УДК 004.932

О.Н. РОМАНЮК, О.В. МЕЛЬНИК
Вінницький національний технічний університет

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ГЕКСАГОНАЛЬНОГО РАСТРА ПРИ ПОБУДОВІ ПРИСТРОЇВ ВІДОБРАЖЕННЯ

Розглянуто особливості побудови зображень та відображення на гексагональному растрі. Розглянуто рефлекційну симетрію гексагонального растра та шестизв'язність гексагональних пікселів. Доведено твердження, що у гексагональному растрі відрізки прямої більш стабільні по ширині, ніж в квадратному, а дисперсія ширини лінії менша. Доведено, що у гексагональному растрі досягається краще наближення до відрізка прямої, ніж у квадратному растрі, з точки зору мінімізації максимального можливого відхилення від межі зображення.

Ключові слова: гексагональний растр, піксел, рефлекційна симетрія

ROMANYUK O. N., MELNYK O.V.
Vinnytsia NationalTechnical University

FEATURES OF USING HEXAGONAL RASTER FOR BUILDING DISPLAY DEVICES

The features of imaging and display on a hexagonal raster. Considered reflectional symmetry and raster six connectedness hexagonal pixels. A statement that the hexagonal raster segments are more stable in width than the square and variance of line width less. Advantages models hexagonal pixel color at higher quality playback. It is proved that the hexagonal raster achieved better approach to the segment of the line than the square raster, in terms of minimizing the maximal possible deviation from the border of the image.

Keywords: Hexagonal raster, pixel,reflectionsymmetry

Вступ

У сучасних засобах комп'ютерної графіки у переважній більшості використовується квадратний растр, який не забезпечує високої точності відтворення зображень, які задаються у дискретній формі. Тому актуальною є задача дослідження інших форм растрів.

З метою підвищення якості формування графічних зображень в пристроях відображення використовують гексагональний растр, який ще називають honeycomb або стільниковим. Гексагональний растр має ряд особливостей, які пов'язані з геометрією гексагона.

Аналіз літературних джерел

Базовим елементом формування гексагонального растра є правильний рівносторонній шестикутник– гексагон [1, 2]. Властивості побудови та відображення графічних примітивів на екранах, виконаних на основі гексагональної решітки, пов'язані з геометричними властивостями гексагона.

При використанні гексагонального растра шестикутниками заданого розміру можна замостити (заповнити) без розривів і накладань будь-яку поверхню. При такому замощені кожен піксел гексагонального растра має шість сусідніх пікселів.Такий растр є шестизв'язним (рис.1)

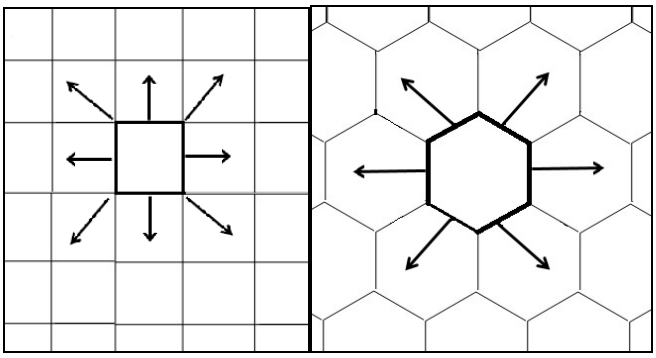


Рис. 1. Восьмизв'язний квадратний та шестизв'язний гексагональний растри

Характерна особливість екранів з гексагональним растром – це ***рефлекційна симетрія*** (***reflectionalsymmetry***). Рефлекційна симетрія має місце, коли одна частина зображення є дзеркальним відображенням іншої частини відносно ***лінії симетрії,*** або лінії дзеркала [3]**.** Приклад рефлекційної симетрії наведено(рис. 2).

