

УДК 389:681.2

В.Т. КОНДРАТОВ

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МЕТРОЛОГИЯ: ТЕОРИЯ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА
УРАВНЕНИЙ ИЗБЫТОЧНЫХ И СВЕРХИЗБЫТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ
СООБЩЕНИЕ 4. МЕТОДОЛОГИЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ОБРАБОТКИ ОКРУГЛЕННЫХ ДАННЫХ**

В Сообщении 4 дальнейшее развитие получила теория и методы структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений в части решения проблемы повышения точности обработки округленных данных.

Выявлены и описаны новые свойства уравнений избыточных измерений и соответствующих уравнений числовых значений. Показана возможность повышения точности обработки округленных данных за счет повышения точности определения базового значения варианты и погрешностей ее определения. Установлено, что повышение точности связано с корректным разграничением верных и сомнительных цифр в обрабатываемых данных при определении оптимального значения варианты. Разработана методология повышения точности обработки округленных данных по уравнениям числовых значений.

Работа представляет интерес для метрологов, специалистов, магистров и аспирантов, изучающих теорию и методы (сверх)избыточных измерений физических величин, пути и методы повышения точности машинной обработки данных.

Ключевые слова: методология, округление, верные и сомнительные цифры, структурный анализ, уравнения числовых значений

V. T. KONDRATOV

V.M.Glushkov Institute of cybernetics of National academy of Science of Ukraine

**FUNDAMENTAL METROLOGY:
THE THEORY OF THE STRUCTURAL ANALYSIS OF THE EQUATIONS OF REDUNDANT
AND SUPER-REDUNDANT MEASUREMENTS
THE MESSAGE 4. METHODOLOGY OF INCREASE OF ACCURACY OF PROCESSING OF THE ROUNDED DATA**

Abstract — In the Message 4 further development was received by the theory and methods of the structural analysis of the equations redundant and super-redundant measurements regarding increase of accuracy of processing of the rounded data.

New properties of the equations of superfluous measurements and the corresponding equations of numerical values are revealed and described. Possibility of increase of accuracy of processing of the rounded data at the expense of increase of accuracy of definition of base value variants and errors of its definition is shown. It is established, that accuracy increase is connected with correct differentiation of true and doubtful figures in processed data at definition of optimum value variants. The methodology of increase of accuracy of processing of the rounded data on the equations of numerical values is developed.

The paper is of interest for metrologists, experts, masters and the post-graduate students studying the theory and methods super-redundant measurements of physical quantities, ways and methods of increase of accuracy of machining of data.

Keywords: methodology, a rounding off, true and doubtful figures, the structural analysis, the equations of numerical values

Введение

В сообщении 1 [1] описаны философские аспекты теории структурного анализа уравнений (сверх)избыточных измерений (УСИИ): законы, научные принципы и категории. Показано, что структура УСИИ должна рассматриваться как состоящая из функционально независимых друг от друга, но закономерно связанных между собой объединений преобразованных и нормированных по значению физических величин, констант и коэффициентов пропорциональности, входящих в состав модифицированного УСИИ или уравнения числовых значений (УЧЗ).

В сообщении 2 [2] рассмотрены виды и типы структур, элементы и показатели структур УСИИ, в том числе и показатели модифицированных и конституированных структур УСИИ, процедура структурного анализа, его особенности, вопросы декомпозиции структур УСИИ, а также методы декомпозиции, направленные на повышения точности и оперативности машинной обработки данных.

В сообщении 3 [3] дальнейшее развитие получила теория и методы структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений в части повышения точности машинной обработки данных. Рассмотрены задачи метрологического обеспечения процедуры обработки данных, причины появления погрешностей, методы декомпозиции структур УСИИ, направленные на повышение точности. Впервые разработаны и приведены 16 разновидностей уравнений числовых значений результатов измерительного преобразования рядов физических величин, округленных до пола, до потолка и до половины единицы последнего сохраняемого разряда. Предложено семь базовых способов введения поправок для каждого из 16-ти уравнений числовых значений.

