x^2 + BU_x V_x + CV_x^2}}\right)^2 + \left(\pm U_x \sqrt{\frac{F}{AU_x^2 + BU_x V_x + CV_x^2}}\right)^2} = \\
 &= 2\sqrt{\frac{U_x^2 F}{AU_x^2 + BU_x V_x + CV_x^2} + \frac{V_x^2 F}{AU_x^2 + BU_x V_x + CV_x^2}} = \\
 &= 2\sqrt{\frac{F(U_x^2 + V_x^2)}{AU_x^2 + BU_x V_x + CV_x^2}}. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Очевидно, що такі обчислення досить складні, а тому потребують спрощень з метою підвищення продуктивності. При обчисленнях в реальному часі криву Гауса часто апроксимують таким виразом [7]:

$$f(x) = \left(1 - \frac{n}{2K} x^2\right)^K. \quad (8)$$

При  $n=8, K=8$ , наведена формула (8) забезпечує відтворення кривої Гауса з високою точністю:

$$f(x) = \left(1 - \frac{8}{2 \cdot 8} x^2\right)^8 = \left(1 - \frac{1}{2} x^2\right)^8.$$

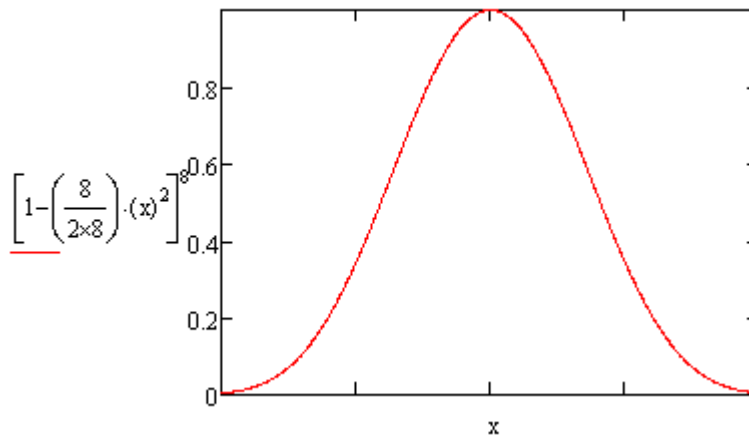


Рис. 4. Графік апроксимованої кривої Гауса

Таким чином, функція (4) для спрощеної кривої Гауса має вигляд:

$$W(x, y) = \left(1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{[(u - u_0) \cdot \cos(\theta) + (v - v_0) \cdot \sin(\theta)]^2}{L^2} + \frac{[-(u - u_0) \cdot \sin(\theta) + (v - v_0) \cdot \cos(\theta)]^2}{d^2} \right] \right)^8.$$

Оскільки значення  $u - u_0$  та  $v - v_0$  також обчислюються для рівняння (2) і рівні  $U$  і  $V$  відповідно, то має місце спрощення:

$$W(x, y) = \left(1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{[U \cos(\theta) + V \cdot \sin(\theta)]^2}{L^2} + \frac{[V \cos(\theta) - U \sin(\theta)]^2}{d^2} \right] \right)^8. \quad (9)$$

Як видно із формули (9), існує потреба в обчисленні квадратів довжин осей еліпса. Для визначення довжини осей еліпса за формулою (7) необхідно обчислити квадратний корінь многочлена. Очевидно, що формулу (7) можна спростити таким чином, щоб одразу визначати довжину осей в степені 2 зі значно меншою складністю:

$$L^2 = \left(2\sqrt{\frac{F(U_x^2 + V_x^2)}{AU_x^2 + BU_x V_x + CV_x^2}}\right)^2 = \frac{4F(U_x^2 + V_x^2)}{AU_x^2 + BU_x V_x + CV_x^2} \quad (10)$$

Таким чином, вагу кожного текселя, що визначає колір екранного пікселя можна визначити за формулою (9). Необхідними коефіцієнтами для формули (9) є кут нахилу, еліпса відносно осей координат та квадрати довжин його осей. Ці коефіцієнти обчислюються за формулами (5) і (10) відповідно.

Для забезпечення максимального рівня реалістичності слід врахувати, що текселі, які знаходяться

на периферії можуть перетинатись еліпсом та впливати на визначення кольору пікселя пропорційно тій частині площі, що відтинається еліпсом. Об'єм відсікання для пікселя заданого Гаусівською моделлю визначають за формулою [8]:

$$P(d) = 0.5 + (2.151 - 2.358d)d,$$

де  $d$  – відстань від центру пікселя до перерізу.

Для прикладу, графік вагових коефіцієнтів для текселів, що формують еліпс з діагоналями 3 та 6, і кутом нахилу  $30^\circ$  зображено на рисунку 5.

### Висновки

Анізотропна фільтрація дозволяє досягти більш високої реалістичності формування графічних сцен. Запропоновано метод анізотропної фільтрації з використання вагових функцій на основі Гаусівської моделі пікселя, що дозволяє істотно підвищити якість формування тривимірних графічних зображень.

