УДК 330.46

Є. А. НЕДАШКІВСЬКИЙ
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» Київ, Україна

ФРАКТАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФІНАНСОВИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Розкрито фрактальні характеристики фінансових часових рядів. Зазначається, що фундаментальними фрактальними характеристиками часового ряду є показник Херста Н, індекс фрактальності μ, розмірність Хаусдорфа D, спектральний показник b. Наведено значення варіацій фрактальної розмірності у табличній формі. Доведено, що при однаковій кількості даних, індекс фрактальності повинен обчислюватися більш точно, ніж показник Херста, оскільки для його визначення використовується мінімальне і, отже, оптимальне покриття тимчасового ряду.

Ключові слова*. Фрактальні характеристики, фінансові часові ряди, показник Херста, індекс фрактальності, розмірність Хаусдорфа, спектральний показник.*

Y.A. NEDASHKIVSKYI
National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kiev, Ukraine

FRACTAL CHARACTERISTICS OF FINANCIAL TIME SERIES

Opened fractal characteristics of financial time series. It is noted that the fundamental characteristics of fractal time series is the Hurst exponent of H, M index of fractal, the Hausdorff dimension of the D, the spectral index b. The values of the fractal dimension of variation in tabular form. It is proved that with the same amount of data, fractal index should be calculated more precisely than the Hurst exponent, since its definition using the minimum and, therefore, the optimal coating time series.

Keywords. *Fractal characteristics of financial time series, Hurst index, fractal index, Hausdorff dimension, spectral figure.*

Постановка проблеми

У рамках сталого сучасного розвитку економіки України, питанням вивчення фінансових часових рядів займалося чимало, як зарубіжних так і вітчизняних науковців [1, 2], проте, економічна теорія, що склалася в умовах сьогодення, довела неспроможність і неадекватність традиційних лінійних моделей поведінки ринків. Досвід кількох останніх років показує, що динаміка економічних процесів і явищ носить нелінійний і, найчастіше, хаотичний (непередбачуваний) характер. На основі цього, постає актуальне питання пошуку альтернативних методів моделювання із застосуванням нестандартних математичних апаратів.

Ступінь дослідження в науковій літературі

Витоки досліджень стосовно фрактальних характеристик часових рядів датуються XIX століттям. У 1875 році математик з Оксфорда Генрі Сміт винайшов кантову безліч (перевідкрита німецьким математиком Георгом Кантором у 1883 році).

Щодо сучасних досліджень, глобальним внеском служить робота англійського фізика Л. Річардсона [3], котрий досліджував природні фрактали, а саме задачу про берегову лінію.

Впровадженням теорії фракталів в економіку, ще з 80-х років XX ст., активно займалися багато західних учених, в той час як вітчизняні дослідники стали розглядати цю теорію порівняно недавно. Застосування фрактального аналізу в економіці описано в працях таких видатних дослідників, як Б.Мандельброт, Е.Петерс, В. Арнольд, П. Берже, І. Помо, К. Відаль, Г. Шустер, Р. Мантень, Х. Стенлі, В. Чоу, Д. Сорнетт, А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, Н.В. Чумаченко, А.І. Лисенко та ін.

Проте, варто наголосити, що незважаючи на масштабність досліджень питання виділення фрактальних властивостей фінансових часових рядів та їх аналізу є актуальним та потребує подальших досліджень.

Актуальність дослідження

Сучасні дослідження, у рамках економіко-математичної науки, поділяються на різні напрямки вирішення питання аналізу фінансових часових рядів. До їх числа варто віднести: генетичні алгоритми, які характеризуються застосуванням випадкового підбору, комбінування і варіації шуканих параметрів із використанням механізмів, аналогічних природному відбору в природі [4]; нейронні мережі, які побудовані за принципом організації та функціонування біологічних нейронних мереж – мереж нервових клітин живого організму [5]; нечіткі методи, в основі яких лежить нечітка множина, як об'єкт з функцією приналежності елемента до безлічі, що приймає будь-які значення в інтервалі $[0, 1]$, а не тільки 0 або 1 [6]; та багато інших. Проте, важливо зазначити, що при аналізі ринкової динаміки жоден із наведених методів не може врахувати таку властивість ринку, як самоорганізація, тому застосування даних методів, для вирішення питання є не актуальним. Дану проблему, в певній мірі, дозволяє вирішити теорія фракталів.