В настоящем сообщении рассмотрены свойства уравнений избыточных измерений и соответствующих УЧЗ, описана методология повышения точности обработки округленных данных на нескольких примерах.

Объектом исследований являются УЧЗ и методы повышения точности машинной обработки округленных результатов измерительных преобразований физических величин при избыточных измерениях.

Предметом исследований являются: свойства УЧЗ и методология повышения точности вычислительной обработки округленных результатов линейного измерительного преобразования рядов физических величин по типовому УЧЗ.

Целью работы является разработка методологии повышения точности обработки округленных данных при избыточных измерениях.

Результаты исследований

В основу исследований положен принцип системности. Принцип системности — принцип исследования реальных и идеальных объектов, в данном случае, — структур УЧЗ, предполагающий их представление в форме систем, состоящих из закономерно связанных между собой объединений преобразованных и нормированных по значению физических величин, констант и коэффициентов пропорциональности, образующих структуру УЧЗ. Следование данному принципу требует выделять элементы исследуемой системы, выявлять и изучать связи между элементами, представлять знания о выявленных связях в форме, например, математической модели с последующим её использованием для синтеза конституированных УЧЗ, обладающих желаемыми свойствами [4].

I. Философские аспекты теории

1. Поправка

Согласно [7], «поправка — значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения составляющих систематической погрешности».

Такое определение является частным. Дадим более общее определение понятию «поправка», учитывающее специфику (сверх)избыточных измерений.

Определение

«Поправка — физическая величина, однородная с искомой или с преобразованной, или математическая величина, представленная безразмерным коэффициентом пропорциональности, значения которых вводятся в неисправленный результат, описанный уравнением числовых значений при прямых, не прямых и (сверх)избыточных измерениях с целью исключения составляющих систематической погрешности».

Знак поправки зависит от знака исключаемой погрешности и от местоположения поправки в УЧЗ.

2. Эффективность вычислений

В связи с решением задачи повышения точности обработки данных, введем понятие «эффективность вычислений».

Определение

Эффективность вычислений — это безразмерный коэффициент, характеризующий собой модуль отношения погрешностей вычисления значения варианты (константы или вариальной константы) без дополнительной обработки округленных данных числителя и знаменателя и с их обработкой по определенным правилам.

Математически эффективность обозначается буквой « E » с индексами, соответственно, « kx », « ko » и « kv », т.е. « E_{kx} », « E_{ko} » и « E_{kv} », и записывается через значения погрешностей определения значений варианты, константы и вариальной константы, полученных без применения обработки (обозначается штрихом) и после обработки (обозначается без штриха) данных. Вычисление эффективности варианты, константы и вариальной константы осуществляется, соответственно, по УЧЗ вида:

$$\{E_{kx}\} = |\pm\{\Delta'_{kx}\} / \mp\{\Delta_{kx}\}|. \quad (1)$$

$$\{E_{ko}\} = |\pm\{\Delta'_{ko}\} / \mp\{\Delta_{ko}\}|. \quad (2)$$

$$\{E_{kv}\} = |\pm\{\Delta'_{kv}\} / \mp\{\Delta_{kv}\}|. \quad (3)$$

3. О понятии «округление сомнительных цифр»

В работе используется трактовка понятия «округление» сомнительных цифр любого приближенного числа (или числового значения результата измерительного преобразования или измерения физической величины) до «пола» и «потолка» не как округление данных до целой части числа, максимальной или минимальной по значению, а как процесс трансформации одной сомнительной цифры в другую, более достоверную, по априори установленным законам (правилам) при выполнении той или иной математической операции. Поэтому, используя принятые обозначения, мы описываем процесс округления приближенных чисел до иного значения дробной части с тем, чтобы, в конечном счёте, получить результат обработки данных с повышенной точностью.

