

## ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ЕЙЛЕРА ТА ЛАГРАНЖА В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ ГІДРОДИНАМІКИ

Робота присвячена дослідженню обтікання лобової поверхні конфузорів типових конструкцій та опор мостових переходів. Встановлена доцільність гідравлічних розрахунків за методом Лагранжа з метою оптимізації форми їх лобової поверхні.

Ключові слова: в'язка рідини, лобовий опір, лагранжеві частинки, стиснення потоку, кут атаки, оптимізація.

O.B. SHADYBA

Sumy National Agrarian University

### APPLICATION OF THE LAGRANGE AND EULER'S METHODS FOR HYDRODYNAMICS PROBLEMS

*Annotation.* The results shown in the present paper concern mainly water flow but may be used for the connection of the inside problem with the outside hydrodynamics problem. At the present time the main task of the proposed approach is to identify the contraction degree function correctly, defined only for the inside problem of hydroaerodynamics.

*Keywords:* viscous fluid drag, lagrangian particle stream compression, angle of attack, optimization.

#### Вступ

Порівняльний аналіз застосування класичних методів Ейлера та Лагранжа при чисельному вирішенні задач гідродинаміки був представлений ще на початку ери комп'ютеризації [1]. Автори при побудові розрахункових моделей рекомендують диференційований підхід, враховуючи особливості комплексу крайових умов і мети розрахунку, хоча зазвичай структура фізичних задач краще визначається в змінних Лагранжа. В той же час, незважаючи на природність та переваги цього методу, він не отримав належного розповсюдження і застосовується лише в окремих випадках, поступаючись підходу Ейлера [1-4].

В запропонованій роботі показано вирішення деяких практичних задач, що ілюструють можливості обох методів.

#### 1. Постановка задачі

Зменшення гідравлічного опору руслових інженерних споруд має практичне значення як з точки зору надійності мостів в критичні поведенні періоди експлуатації при значному стисненні та великій швидкості річкового потоку, так і в екологічних процесах самоочищення водойм. Характер силової взаємодії потоку з наплавними чи стаціонарними опорами мостових переходів значною мірою залежить від форми їх лобової поверхні. На розподіл гідродинамічних характеристик в своєрідному конфузори, який утворюється навколо лобової частини обтічних тіл впливають також геометричний параметр стиснення потоку  $s=R^2/r^2$ , коефіцієнт шорсткості змоченої поверхні, число Рейнольдса. В цьому прикладі ми обмежимося розглядом впливу лише геометричного параметру стиснення та форми лобової поверхні тіл форми при їх взаємодії з рівномірним турбулентним потоком в квадратичній області опору. Для спрощення задачі знехтуємо гідравлічними втратами на тертя. Як було показано в роботах [1, 4], тиск реальної в'язкої рідини, якою є вода, на лобову поверхню вісесиметричного конфузора перевищує тиск ідеальної рідини і це призводить до втрат енергії.

$$\Delta p S_2 = 2\pi \int_r^R f(r) r dr \quad (1)$$

де

$$f(r) = \frac{\rho V_j^2}{2} \int_1^s k^2 \sin^2 \alpha \cdot d(s^2) + f(R) \quad (2)$$

$f(r)$  - функція перевищення тиску потоку в'язкої рідини над ідеальною [4];

$\Delta p$  - загальні втрати тиску в конфузори;

$S_2 = \pi r^2$  - площа меншого перерізу конфузора;

$r, R$  - відповідно радіуси меншого та більшого перерізів;

$k$  - параметр, що враховує швидкість струменів відносно середньої швидкості потоку перед стисненням;

$\alpha$  - локальний кут атаки.

