УДК 004.383;519.7

С.В. УСТЕНКО
ДВНЗ « Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»

СИСТЕМИ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ НА ОСНОВІ АЛГОРИТМІВ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є – ЧЕБИШЕВА

В роботі пропонуються принципи побудови систем цифрової обробки сигналів в структуру яких входять аналізатори спектру. Розглянуто метод обчислення коефіцієнтів Фур'є на підґрунті використання алгоритмів перетворення Фур'є – Чебишева, що дозволяє застосовувати в аналізаторах спектра єдину нерівномірну шкалу частот і тим самим підвищувати такі інструментальні характеристики, як частотна роздільність і точність аналізу без істотних на це витрат.

Ключові слова: *ПФ – перетворення Фур'є, ПФЧ – перетворення Фур'є – Чебишева*

S.V. USTENKO
SHEE "Kyiv National Economic University"

THE DIGITAL SIGNAL PROCESSING ALGORITHMS BASED ON TRANSFORM FOURIER - CHEBYSHEV

The article proposed principles of specialized computer systems, the structure of which include spectrum analyzers. The method of calculating the coefficients of the Fourier based on algorithms to a Fourier – Chebyshev is described. It allows using uneven frequency scale for a single spectrum analyzer and improving such characteristics as frequency resolution and accuracy of the analysis without significant cost.

Keywords: PF - Fourier transform, PFCH - Fourier - Chebyshev

Для визначення спектральних характеристик сигналів в даний час використовують системи цифрової обробки сигналів, побудовані на базі універсальних ЕОМ або ж на базі спеціалізованих обчислювальних систем, що називаються цифровими аналізаторами спектра[1-3]. І в тому, і в іншому випадку результатом обчислення є коефіцієнти Фур'є, за якими судять про характер сигналів у частотній області.

Хоча спектральний аналіз на сучасному рівні розвитку вимагає великого обсягу обчислювальних операцій, він, в той же час, є основною частиною процесу вимірювання характеристик сигналів. Тому до згаданих систем пред'являється ряд специфічних вимог, характерних для вимірювальних засобів. До числа таких вимог відносяться малі габарити, простота експлуатації, можливість візуального відображення спектральних характеристик і основних режимів роботи, обробка в режимі реального часу, можливість вторинної обробки за алгоритмами згладжування, перетворення координат, представлення характеристик вимірювання в лінійному і логарифмічному масштабах і т. д. Цим вимогам найбільш повно відповідають цифрові аналізатори спектра.

Структури аналізаторів спектра дозволяють змінювати алгоритми обчислень залежно від класу сигналів, характеристик перетворення, методів адаптації до вхідного сигналу. За своїми функціональними можливостями в класі рішення задач цифрової обробки сигналів вони не поступаються універсальним ЕОМ. Крім того, структурні рішення ефективні тоді, коли вони дозволяють змінювати параметри аналізу таким чином, що підвищуються точністні характеристики вимірювання. До числа таких основних параметрів аналізу відносяться кількість частот, на яких бажано виміряти спектр, і роздільна здатність вимірювання спектральних складових. Суттєво також і те, що при спектральному аналізі практично у всіх існуючих аналізаторах є частотні піддіапазони, які необхідні для того, щоб мати інформацію про сигнал в якійсь окремій частотній області. Таким чином, структура аналізатора спектра повинна містити перетворюваний вхідний ланцюг і той апаратний мінімум, який необхідний для вирішення вимірювальних задач того чи іншого класу.

Аналізатори спектру в даний час розроблені і засновані на алгоритмах перетворення Фур'є [1,3]. З метою підвищення якості аналізу в такі аналізатори вводять додаткові перетворення, до числа яких можна віднести нерівномірне зважування вибірок сигналу, оцінку спектра після обчислення кожної чергової вибірки сигналу і вироблення коригуючого впливу на його розташування, обчислення спектра з додаванням нулів в аналізованій вибірці сигналу. Ці перетворення вимагають, по-перше, визначених апаратних витрат і, по-друге, є лише тим штучним прийомом, який дозволяє наблизити виміряні характеристики сигналів до реальних.