4. О представлении результатов обработки

Прямое утверждение (классическое)

Результат обработки статистически достоверной совокупности данных, распределенных по нормальному закону, представляется в виде среднего значения выборки с указанием симметричных (верхней и нижней) границ полосы неопределенности.

Обратное утверждение

Если результат статистической обработки данных представлен в виде метрологического числа, т.е. в виде среднего значения с указанием симметричных (верхней и нижней) границ полосы неопределенности, то исходная выборка данных представляется статистически достоверной, а их значения распределенными по нормальному закону.

Данное утверждение положено в основу нижеописанного подхода к обработке и представлению округленных данных.

Два підхода к повышению точности обработки данных

До настоящего времени проблемы высокоточной обработки данных (результатов измерительного преобразования физических величин) не решены. Отсутствует общая методология повышения точности машинной обработки данных по УЧЗ, полученных при избыточных измерениях.

При избыточных и сверхизбыточных измерениях возможны два подхода к повышению точности машинной обработки округленных результатов измерительного преобразования физических величин:

1) без использования структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений (УИиСИИ), но с использованием контроля точности результатов измерительных преобразований и существующих правил округления исходных данных с точностью, при которой последняя значащая цифра результата аналого-цифрового преобразования находится в том же разряде, что и значение погрешности, или с двойной точностью;

2) с использованием структурного анализа УИиСИИ или УЧЗ и новых методологий повышения точности обработки результатов измерительного преобразования физических величин, заложенных в саму задачу обработки данных по УЧЗ, например, за счет повышения точности определения базового значения варианты объединения. При этом должно соблюдаться основное правило округления: «промежуточные результаты следует сохранять на одну-две цифры более».

Первый подход связан с получением и обработкой приближенных чисел, полученных в результате измерительного (промежуточного) преобразования физических величин. В ряде случаев параллельно с УЧЗ выводят, по возможности, и УЧЗ для вычисления погрешности. Это касается методов измерений с коррекцией погрешностей по выделенной функции коррекции.

Поскольку обработка данных по УИиСИИ предполагает использование операций деления, умножения, логарифмирования, суммирования, и вычитания и другие, то обрабатываемые приближенные числа должны быть округлены. Возникает вопрос «как (?)»: с учетом вида УЧЗ или нет, до одинакового или до разного числа значащих цифр, при которых конечный результат будет близок к действительному; с использованием способа арифметического округления или способа бухгалтерского округления, с округлением до пола или до потолка и т.д.

Известно, что погрешности округления приводят к разбросу конечного результата обработки данных, причем в некоторых случаях на несколько порядков. Поэтому следует учитывать, являются ли цифры приближенных чисел верными и/или сомнительными в широком¹ или в узком² смысле.

При избыточных измерениях все результаты измерительного преобразования физических величин определяются с точностью до сотых или тысячных. Если результат обработки (умножения, деления, вычитания и т.д.) окончательный, то в нем сохраняют то же число значащих цифр, что и в приближенном числе, в противном случае (при промежуточном результате) сохраняют на одну цифру более.

Следовательно, приближенные числа, получаемые в результате измерительного преобразования физических величин, необходимо округлять и сохранять с превышением на одну цифру. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается [8].

Второй подход связан с использованием структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений и направлен на получение конституированных УЧЗ с модифицированной структурой за счет ведения в них поправок, обеспечивающих повышение точности обработки данных.

В связи с бурным развитием вычислительной техники и появлением многоразрядных аналого-цифровых и цифроаналоговых преобразователей и 32-х и более разрядных арифметических устройств, при избыточных измерениях физических величин предлагается не округлять результаты промежуточных преобразований, представляющие собой приближенные числа, а сохранять их на одну-две сомнительные цифры больше обычного, но окончательный результат измерений сохранять с требуемой точностью.

Проблема состоит в том, что для каждой задачи обработки приближенных чисел нужен «индивидуальный подход», учитывающий вид УЧЗ, в соответствие с которым и осуществляется обработка этих чисел, требуемая точность результата избыточных измерений, способ математической и машинной обработки данных, разрядность аналого-цифровых преобразователей и средств обработки, методика округления приближенных чисел и т.д.