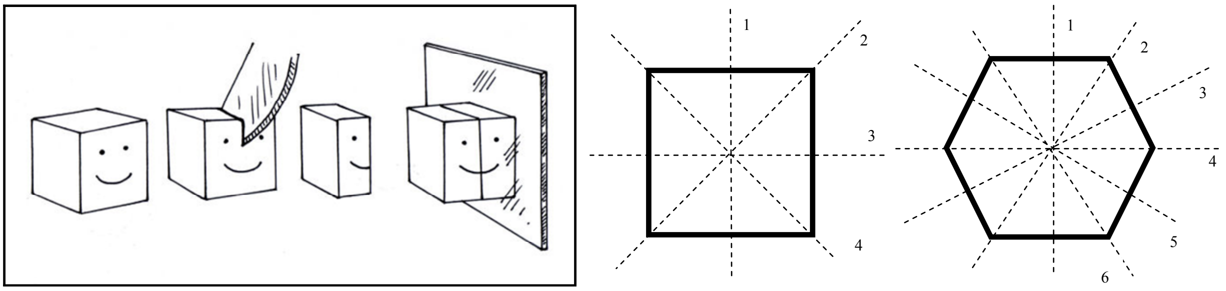


Рис. 2.Рефлекційна симетрія, лінії рефлекційної симетрії квадрата та гексагона

Дослідження особливостей геометрії для гексагональних пікселів проводить BellS., гексагональних решіток - LuczakE., RosenfeldA. [4, 5].

Окремі дослідники, зокрема, CarstensB., QuinnM., вважають використання гексагонального растра кращим для відтворення зображень [6].

Дослідження [7] Самощенко О. В., Ходуса С. В. присвячено питанням перетворення зображень, які сформовані у гексагональній системі координат, у псевдогексагональному вигляді. Це дозволяє подавати результати візуально без використання решітки чи апаратних гексагонально-орієнтованих пристроїв.

Теоретично досліджено властивості зображень, які показують перевагу гексагональної решітки у порівнянні зі стандартною прямокутною. Проте все ще недостатньо обґрунтованими є припущення про істотні переваги гексагонального растра над квадратним.

Мета роботи – дослідити особливості гексагонального растра, визначити переваги і недоліки гексагонального растра порівняно з квадратним.

Особливості відображення графічних примітивів на гексагональному растрі

Базовий елемент квадратного растра– квадрат, якиймає чотири лінії рефлекційноїсиметрії.Елемент гексагонального растра гексагон має таких ліній шість (рис. 2).

Рефлекційна симетрія гексагона справедлива для будь-якого довільно взятого гексагонального пікселя на гексагональному растрі. Якщо обрати центральний піксел екрана як точку відліку і початок координат, то гексагональний растр можна розділити на 12 секторів. Сусідні сектори мають рефлекційну симетрію у сусідніх парах: I та II, II та III, III та IV, IV та V, V та VI, VI та VII,VII та VIII, VIII та IX, IX та X, X та XI, XI та XII. Сектори через один є ідентичні і накладаються без втрат (рис. 3).

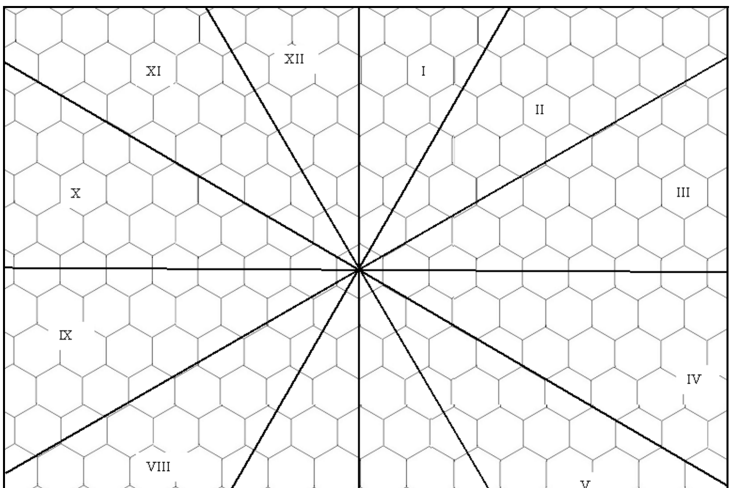


Рис. 3. Рефлекційно симетричні та ідентичні сектори гексагонального растра

Така властивість дає змогу при формуванні відрізків прямих на гексагональному растрі формувати лише для векторів під кутами від 0° до 30°, оскільки всі інші можна накласти на сформоване в одному секторі зображення відрізка прямої.

Для відображення точок на гексагональному растрі адресацію координат можна задати з кута екрана, як в квадратному растрі, а також,починаючи з центрального піксела (рис. 4).