Масштабність фінансових часових рядів з фрактальними властивостями вимагає застосування єдиного універсального механізму, який приводить до аналізу фрактальності динамічних процесів, що виникають в економічних системах. Пошук такого механізму є одним з найактуальніших завдань науки сьогодення.

Мета дослідження

Розкрити фрактальні характеристики фінансових часових рядів. Навести значення варіацій фрактальної розмірності. Проаналізувати, якість обчислення фрактальних показників та визначити найбільш оптимальний по швидкодії та точності показник.

Виклад основного матеріалу

Часовим рядом називають послідовність вимірювань $y_t,\ t = [1 \dots N]$, яка, як правило, впорядкована за часом [7].

Фінансовий часовий ряд – це послідовність, що описує поведінку певного ринкового процесу [8]. У ряді робіт [9, 10] було проведено аналіз деяких фінансових рядів і показано, що багато які з них мають кінцеву ємність. Таким чином, ці ряди можуть бути описані звичайним диференціальним рівнянням кінцевого порядку.

Фундаментальними фрактальними характеристиками часового ряду є показник Херста H, індекс фрактальності μ, розмірність Хаусдорфа D, спектральний показник b [11].

У 1951 англійський гідролог Гарольд Едвін Херст запропонував основний метод вивчення фрактальної структури фінансових ринків – R/S-аналіз, або метод нормованого розмаху. [12]

Існує дві варіації фрактальної розмірності – D і A. Так, фрактальну розмірність D (D – це оцінка ступеня злому ряду) визначають за формулою:

$$D = 2 - H \tag{1}$$

Б. Мандельброт в своїй роботі [11] показав, що фрактальна розмірність є зворотною величиною від показника Херста (коефіцієнт Hurst – H). Наприклад, при $H = 0.5$ фрактальна розмірність дорівнює $2\ (1 / 0.5)$, а при $H = 0.8$ фрактальна розмірність дорівнює $1.25\ (1 / 0.8)$.

Таким чином, фрактальну розмірність відповідно до Б. Мандельброта, що позначається буквою A (A – це розмірність простору ймовірностей, тобто оцінка товщини хвостів у функції щільності ймовірності) розраховують за формулою:

$$A = {}^{1}/_{H} \tag{2}$$

Таблиця 1

Значення варіацій фрактальної розмірності

Позначення / Найменування	Пряма лінія	Випадковий ряд	Нескінчений лінійний тренд
Показник Херста (H)	$H \approx 0$	$H = 0{,}5$	$H = 1$
Фрактальна розмірність D	$D \approx 0$	$D = 1{,}5$	$D = 1$
Фрактальна розмірність A	$A \to 0$	$A = 2$	$A = 1$

Показник Херста визначається на відрізку $[0, 1]$, і розраховується у наступних межах[13]:

- якщо $0{,}5 < H \leq 1$ – ціни є фракталами, підтверджується справедливість Fractal Market Hypothesis (FMH), мають місце «важкі хвости» в розподілі змінних, персистентні серії, тобто позитивна кореляція в зміні цін, присутній чорний шум, який свідчить про наявність трендів на ринку;
- якщо $H = 0{,}5$ – ціни є випадковими, підтверджується справедливість Efficient Market Hypothesis (EMH), рух цін на фінансові активи є прикладом випадкового броунівського руху (процесу Вінера), тимчасові ряди, як правило, нормально розподілені, відсутня кореляція в зміні вартості активів (пам'ять), підтверджується наявність білого шуму;
- якщо $0 \leq H < 0{,}5$ – ціни є фракталами, підтверджується справедливість FMH, мають місце «важкі хвости» в розподілі змінних, антіперсистентні серії, тобто негативна кореляція в зміні цін, рожевий шум з частими змінами напрямку руху цін.