II. Свойства уравнений числовых значений

Предположим, исходная структура УЧЗ имеет вид (см.[3, табл. 6, п.2])

$$\{x'_i\} = \{x_0\} \frac{\{U'_3(x_i + x_0)\} - \{U'_1(x_0)\}}{\{U'_3(x_i + x_0)\} - \{U'_2(x_i)\}} = \{x_0\} \frac{\{\Delta U'_{31}\} + \{\Delta U'_4\}}{\{\Delta U'_{32}\} + \{\Delta U'_3\}} = \{x_0\} k'_x = \{x_1\} + \{\Delta_{x1}\}. \quad (4)$$

где $\{\Delta U_{31}\}$ — верное значение целой части числителя; $\{\Delta U_4\}$ — сомнительное значение дробной части числителя; $\{\Delta U_{32}\}$ — верное значение целой части знаменателя; $\{\Delta U_3\}$ — сомнительное значение дробной части знаменателя, $\{\Delta_{x1}\}$ — значение погрешности результата обработки округленных данных, $\{x_1\}$ — истинное значение искомой физической величины, k'_x — действительное значение варианты, описываемой УЧЗ

¹ сомнительные цифры в широком смысле — цифры приближенного числа, абсолютная погрешность которого превосходит единицу десятичного разряда, соответствующей этой цифре

² сомнительные цифры в узком смысле — цифры приближенного числа, если абсолютная погрешность этого числа превосходит половину десятичного разряда, соответствующей сомнительной цифре

$$k'_x = \frac{\{\Delta U'_{31}\} + \{\Delta U'_4\}}{\{\Delta U'_{32}\} + \{\Delta U'_3\}}. \quad (5)$$

Подставляя в (4) результаты измерительного преобразования рядов физических величин, т.е. исходные данные: $\Delta U_{31} = 15$ В, $\Delta U_4 = 0,33$ В, $\Delta U_{32} = 17$ В и $\Delta U_3 = 0,2$ В, получим:

$$\{x'_i\} = 17 \frac{35,71 - 20,38}{35,71 - 18,51} = 17 \frac{15 + 0,33}{17 + 0,2} = 17 \cdot 1,8913 = [15,1517] \approx 15,15 = 15 + 0,15, \quad (6)$$

где $\{x_1\} = 15$, $\{\Delta_{x1}\} = 0,15$.

Общим приемом для всех графоаналитических методов повышения точности обработки округленных результатов измерительного преобразования физических величин является определение базового значения варианты УЧЗ. Оно находится как отношение верных целочисленных значений данных числителя и знаменателя УЧЗ (4), т.е. по УЧЗ¹

$$k_x = \{\Delta U_{31}\} / \{\Delta U_{32}\}. \quad (7)$$

Выведем УЧЗ варианты k'_x , как функцию от значений целой и дробной частей данных числителя и знаменателя, используя свойство дробно-линейных функций. Для этого вынесем за скобки целые части данных числителя и знаменателя УЧЗ (4), представляя их через базовое значение варианты k_x (5) и погрешности ее определения:

$$\begin{aligned} k'_x &= \frac{\{\Delta U_{31}\} + \{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = \frac{(\{\Delta U_{31}\} + (\{\Delta U_{31}\} \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\}} - \{\Delta U_{31}\} \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\}} + \{\Delta U_4\})}{\{\Delta U_{32}\} \left(1 + \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\}}\right)} = \\ &= \frac{(\{\Delta U_{31}\} \left(1 + \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\}}\right) + \{\Delta U_4\} - \{\Delta U_3\} \frac{\{\Delta U_{31}\}}{\{\Delta U_{32}\}})}{\{\Delta U_{32}\} \left(1 + \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\}}\right)} = k_x + \frac{\{\Delta U_4\} - \{\Delta U_3\} \frac{\{\Delta U_{31}\}}{\{\Delta U_{32}\}}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = \\ &= k_x + \left(\frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right). \quad (8) \end{aligned}$$