### Література

1. Paul S. Heckbert, Survey of texture mapping - Graphics Interface '1986

2. Вяткин С. И. Анизотропная фильтрация текстуры в реальном времени / С. И. Вяткин, А. Н. Романюк, А. А. Дудник, // Вимірювальна та Обчислювальна Техніка в Технологічних Процесах № 4' 2015

3. Романюк О.Н. Аналіз методів фільтрації текстур / О.Н. Романюк, О.О. Дудник // Міжнародна науково-практична Інтернет-конференція «Молодь в технічних науках: дослідження, проблеми, перспективи» – Вінниця – 2015. – Режим доступу: [http://conf.inmad.vntu.edu.ua/fm/files/administrator\\_materials\\_1429512871.doc](http://conf.inmad.vntu.edu.ua/fm/files/administrator_materials_1429512871.doc)

4. Романюк О.Н. Математичні моделі пікселя / О.Н. Романюк, О.О. Дудник // Електронні інформаційні ресурси: створення, використання доступ. Збірник міжнародної науково-практичної конференції.-Вінниця-2014.-С.289-293

5. Романюк С. О. Анізотропна фільтрація з використанням вагових функцій / С.О. Романюк, О.О. Дудник, Л.А. Савицька, О.В. Романюк // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон – 2015. - № 3. - С. 459-46

6. Ned Greene. Creating Raster Omnimax Images from Multiple Perspective Views Using the Elliptical Weighted Average Filter / Ned Greene, Paul S. Heckbert//IEEE VG&A 1986

7. Lyon Richard. Phong Shading Reformulation for Hardware Renderer Simplification / Richard F. Lyon // Apple Technical Report #43 August 2, 1993

8. Романюк О.Н. Модифікація гаусівської моделі пікселя для задач антиаліазингу / О.Н. Романюк, І. В. Абрамчук, О.О. Дудник, О.В. Мельник // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія : Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. - 2015. - Вип. 1. - С. 84-88.

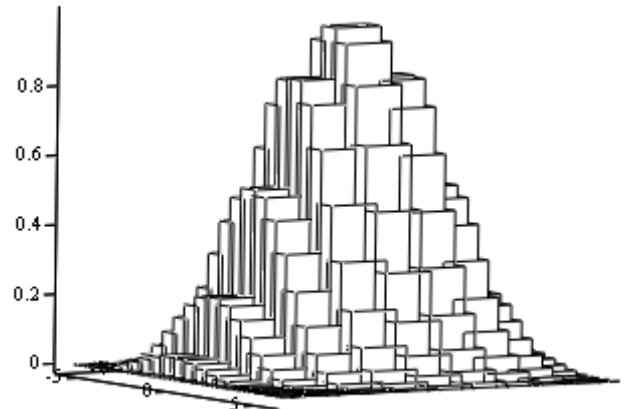


Рис. 5. Графік вагових коефіцієнтів кольорів еліпса

### References

1. Paul S. Heckbert, Survey of texture mapping - Graphics Interface "1986
2. Vjatky S. Y. Anizotropnaja fyltracyu tekstury v realnom vremeny / S. Y. Vjatky, A. N. Romanjuk, A. A. Dudnyk, // Vymirjuvalna ta Občysljuvalna Technika v Technolohičnyh Procesach # 4" 2015
3. Romanjuk O.N. Analiz metodiv filtracii tekstur / O.N. Romanjuk, O.O. Dudnyk // Mižnarodna naukovo-praktyčna Internet-konferencija «Molod' v techničnyh naukach: doslidžennja, problemy, perspektvy» . – Vinnycja – 2015. - Režym dostupu: [http://conf.inmad.vntu.edu.ua/fm/files/administrator\\_materials\\_1429512871.doc](http://conf.inmad.vntu.edu.ua/fm/files/administrator_materials_1429512871.doc)
4. Romanjuk O.N. Matematyčni modeli piksela / O.N. Romanjuk, O.O. Dudnyk // Elektronni informacii resursy: stvorennja, vykorystannja dostup. Zbirnyk mižnarodnoji naukovo-praktyčnoji konferencii.-Vinnycja-2014.-S.289-293
5. Romanjuk S. O. Anizotropna fil'racija z vykorystannjam vahovyh funkcij / S.O. Romanjuk, O.O. Dudnyk, L.A. Savyc'ka, O.V. Romnjuk // Visnyk Chersonskoho nacional'nogo techničnoho universytetu. – Cherson – 2015. - # 3. - S. 459-46
6. Ned Greene. Creating Raster Omnimax Images from Multiple Perspective Views Using the Elliptical Weighted Average Filter / Ned Greene, Paul S. Heckbert//IEEE VG&A 1986
7. Lyon Richard. Phong Shading Reformulation for Hardware Renderer Simplification / Richard F. Lyon // Apple Technical Report #43 August 2, 1993
8. Romanjuk O.N. Modyfikacija hausivs'koji modeli piksela dlja zadač antyali jazynhu / O.N. Romanjuk, I. V. Abramčuk, O.O. Dudnyk, O.V. Melnyk // Naukovi pracj Doneckoho nacionalnoho techničnoho universytetu. Serija : Informatyka, kibernetyka ta občysljuvalna technika. - 2015. - Vyp. 1. - S. 84-88.

Рецензія/Peer review : 26.5.2016 р.

Надрукована/Printed : 4.7.2016 р.

Стаття рецензована редакційною колегією