#### 2. Виклад основного матеріалу

Слід звернути увагу, що з метою визначення функції  $f(r)$  потік розглядається як сукупність елементарних струменів, тиск та швидкість в яких осереднені в часі (модель Рейнольдса-Буссинеска). В припущенні безвідривного обтікання характерною особливістю межових струменів є визначеність їх траєкторій формою лобової поверхні, яка утворює деякий локальний кут атаки з діючими на них імпульсами лагранжевих часток внутрішніх струменів потоку. На підставі закону збереження імпульсу дія внутрішніх струменів передається межовим таким же чином, як і при повороті їх самих на такий же кут. Інакше кажучи,

на лобовій поверхні зберігається певний розподіл надлишкової кінетичної та потенціальної енергії, отриманої лагранжевими частками межових струменів:

$$dE = dE \cos^2 \alpha + dE \sin^2 \alpha = \frac{\rho (k V_1)^2}{2} \cdot d(s^2) \quad (3)$$

Експериментальні дані підтверджують явище перевищення тиску в межовому струмені не тільки для конфузора, але й для зовнішнього обтікання лобової поверхні довільної форми [2-5], що в передній частині утворює своєрідний кільцевий конфузур (рис.1). Дійсно, якби такого перевищення не було, то обтікання перешкод відбувалося б без втрат енергії, що можливо лише для ідеальної рідини.

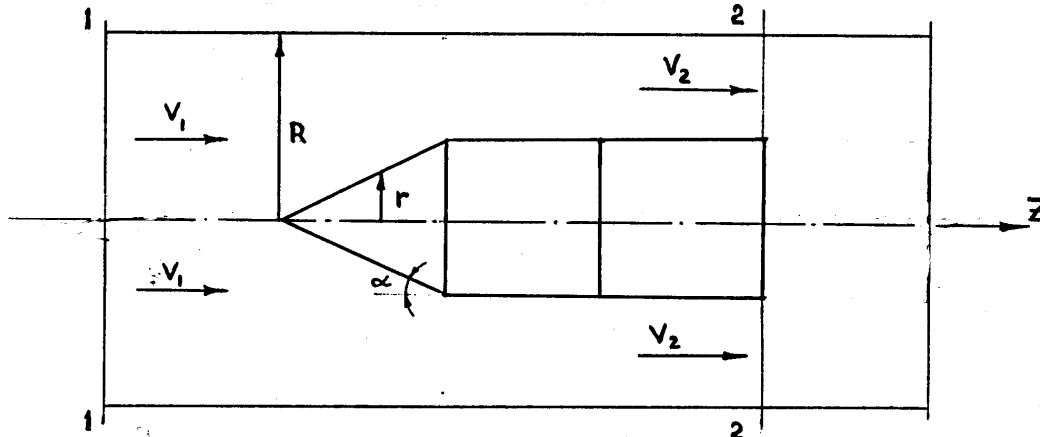


Рис. 1. Структура кільцевого конфузору

Очевидно, що кінетична імпульсна компонента надлишкової енергії матиме вигляд:

$$d\phi(r) = \frac{\rho (k V_1)^2}{2} \cos^2 \alpha d(s^2) \quad (4)$$

А надлишковий тиск в лагранжевій частинці межового струменя можна записати таким чином:

$$d\phi(r) = \frac{\rho (k V_1)^2}{2} \sin^2 \alpha d(s^2) \quad (5)$$

В інтегральному вигляді розподіл надлишкового тиску на внутрішній поверхні конфузору буде:

$$f(r) = \frac{\rho V_1^2}{2} \int_1^s k^2 \sin^2 \alpha d(s^2) + f(R) \quad (6)$$

Тоді компонента опору форми лобової поверхні конфузору:

$$\Delta p S_2 = 2\pi \int_0^r \left[ \frac{\rho V_1^2}{2} \int_1^s k^2 \sin^2 \alpha d(s^2) + f(R) \right] r dr \quad (7)$$

### 3. Експериментальні дані

Результати експериментальних досліджень також добре узгоджуються з залежністю функції перевищення тиску від квадрата синуса кута атаки [3-5]. Крім того, встановлено зростання вказаної функції уздовж обтічної поверхні. Це можна пояснити лише вказаним перерозподілом енергії поміж струменями при стисканні потоку, яке характеризується збільшенням енергії межових струменів з відповідним підвищенням в них тиску та зростанням швидкості. Процес відбувається за рахунок зменшення імпульсу внутрішніх струменів потоку, які не мають можливості безпосереднього контакту з поверхнею обтікання.