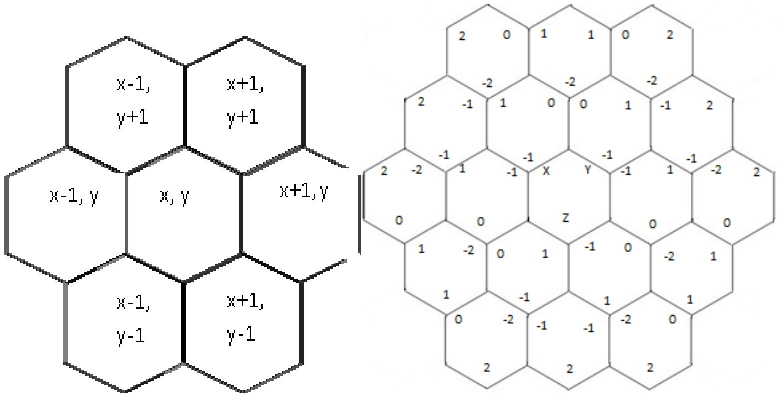


Рис. 4. Координати сусідніх пікселів у гексагональному растрі у двовимірній і тривимірній координатних системах

Наявність шести ліній рефлекційної симетрії та шестизв'язність гексагонального растра дають змогу робити адресацію за трьома змінними, по трьох координатних осях ***x,y, z***, починаючи з центру екрана, а не з кутів екрана, як у квадратному растрі (рис. 4).

Відображення відрізків прямих на гексагональному растрі пов'язане з геометрією гексагона а саме: з описаними вище властивостями симетрії і має такі особливості: горизонтальні відрізки, та відрізки прямих з кутом 60° до горизонталі, відображаються без спотворень, навіть при товщині відрізка у одинпіксел. Найбільше спотворення має місце при відображенні вертикальних відрізків(рис. 5).

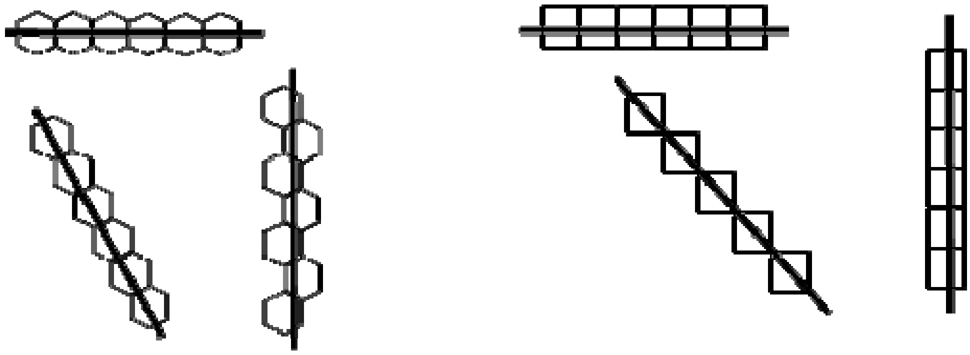


Рис. 5. Прямі на гексагональному та квадратному растрі

Завдяки шестизв'язностівідрізки прямої, побудовані в гексагональному растрі, більш стабільні по ширині, тобто дисперсія ширини лінії менша, ніж у квадратному растрі [8]. З цього випливає теорема.

Теорема 1.*У гексагональному растрі досягається краще наближення до відрізка прямої порівняноз квадратним растром, з точки зору мінімізації максимального можливого відхилення від ідеального відрізка.*

Теорема справедлива для випадку, коли площа квадратного пікселата гексагонального рівні 1, а також для випадку одиничної відстані між центрами пікселів.

Вирахуємо максимально можливі відхилення для квадратного та гексагонального растрів. Для цього обчислимо і порівняємо відстані ***α*** (рис. 6).

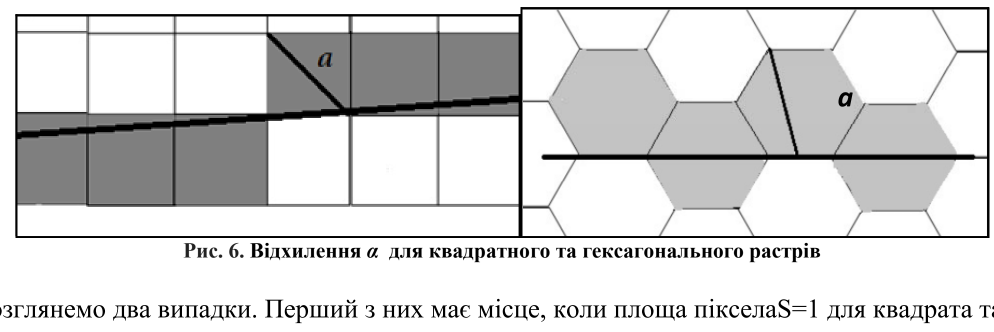


Рис. 6. Відхилення *α* для квадратного та гексагонального растрів

Розглянемо два випадки. Перший з них має місце, коли площа пікселаS=1 для квадрата та гексагона. Доведемо теорему для першого випадку.