У цій статті розглянуто метод обчислення коефіцієнтів Фур'є, що дозволяє застосовувати в аналізаторах спектра єдину без піддіапазонів шкалу частот і тим самим підвищувати такі інструментальні характеристики, як частотна роздільність і точність аналізу без істотних на це витрат[4,5]. Суть методу полягає в наступному.

Розклавши функцію $f(x)$ в ряд за поліномами Чебишева $T_k(x)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{kч} \cdot T_k(x), \; x \in [-1,1], \tag{1}$$

отримаємо

$$A_{k\text{ч}} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\cdot T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \tag{2}$$

де $T_k(x) = \cos\ (k\arccos x) = \cos k\varphi,\ \ \varphi = \arccos x.$

Оскільки розкладання функції в ряд за поліномами Чебишева адекватне розкладанню, замаскованому заміною змінної $x = \cos\alpha$ цієї ж функції в ряд Фур'є, то коефіцієнти такого розкладу будуть дорівнювати

$$A_{k\text{ф}} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\varphi)\cos k\varphi d\varphi, \tag{3}$$

а

$$f(\cos x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{k\text{ф}}\cos\varphi. \tag{4}$$

Рівність чисельних значень коефіцієнтів $A_{k\phi}$ і $A_{k\text{ч}}$ обумовлено властивістю інтегралів як граничних співвідношень при dx і $d\varphi$, що прямують до нуля.

Якщо від інтегралів (2) і (3) перейти до дискретних сум, які представляють функцію $f(x)$, то в силу кінцевого числа доданків у виразах (1) і (4), коли $A_{k\text{ч}}$ дорівнює $A_{k\phi}$, отримаємо значення цієї функції не при одних і тих же значеннях аргументу x. При цьому для перетворення Фур'є функція $f(x)$ представляється точками, які віддалені один від одного рівномірно, а для перетворення Чебишева – нерівномірно, підкоряючись закону $\cos x$.

Далі, доповнивши дані перетворення синусним рядом Фур'є і поліномами Чебишева 2-го роду, замінивши змінну x на $\arccos x$ і помінявши при цьому пряме і зворотне перетворення, отримаємо, що коефіцієнти Фур'є, обчислені за так званим перетворенням Фур'є – Чебишева, будуть розподілені за законом $\arccos x$ [4].

Такий розподіл коефіцієнтів дозволяє вести спектральний аналіз в одному діапазоні з різною частотною роздільністю. Обчислювані коефіцієнти за перетворенням Фур'є – Чебишева являють собою коефіцієнти Фур'є, розподілені за шкалою діапазону нерівномірно – частіше в центрі і рідше на кінцях.

Якщо використовувати отриману таким чином шкалу частот як ноніус, то можна отримувати максимум роздільності спектра в центрі згущення частотних складових. При цьому коефіцієнти Фур'є обчислюються в одному і тому ж діапазоні, оскільки за допомогою такої шкали можна знаходити ті ж ділянки, які властиві піддіапазону аналізаторів спектра, що реалізують алгоритми перетворення Фур'є, але з кращими інструментальними характеристиками.

Принципи побудови аналізаторів спектра, що реалізують даний метод, можуть бути наступними:

а) принцип типових блоків – структури виконуються на функціональних блоках, властивих перетворенню Фур'є;

б) принцип спеціалізації окремих блоків – структури, створені за цим принципом, враховують властивості базисних функцій, що представляють поліноми Чебишева 1-го і 2-го роду, а також симетрію сигналів, що дозволяє підвищити швидкодію пристрою і звести до мінімуму апаратурні витрати;

в) принцип функціонального перерахунку перетворень – використовує модифіковані функції Бесселя, тобто неповні функції Ангера [6] виду

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\,(nt - z\sin t)\,dt, \tag{5}$$

що встановлюють зв'язок між перетворенням Фур'є і Фур'є – Чебишева;

г) принцип спільного використання перетворень – реалізує алгоритми перетворень Фур'є і Фур'є – Чебишева при компромісних рішеннях: грубий аналіз щодо перетворення Фур'є і точний – за перетворенням Фур'є – Чебишева;

д) принцип змішаного типу – враховує функціональні можливості кожного принципу в залежності від специфіки вирішуваних задач.