Теорію броунівського руху побудував у 1905 р. Альберт Ейнштейн [14]. За точку відліку Херст взяв формулу із зазначеної роботи Ейнштейна:

$$R = \sqrt{T} \tag{3}$$

де R – відстань, пройдена броунівською часткою за час T,

T – показник часу.

Згідно (3) броунівська частка просувалася на відстань, рівну квадратному кореню часу, витраченому на це просування.

Розрахунок показника Херста можна провести за такою формулою:

$$R/_S = (aN)^H \tag{4}$$

звідси

$$H = {}^{\log(R/_S)}/_{\log(aN)} \tag{5}$$

де H – показник Херста;

N – число періодів спостережень;

a – задана константа, позитивне число, є константою. Херст емпірично розрахував цю константу для порівняно короткострокових часових рядів природних явищ як 0.5;

S – середньоквадратичне відхилення ряду спостережень x:

$$S = \sqrt{{}^{1}/_{N}\sum_{t=1}^{n}(x_t - x_{cp})^2} \quad (6)$$

де x_{cp} – Середнє арифметичне число спостережень за N періодів:

$$x_{cp} = {}^{1}/_{N}\sum_{t=1}^{N} x_t \quad (7)$$

R – розмах накопиченого відхилення Zu, даний показник є найбільш важливим елементом показника Херста, його обчислюють за формулою:

$$R = \max_{1 \le u \le N}(Z_u) - \min_{1 \le u \le N}(Z_u) \quad (8)$$

де Z_u – накопичене відхилення ряду x від середнього x_{cp}:

$$Z_u = \sum_{t=1}^{u}(x_t - x_{cp}) \quad (9)$$

Однак якщо в якості константи a використовувати число $0,5$, то при невеликій кількості спостережень N показник Херста має схильність навіть на випадкових рядах оцінювати їх як персистентні, тобто, як ті, що володіють трендами, завищуючи H. Тому для подальшого дослідження ринкових рядів необхідно використовувати константу $a = p / 2$.

Показник Херста для часових рядів має змістовний сенс. Значення H і D показують про ступінь «злому», «зазубреності» часового ряду.

Однак, незважаючи на повсюдне використання в різних областях аналізу даних, для обчислення показника Херста потрібна велика вибірка даних.

Поняття фрактальної характеристики або індексу фрактальності ввів у 2006 році Н.В. Старченко [15]. Дана характеристика дозволяє оцінити фрактальну розмірність часового ряду на вибірці з кількох десятків відліків.

Для функції $f(t)$, що визначена на відрізку $[a, b]$, та яка має деяке кінцеве число точок розриву першого роду. Задамо рівномірний розподіл відрізка

$$\omega_n = [a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b] \quad (10)$$

де $t_i - t_{i-1} = \delta = {}^{(b-a)}/_{n}, (i = 1,2 \dots n)$

Введемо позначення:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i(\delta) \quad (11)$$

Величина $V_f(\delta)$ – це амплітудна варіація функції $f(t)$, яка відповідає масштабу розбиття δ на відрізку $[a, b]$.

Загальна площа мінімального покриття визначається, як

$$S_\mu(\delta) = V_f(\delta) \cdot \delta \quad (12)$$

Оскільки $S_\mu(\delta) \sim \delta^{2-D_\mu}$, то $V_f(\delta) = \delta^{-\mu}$

При помноженні (11) на δ^2 спостерігається наступна залежність:

$$V_f(\delta) \equiv \sum_{i=1}^{n} A_i(\delta) \sim \delta^{-\mu} \text{ при } \delta \to 0 \quad (13)$$

це говорить про наявність фрактальної розмірності D для $f(t)$, причому $D = \mu + 1$, тобто

$$\mu = D - D_T \quad (14)$$

де μ – це індекс фрактальності.