Для квадрата $a_{кв} = \sqrt{2} = 1{,}41421$. Для гексагону площа якого S=1, з формули площі визначимо довжину сторони $t = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$. Знаючи довжину сторони гексагона, знайдемо відстань ***α*** (рис. 7).

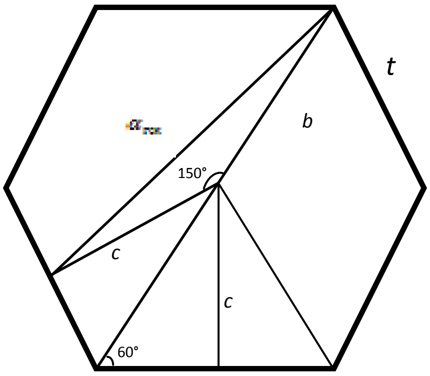


Рис. 7. Значення змінних у гексагоні

Згідно з теоремою косинусів для трикутників, $a_{гек}{}^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos 150^\circ$.

Оскільки $b = t = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}$, то $\sin 60^\circ = \dfrac{c}{b}, c = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$.

$$a_{гек}{}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Опустивши спрощення формул, у результаті отримаємо значення $a_{гек} = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{27}} = 1{,}11844$.

Порівняння $a_{кв}$ і $a_{гек}$ показує, що у гексагональному растрі наближення до прямої лінії є кращим порівняно з квадратним растром.

Розглянемо другий випадок, коли відстані між центрами пікселів дорівнюють одиниці, а площі пікселів різні. Доведемо теорему для другого випадку.

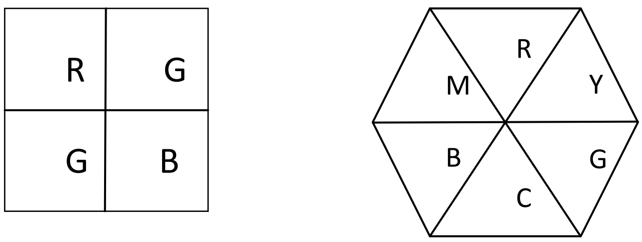
Для квадратного растра $a_{кв} = \sqrt{2} = 1{,}41421$.

Для гексагонального растра, коли відстань між центрами пікселів 1, відрізок $c = \dfrac{1}{2}$ (рис. 8). Відрізок **b** знайдемо з формули $\sin 60^\circ = \dfrac{\frac{1}{2}}{b}, b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Знаючи ***c*** і ***b*** вирахуємо $a_{гек}$ **.**

$$a_{гек}{}^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos 150^\circ = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 150^\circ; \; a_{гек} = \sqrt{\frac{15}{12}} = 1{,}118033.$$

Отримали $a_{гек}$ менше за $a_{кв}$, а тому наближення до відрізка прямої у гексагональному растрі краще.

Передача кольору в гексагональному растрі теж має особливості, які дозволяють стверджувати про перевагу над поширеним квадратним растром. Геометрія гексагонального піксела дозволяє розташувати елементи відтворення основних кольорів таким чином, щоб значно збільшити якість відтворення за рахунок більшого спектра передачі кольору (рис. 8).



R- red	Червоний
G-green	Зелений
B- blue	Синій
C-cyan	Блакитний
M-magenta	Пурпуровий
Y-yellow	Жовтий

Рис. 8. Відтворення кольору в пікселі

Таку технологію побудови піксела у вигляді гексагона запатентувала компанія SONY, скомбінувавши в одному пікселі шість кольорів. Кольори скомпоновано таким чином, щоб підсилити “адитивну кольорову модель” синтезу кольору для кольоровідтворення. Роздільна здатність значно зростає завдяки збільшенню кольорових фільтрів [9]. Також, у разі дефекту якогось із пікселів, якість інтерполяції не погіршиться, оскільки кольоровідтворення має подвійний рівень надлишковості: R+G=Y; G+B=C; R+B=M.