Структура, виконана за принципом типових блоків, зображена на рис. 1. Ця структура містить функціональні блоки, застосовувані зазвичай в аналізаторах спектра за перетворенням Фур'є. Нетривіальним блоком даної структури є блок поліномів Чебишева, що виробляє ортогональні поліноми Чебишева 1-го і 2-го роду у вигляді косинусної $T_n(i) = \cos\,(n\arccos i)$ і синусної $U_n(i) = \sin\,(n\arccos i)$ складових базисних вагових функцій, де n і i – відповідно часові та частотні номери відліків, розподілені в інтервалах $[1,\ N]$ і $[1,\ -1]$. Ці складові можуть вироблятися або за рекурентним співвідношенням виду [7]

$$T_n(i) = iU_{n-1}(i) - U_{n-2}(i);$$
$$U_n(i) = 2iU_{n-1}(i) - U_{n-2}(i),$$

або в пам'яті, що зберігає константи $\arccos i$, які є адресою при обчисленні функцій типу синус і косинус в типовому блоці тригонометричних коефіцієнтів, або в блоці поліномів Чебишева, в якому попередньо записуються обчислені значення поліномів Чебишева. У такій структурі реалізується алгоритм дискретного перетворення Фур'є – Чебишева [2], коли коефіцієнти Фур'є обчислюються матричним способом, а їх розташування нерівномірно на шкалі частот.

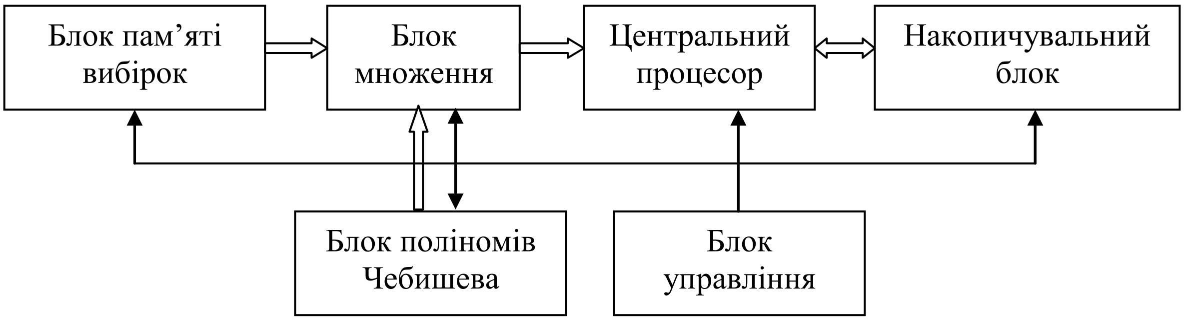

Рис. 1

Структура технологічна, проста в експлуатації і вимагає стільки ж обчислювальних операцій, що і структура, яка реалізує алгоритм дискретного перетворення Фур'є.

На рис. 2 показана структура аналізатора спектра, що виконана за принципом спеціалізації окремих блоків. Специфічним блоком цієї структури є арифметичний блок, який виконує операцію множення відліків сигналу, попередньо записаних в блок пам'яті вибірок з урахуванням їх симетрії і умовного поділу на групи, на значення матриці вагових коефіцієнтів поліномів Чебишева, також умовно розділених на групи елементарних матриць. Отримані таким чином проміжні результати множення обчислюваної групи спектральних складових накопичуються в блоці пам'яті коефіцієнтів для всіх груп відліків сигналу.