Виходячи з того, що амплітудна варіація функції $f(t)$, яка відповідає масштабу розбиття δ на відрізку $[a, b]$, швидко виходить на статечний асимптотичний режим, індекс μ вимагає на два порядки менше даних в порівнянні з іншими фрактальними параметрами. Теоретично, при однаковій кількості даних, індекс фрактальності повинен обчислюватися більш точно, ніж показник Херста, оскільки для його визначення використовується мінімальне і, отже, оптимальне покриття тимчасового ряду.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у даному напрямку. Послідовність, що описує поведінку певного ринкового процесу, являє собою фінансовий часовий ряд. Рухи цін більшості фінансових інструментів зовні схожі, на різних масштабах часу і ціни. За зовнішнім виглядом графіка, неможливо визначити, чи належать дані до тижневих, добових або ж годинних змін. Це головний аспект фрактальності. Фінансові часові ряди з фрактальною структурою, відрізняються нелінійною динамікою, хаотичністю, нестаціонарністю, невизначеністю та значним рівнем зашумленості. Фрактальними характеристиками часового ряду є показник Херста H, індекс фрактальності μ, розмірність Хаусдорфа D, спектральний показник b. Теоретично, при однаковій кількості даних, індекс фрактальності повинен обчислюватися більш точно, ніж показник Херста, оскільки для його визначення використовується мінімальне і, отже, оптимальне покриття тимчасового ряду.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямку дослідження базуються на методиці прогнозування фінансових часових рядів з фрактальними властивостями за допомогою лінгвістичного моделювання. Лінгвістичні моделі допомагають виявляти закономірності, встановлювати взаємозв'язки і взаємозалежності між фактами. Лінгвістичне моделювання, за своїм складом, є складним механізмом в основі якого лежить лінгвістична модель, як комплексне поняття зі складною структурою і великою типологією.

Література

1. Валеев С. Г. Применение мультифрактального анализа при описании временных рядов в технике и экономике / С. Г. Валеев, Ю. Е. Кувайскова, С. А. Губайдуллина // Вестник Ульяновского государственного технического университета. - 2008. - № 2. - С. 23-27.

2. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: применение теории хаоса в инвестициях и экономике / Э. Петерс. - М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304с.

3. Мандельброт Бенуа, Ричард Л. Хадсон. (Не)послушные рынки: фрактальная революция в финансах = The Misbehavior of Markets / Б. Мандельброт , Л. Р. Хадсон. – М.: «Вильямс», 2006. – С. 400.\

4. Гладков Л. А. Генетические алгоритмы: Учебное пособие / Л. А. Гладков, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. – М: Физматлит, 2006. – С. 320.

5. Калацкая Л. В. Организация и обучение искусственных нейронных сетей: Экспериментальное учеб. пособие / Л. В. Калацкая, В. А. Новиков, В. С. Садов. – Минск: Изд-во БГУ, 2003. – 72 с.

6. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 166 с.

7. Сизов А. А. Модели, способы и программные средства поддержки принятия решений на основе прогнозирования временных рядов с переменной структурой: диссертация ... кандидата технических наук: 05.13.17 / Сизов Александр Александрович; [Место защиты: ФГБОУ ВПО "Национальный исследовательский университет "МЭИ"].– Москва, 2014. – 141 с.

8. Бредихин А.А. Временные ряды с переменной дисперсией и финансовые рынки России / А.А. Бредихин, А.Ю. Лоскутов // Анализ риска, 1998. – т. 1. – №1. – С. 28-45.

9. Малинецкий Г.Г. Нелинейная динамика и проблемы прогноза / Г.Г. Малинецкий, С.П. Курдюмов // Вестник РАН, 2001. – Т.71. – №3. – С. 44-46.

10. Bera A.K., Higgins, M.L. ARCH models: properties, astimation and testing. – J. Econ. Surveys, 1993. – v.

11. Мандельброт Б. Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. – М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 256 с.

12. Hurst, H.E. “Long-term storage of reservoirs: an experimental study”, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, Vol. 116, pp. 770-799.