Таблиця 1

**Вплив кута атаки та ступеню стиснення потоку n на лобовий опір вісесиметричного тіла, розташованого з утворенням кільцевого конфузора**

n	Кут атаки конічного оголовка			
	60°	90°	120°	180°
0.1	103.5/102	126/125	148.5/146	171/174
0.2	21/20	26/26	31/30	36/37
0.3	7.4/7.2	9.3/9.5	11.3/11.5	13.2/13.0
0.4	3.2/3.3	4.1/4.2	5.1/4.9	6.0/6.0
0.5	1.5/1.6	2.0/2.0	2.5/2.4	3.0/2.9
0.6	0.72/0.7	1.0/0.98	1.3/1.3	1.56/1.60
0.695	0.35/0.39	0.51/0.52	0.67/0.67	0.82/0.83
Вільний потік (експеримент)	0.38	0.52	0.66	0.82

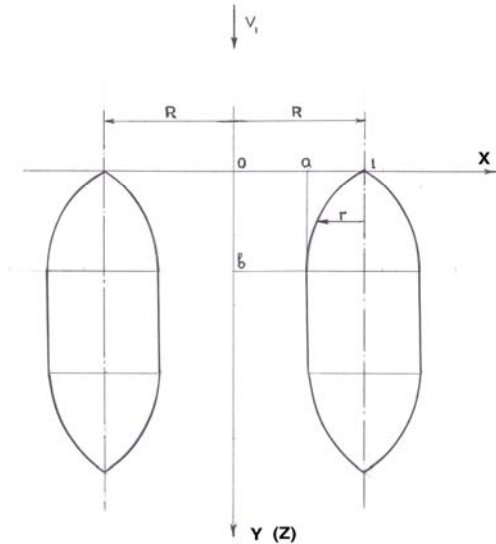


Рис. 2. Форми лобової поверхні опор мостових переходів до оптимізації

#### 4. Оптимізація форми лобової поверхні опор мостових переходів

Для подальшого теоретичного аналізу розглянемо двовимірний випадок, коли ряд стаціонарних мостових опор розташований в руслі постійної глибини  $H$  з кроком  $2R$ . Звернемо увагу, що співвідношення площі перерізу вільного потоку до площі перерізу стисненого потоку обернено пропорційне середній швидкості  $s = \frac{HR}{Hr} = \frac{v}{V_1}$ , а

співвідношення кінетичних енергій пропорційне квадратам ширини відповідних перерізів  $\frac{R^2}{r^2}$ .

При цьому слід зазначити, що в аналогічному виразі (2) для вісесиметричних трьохвимірних потоків це є функція четвертого порядку відносно характерного розміру поперечного перерізу  $\frac{R^4}{r^4}$  і тому має

більш складний розв'язок.

Таким чином, у прийнятій системі координат найпростіша двовимірна задача оптимізації полягає у визначенні кривої, яка доставляє мінімум інтегралу тиску на лобову поверхню

$$\frac{\rho(k \cdot V_1)^2}{2} \int_r^R \frac{R^2}{r^3} \cdot \sin^2 \alpha \cdot dr, \quad \text{або} \quad \int_1^x \frac{-dx}{x^3 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]} \Rightarrow \min \quad (8)$$

де  $X = \frac{r}{R}, \sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2}$ , при крайових умовах  $(y=0, x=1); (y = -b; x = x^2)$ . (9)

Необхідну умову існування екстремуму запишемо у вигляді диференційного рівняння Ейлера

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{2 \frac{dy}{dx}}{x^3 \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^2} \right) = 0 \quad (10)$$

Але це означає, що диференційний вираз є константою  $C_1$ . Вводячи додатний параметр  $t = \frac{dy}{dx}$ , отримаємо систему

$$dy = t dx \quad (11)$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{2}{C_1} \cdot \frac{t}{(t^2 + 1)^2}} \quad (12)$$