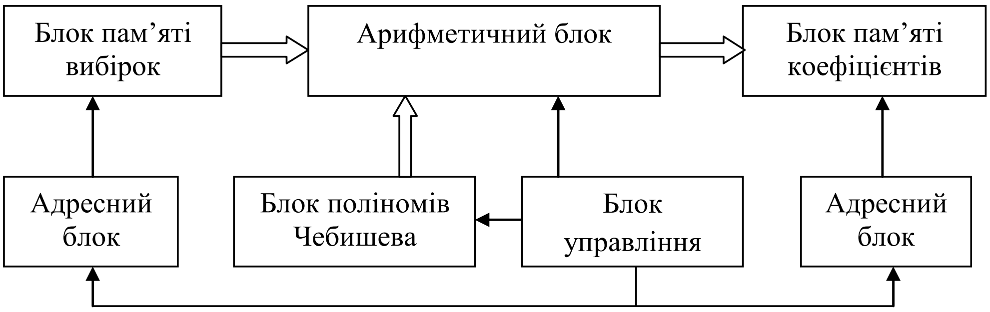

Рис. 2

Обчислені групи спектральних складових представляють в сумі N коефіцієнтів Фур'є, розподілених за шкалою частот також за законом $\arccos i$. Адресні блоки записують і зчитують групи відліків вибірки сигналу і коефіцієнтів Фур'є.

Спеціалізований арифметичний блок може бути виконаний також на типових блоках обчислення дво- і чотирьохточкового швидкого перетворення Фур'є, двоточкового перетворення Адамара. Швидкодія обчислень при цьому підвищується в 4 рази в порівнянні зі структурою, виконаною за принципом типових блоків.

Принцип функціонального перерахунку перетворень заснований на алгоритмі зв'язку перетворення Фур'є (ПФ) і перетворення Фур'є – Чебишева (ПФЧ). Його сутність полягає в тому, що матриця A вагових функцій $\exp\left(j\frac{2\pi}{N}kn\right)$ ПФ і матриця B вагових функцій ПФЧ $\exp(-jn\arccos i)$ пов'язані через матрицю C : $B = C \times A$.

Аналітичний вираз для матриці C може бути знайдений через інтеграл виду

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{j\omega t} \cdot e^{-jn\arccos y}\,dt, \tag{6}$$

де ω – частота, t – час, а $y = f(t)$.

Рішенням інтеграла (6) є вираз

$$C = \frac{\pi n}{2\pi}\left(e^{j\varphi} + e^{j3\varphi}\right) \cdot J_n(z), \tag{7}$$

яке визначається через неповні функції Ангера $J_n(z)$ виразу (5) з верхньою межею інтегрування $\pi/2$, а $\varphi = z - n\pi/2, z = \omega\pi/2$.

Асимптотичне вираження даних функцій Ангера представляється у вигляді розкладання

$$R_e J_n(z) = 1 - (n-z)^2 + [(n-z)^4 - 4z(n-z)] - \ldots$$

$$I_m J_n(z) = (n-z) - [(n-z)^3 - z] + \ldots,$$

яке може бути реалізовано за допомогою технічних засобів, описаних в [8]. Знаючи перерахункову матрицю, можна завжди перейти від одного перетворення до іншого.

Структура, яка реалізує принцип спільного використання перетворень, виконується за допомогою двох паралельно працюючих модулів – модуля ПФ і модуля ПФЧ (обидва модуля входять в операційний блок), а також блоку аналізу і функціональних блоків, застосовуваних у структурах, побудованих за принципом типових блоків. В аналізаторі такої структури (рис. 3) модуль ПФ обчислює коефіцієнти Фур'є з рівномірною сіткою частот, а модуль ПФЧ – з нерівномірною сіткою частот. Блок аналізу виконує комутацію каналів з метою визначення корисного сигналу та мінімізації похибки визначення спектральної складової сигналу. У блок пам'яті коефіцієнтів записуються вибіркові коефіцієнти Фур'є, обчислювані в блоці аналізу. Використання двох перетворень дозволяє підвищити якість аналізу.