13. Eugene F. Fama Foundations of Finance: Portfolio Decisions and Securities Prices. Basic Books, 1976, 395 p.

14. Кучерук І. М. Загальний курс фізики : навч. посібник у 3-х т. / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. – Київ: Техніка, 2006, Т.2: Електрика і магнетизм.- 452 с.

15. Старченко, Н.В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов.: дис. канд.. физ-мат. наук: 01.01.03: защищена 15.02.2006 / Старченко Николай Викторович. – М., 2005. – 122 с.

References

1. Valeev S.G., Kuvajskova Ju.E., Gubajdullina S.A. Primenenie mul'tifraktal'nogo analiza pri opisanii vremennyh rjadov v tehnike i jekonomike // Vestnik Ul'janovskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta. 2008, no. 2 (42), pp. 23-27.

2. Peters Je. Fraktal'nyj analiz finansovyh rynkov: primenenie teorii haosa v investicijah i jekonomike. M.: Internet-trejding, 2004, 304 p.

3. Mandel'brot Benua, Richard L. Hadson. (Ne)poslushnye rynki: fraktal'naja revoljucija v finansah = The Misbehavior of Markets. – M.: «Vil'jams», 2006, p. 400.

4. Gladkov L. A., Kurejchik V. V., Kurejchik V. M. Geneticheskie algoritmy: Uchebnoe posobie. Moscow: Fizmatlit, 2006, 320 p.

5. Kalackaja L. V., Novikov V. A., Sadov V. S. Organizacija i obuchenie iskusstvennyh nejronnyh setej: Jeksperimental'noe ucheb. posobie. Minsk: Izd-vo BGU, 2003, 72 p.

6. Zade L. Ponjatie lingvisticheskoj peremennoj i ego primenenie k prinjatiju priblizhennyh reshenij. – Moscow: Mir, 1976, 166 p.

7. Sizov A. A. Modeli, sposoby i programmnye sredstva podderzhki prinjatija reshenij na osnove prognozirovanija vremennyh rjadov s peremennoj strukturoj: dissertacija ... kandidata tehnicheskih nauk: 05.13.17 / Sizov Aleksandr Aleksandrovich;[Mesto zashhity: FGBOU VPO "Nacional'nyj issledovatel'skij universitet "MJeI"].– Moscow, 2014, 141 p.

8. Bredihin A.A., Loskutov A.Ju. Vremennye rjady s peremennoj dispersiej i finansovye rynki Rossii // Analiz riska, 1998, issue. 1, no. 1, pp. 28-45

9. Malineckij G.G., Kurdjumov S.P. Nelinejnaja dinamika i problemy prognoza // Vestnik RAN, 2001, issue 71. no.3, pp. 44-46

10. Bera A.K., Higgins M.L. ARCH models: properties, astimation and testing. J. Econ. Surveys, 1993, v. 7

11. Mandel'brot B. Fraktaly, sluchaj i finansy. Moscow: Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2004, 256 p.

12. Hurst, H.E. “Long-term storage of reservoirs: an experimental study”, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, vol. 116, pp. 770-799.

13. Eugene F. Fama Foundations of Finance: Portfolio Decisions and Securities Prices. Basic Books, 1976, 395 p.

14. Kucheruk I. M., Horbachuk I. T., Lutsyk P. P. Zahalnyi kurs fizyky : navch. posibnyk u 3-kh t. Kyiv: Tekhnika, 2006, T.2: Elektryka i mahnetyzm, 452 p.

15. Starchenko, N.V. Indeks fraktal'nosti i lokal'nyj analiz haoticheskih vremennyh rjadov.: dis. kand.. fiz-mat. nauk: 01.01.03: zashhishhena 15.02.2006 / Starchenko Nikolaj Viktorovich. Moscow, 2005. 122 p.

Рецензія/Peer review : 26.9.2016 р. Надрукована/Printed : 11.11.2016 р.
Стаття рецензована редакційною колегією