Звідки інтеграл у можна виразити таким чином

$$y = \sqrt[3]{\frac{2}{C_1}} \int_t^1 \left[ \frac{4t^{\frac{7}{3}}}{3(t^2 + 1)^{\frac{5}{3}}} - \frac{t^{\frac{1}{3}}}{3(t^2 + 1)^{\frac{2}{3}}} \right] dt \quad (13)$$

Разом з (8), після перетворень та інтегрування, матимемо явний розв'язок у параметричному вигляді причому сталі інтегрування знайдемо з крайових умов (9), задаючись також локальним кутом атаки в початковій точці стиснення потоку за допомогою параметру  $t=t_1$  при  $x=1$ . Таке рішення дозволяє отримати сукупність опуклих кривих лобової поверхні зі зменшенням їх кривизни в напрямі руху водного потоку. В даному випадку фізичний сенс мінімального опору мають рішення, які задовольняють умові достатньо гострого початкового кута атаки, тобто  $t_1 \geq 1$ .

Як висновок, слід вказати на можливість застосування викладеного підходу до зовнішньої задачі аеродинаміки. Так, наприклад, якщо розмістити циліндр діаметром  $2r$  з конічним оголовком в трубі

діаметром  $2R$  співвідносно, то лобовий опір такого тіла буде складатися з гідравлічних втрат в кільцевому конфузори, втрат на тертя в кільцевому зазорі та раптове розширення потоку згідно Борда. Очевидно, що збільшення діаметру труби (каналу) призводить до зменшення опору, який при цьому не може стати меншим за опір тіла, що обтікається вільним потоком. Визначення цієї межі, відповідної діаметру деякої фіктивної труби, в якій опір тіла не відрізняється від його опору у вільному потоці, може бути предметом подальших досліджень. Особливу актуальність при цьому мають задачі оптимізації форми обтічних тіл в двох- та трьох- вимірних асиметричних потоках з метою генерації максимальної підйомної сили при мінімальному лобовому опору.

### Висновки

Запропонована гідравлічна модель обтікання лобової поверхні конфузора типової конструкції (внутрішня задача гідродинаміки) та кільцевого, що відповідає зовнішній задачі гідродинаміки. Встановлено зв'язок у гідравлічних розрахунках лобового опору обох типів конфузоров та експериментально підтверджене виникнення перевищення тиску на лобовій поверхні тіл, що стискають потік води.

### Література

1. Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Б.Олдер, С.Фернбах, М.Ротенберг. М.: Мир, пер.с англ.,1967.- 384 с.
2. Дейли Дж., Харлеман Д. Механика жидкости. – М.: Энергия, 1971. – 332 с.
3. Реттер Э.И. Архитектурно-строительная аэродинамика. – М.: Стройиздат, 1984. – 294 с.
4. Шандыба А.Б. О гидравлических потерях в конфузоре. – Сб. науч. трудов СФТИ, сер."Химическое машиностроение". Киев УМК ВО, 1992.- С.89-94.
5. Shandyba A.B. Hydraulic Resistance of Bodies in Water Flow.- BWW Journal, May-June issue 2002, N3, USA.

### References

1. Vyichislitelnyie metody v gidrodinamike/ Pod red. B.Older, S.Fernbah, M.Rotenberg. M.: Mir, per.s angl.,1967.- 384 s.
2. Deyli Dzh., Harleman D. Mehanika zhidkosti. – M.: Energiya, 1971. – 332 s.
3. Retter E.I. Arhitekturno-stroitel'naya aerodinamika. – M.: Stroyizdat, 1984. – 294 s.
4. Shandyiba A.B. O gidravlicheskih poteryah v konfuzore. – Sb. nauch. trudov SFTI, ser."Himicheskoe mashinostroenie". Kiev UMK VO, 1992.- S.89-94.
5. Shandyba A.B. Hydraulic Resistance of Bodies in Water Flow.- BWW Journal, May-June issue 2002, N3, USA.

Рецензія/Peer review : 2.5.2016 р. Надрукована/Printed : 18.7.2016 р.  
Стаття рецензована редакційною колегією