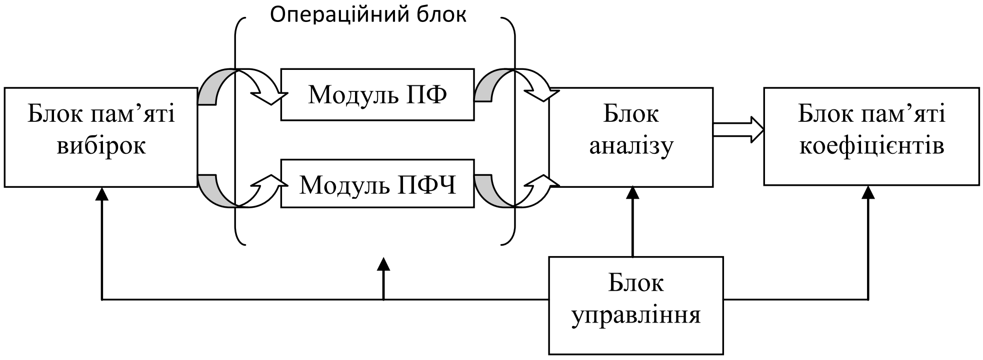

Рис. 3

Структура, яка використовує принцип змішаного типу, показана на рис. 4. Ця структура програмно може налаштовуватися на один модуль або на групу модулів, що дозволяє розпаралелювати обчислення і підвищувати швидкодію системи.

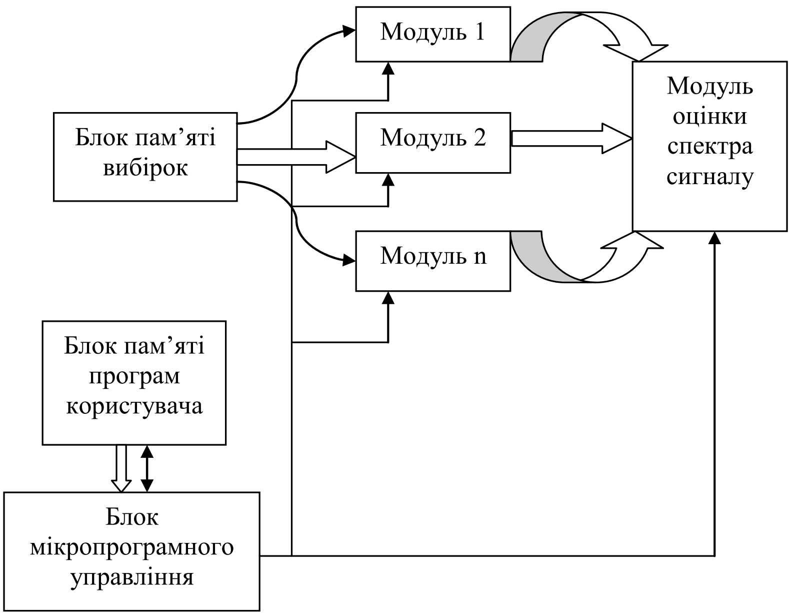

Рис. 4

Висновки:

1. Запропонований метод може ефективно застосовуватися в системах спектрального аналізу при вимірі характеристик смугових сигналів.

2. З точки зору структурних рішень найбільш доцільними є структури, що реалізують швидкі алгоритми ПФЧ, які дозволяють обчислювати одночасно кілька спектральних складових і тим самим

забезпечувати прийнятні параметри зі швидкодії при підвищеній частотній роздільності.

3. Розроблені на основі описаного методу алгоритми ПФЧ моделювалися на прикладі сигналу виду

$$x(n) = \cos\frac{2\pi}{5N}ln + \cos\frac{2\pi}{5N}mn + q,$$

де $q = G \cdot \Delta$ – білий гаусовий шум; G – нормально розподілена випадкова величина; $\Delta \in [0,1]$ – рівень шуму; $l \in [32,40]$, $m \in [40,48]$ – відносні частоти, $N - 32$.

Коефіцієнти ПФЧ обчислювалися за виразом:

$$A(k) = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp(-jn\arccos i),$$

де $k = \arccos i$.