Висновки

Проаналізовано шестизв’язність гексагонального растра. Розглянуто рефлекційну симетрію гексагона. Розглянуто відображення прямих на гексагональному растрі. Запропоновано та доведено теорему про краще наближення до відрізка прямої у гексагональному растрі,ніж у квадратному растрі, з точки зору мінімізації максимального можливого відхилення від межі зображення.

Література

1. T. C. Hales, "The Honeycomb Conjecture,"/ Hales T. C. //Discrete Computational Geometry.Vol. 25. 2001. P. 1 – 22.
2. R. C. Stauntonand N. Storey, "A comparison between squareand hexagonalsampling methods forpipelinei mageprocessing," *Proc. SPIE*, vol. 1194.1989. P. 142 – 151.
3. Reflectionan drotation symmetry/ Cambridge University Press. - [Електронний ресурс]; Режим доступу : http://assets.cambridge.org/97805216/94315/excerpt/9780521694315_excerpt.pdf
4. Bell S. A digital geometry for hexagonal pixels / S. Bell, H. Fred, D. Mason // Image and Vision Computing. – V. 7. – No. 3. – 1989. - P. 194-204.
5. Luczak E. Distance on a hexagonal grid / E. Luczak, A. Rosenfeld // IEEE Transactions on Computers. – V.C-25. – No. 5. – 1976. – P. 532-533.
6. Carstens B. Hexagonal domain transform for shape analysis / B. Carstens, M. Quinn // Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques, SPIE. – 1991. – V.1607. – P. 197-205.
7. Самощенко О. В. Передискретизація зображень у гексагональній системі координат hex2 / Сомощенко О. В., Ходус С. В. // Наукові праці ДонНТУ Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка». – Випуск 14(188). – Донецьк, 2011. - С. 227-232.
8. Wuthrich C. A. An Algorithmic Comparison Between Squareand Hexagonal-based Grid / C. A. Wuthrich, P. Stucki // CVGIP: Graphical Modelsand Image Processing. – Vol. 53 – 1999. P. 324-339.
9. Романюк О. Н. Високопродуктивні методи та засоби зафарбовування тривимірних графічних об'єктів. Монографія. / О. Н. Романюк, А. В. Чорний. - Вінниця : УНІВЕСУМ -Вінниця, 2006. — 190 с.

References

1. T. C. Hales, "The Honeycomb Conjecture,"/ Hales T. C. //Discrete Computational Geometry.Vol. 25. 2001. P. 1 – 22.
2. R. C. Stauntonand N. Storey, "A comparison between squareand hexagonalsampling methods forpipelinei mageprocessing," *Proc. SPIE*, vol. 1194.1989. P. 142 – 151.
3. Reflectionan drotation symmetry/ Cambridge University Press. - [Electronic resource]; Access mode: http://assets.cambridge.org/97805216/94315/excerpt/9780521694315_excerpt.pdf
4. Bell S. A digital geometry for hexagonal pixels / S. Bell, H. Fred, D. Mason // Image and Vision Computing. – V. 7. – No. 3. – 1989. - P. 194-204.
5. Luczak E. Distance on a hexagonal grid / E. Luczak, A. Rosenfeld // IEEE Transactions on Computers. – V.C-25. – No. 5. – 1976. – P. 532-533.
6. Carstens B. Hexagonal domain transform for shape analysis / B. Carstens, M. Quinn // Intelligent Robots and Computer Vision X: Algorithms and Techniques, SPIE. – 1991. – V.1607. – P. 197-205.
7. Samoshchenko AV oversampling images in the hexagonal coordinate system hex2 / Somoschenko AV, SV Hodus // Proceedings of DonNTU Series "Informatics, Cybernetics and Computer Science". - Issue 14 (188). - Donetsk, 2011. - S. 227 - 232.
8. Wuthrich C. A. An Algorithmic Comparison Between Squareand Hexagonal-based Grid / C. A. Wuthrich, P. Stucki // CVGIP: Graphical ModelsandImage Processing. – Vol. 53 – 1999. P. 324 - 339.
9. Romanyuk O.H. High methods and tools for painting three-dimensional graphics. Monograph. / O. Romanyuk, A. Chornyi. - Ball: UNIVESUM -Vinnytsya, 2006. - 190 p.

Рецензія/Peer review : 19.10.2016 р. Надрукована/Printed : 8.11.2016 р.
Стаття рецензована редакційною колегією