Незважаючи на розбіжність частот сигналів базисних функцій спектр $S_ч$ містить завжди два сигнали основної частоти, тоді як спектр $S_ф$ має суттєві розмиття. Похибка визначення частот сигналів спектра складає $\Delta f_l = 2{,}56\%$ та $\Delta f_m = 1{,}24\%$, а спектра $S_ф$ $\Delta f_l = 15{,}39\%$, тоді як друга частота не може бути виміряна. Якщо ввести шум зі значенням $\Delta = 0{,}8$, то похибка визначення тих же частот спектра $S_ч$ незначно збільшується, тоді як в спектрі $S_ф$ сигнали сильно замасковані шумом. Коли частота сигналу кратна частотам базисних функцій, ПФЧ і ПФ з точки зору точності аналізу адекватні.

Результати досліджень показали, що спектри досліджуваних сигналів ПФЧ мають двогорбу криву, коли частоти сигналів не співпадають з частотами базисних функцій. За допомогою цієї позитивної властивості ПФЧ вдається усунути ряд небажаних ефектів, властивих ПФ, пов'язаних з розмиванням спектральних складових.

Алгоритми ПФЧ можуть бути реалізовані в системах спектрального аналізу з можливістю зміни частотної роздільності при вирішенні задач цифрової обробки інформації, таких як кореляція, інтерполяція сигналів, цифрова фільтрація, аналіз випадкових процесів і сигналів, стиснення даних, розпізнавання образів в спеціалізованих обчислювальних системах.

Література

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. Изд. 2-е, испр. — М.: Техносфера, 2007. — 856 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 848 с.
3. Стивен Смит Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников. Додэка XXI, 2008. — 720 с.
4. Дискретное преобразование Фурье – Чебышева / Б. Н. Малиновский, С. В. Устенко, М. В, Семотюк, А. Ф. Бульбанюк. – В кн.: Разработка средств кибернетической техники. Киев: ИК АН УССР, 1982, с. 98 – 103.
5. А.с. СССР № 1136181, БИ № 3, 1985// Устенко С.В. Устройство для ортогонального преобразования цифровых сигналов по Фурье-Чебышеву.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.
7. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
8. Введение в кибернетическую технику. Обработка физической информации / Под. ред. Б.Н. Малиновского . – Киев – Наукова думка, 1979. – 256 с.

References

1. Oppengejm A., Shafer R. Cifrovaja obrabotka signalov. Izd. 2-e, ispr. — M.: Tehnosfera, 2007. — 856 s.
2. Rabiner L., Gould B. Teorija i primenenie cifrovoj obrabotki signalov. — M.: Mir, 1978. — 848 s.
3. Stiven Smit Cifrovaja obrabotka signalov. Prakticheskoe rukovodstvo dlja inzhenerov i nauchnyh rabotnikov. Dodjeka XXI, 2008. — 720 s.
4. Diskretnoe preobrazovanie Fur'e – Chebysheva / B. N. Malinovskij, S. V. Ustenko, M. V, Semotjuk, A. F. Bul'banjuk. – V kn.: Razrabotka sredstv kiberneticheskoj tehniki. Kiev: IK AN USSR, 1982, s. 98 – 103.
5. A.s. SSSR № 1136181, BI № 3, 1985// Ustenko S.V. Ustrojstvo dlja ortogonal'nogo preobrazovanija cifrovyh signalov po Fur'e-Chebyshevu.
6. Janke E., Jemde F., Lesh F. Special'nye funkcii. – M.: Nauka, 1977. – 344 s.
7. Suetin P. K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. – M.: Nauka, 1979. – 416 s.
8. Vvedenie v kiberneticheskuju tehniku. Obrabotka fizicheskoj informacii / Pod. red. B.N. Malinovskogo . – Kiev – Naukova dumka, 1979. – 256 s.

Рецензія/Peer review : 21.9.2016 р. Надрукована/Printed : 11.11.2016 р.
Стаття рецензована редакційною колегією