Погрешности преобразования и округления обуславливают отклонение реального значения варианты от идеального (без погрешности), т.к. $k'_x = k_x + \Delta k_{x\Sigma} = k_x + \Delta k_{xa} - \Delta k_{xm}$. Причем аддитивная Δk_{xa} и мультипликативная Δk_{xm} оставляющие погрешности вычисления истинного значения варианты, которые обусловленные погрешностями округления и отбрасывания дробной части данных числителя и знаменателя УЧЗ (4), определяются согласно УЧЗ вида:

$$\Delta k_{xa} = \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \quad (9)$$

и

$$\Delta k_{xm} = -k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}}. \quad (10)$$

Сомнительные дробные части данных числителя и знаменателя связаны между собой соотношением:

$$\frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_3\}} = -k_x \frac{\Delta k_{xa}}{\Delta k_{xm}} \quad (11)$$

и

$$\frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_4\}} = -\frac{\Delta k_{xm}}{k_x \Delta k_{xa}}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) получим, соответственно, что

$$\{\Delta U_4\} = -k_x \{\Delta U_3\} \frac{\Delta k_{xa}}{\Delta k_{xm}}, \quad (13)$$

а

$$\{\Delta U_3\} = -\frac{\{\Delta U_4\}}{k_x} \frac{\Delta k_{xm}}{\Delta k_{xa}}. \quad (14)$$

Из (8) следует, что погрешность определения истинного значения варианты равна нулю ($\{\Delta k_{x\Sigma}\} = 0$), если

$$\{\Delta U_4\} = k_x \{\Delta U_3\} \quad (15)$$

¹ в математике данный коэффициент называется «неполным частным» от деления двух чисел

или, подставив (15) в (13), — при противоположных по знакам, но равных по значениям аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности

$$\Delta k_{xa} = -\Delta k_{xm}. \quad (16)$$

Как видно из (11), в 1-м, а, следовательно, и в 3-м квадрантах числовые значения варианты k_x имеют отрицательный знак, а во 2-м и 4-м — положительный.

С учетом (8), УСИИ примет вид:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_0 \frac{\Delta U_{31} + \Delta U_4}{\Delta U_{32} + \Delta U_3} = x_0 k_x \left(1 - \frac{\Delta U_3}{\Delta U_{32} + \Delta U_3} \right) + x_0 \frac{\Delta U_4}{\Delta U_{32} + \Delta U_3} = \\ &= x_0 k_x + x_0 \left(\frac{\Delta U_4}{\Delta U_{32} + \Delta U_3} - k_x \frac{\Delta U_3}{\Delta U_{32} + \Delta U_3} \right) = x_0 (k_x + \Delta k_{xa} - k_{xm}), \end{aligned} \quad (17)$$

а соответствующее УЧЗ — вид:

$$\begin{aligned} x_i' &= \{x_0\} \frac{\{\Delta U_{31}\} + \{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = \{x_0\} k_x \left(1 - \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) + \{x_0\} \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = \\ &= \{x_0\} k_x + \{x_0\} \left(\frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) = \{x_0\} (k_x + \Delta k_{xa} - k_{xm}). \end{aligned} \quad (18)$$

Полученные УСИИ и УЧЗ представляют результат обработки данных через базовое значение варианты объединения и погрешности ее вычисления. Это дало возможность разработать новую методологию повышения точности обработки округленных данных по УЧЗ и установить наиболее вероятную полосу неопределенности или погрешности обработки.

Принцип вариантности

Определение 1

Результат обработки округленных и нормированных по разрядности данных может быть представлен через базовую варианту, аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности ее определения в том, и только в том случае, если уравнение избыточных или сверхизбыточных измерений по своей структуре можно привести к виду дробно-линейной функции.

Это определение сформулировано по результатам анализа УЧЗ (17) и (18). Данный принцип является научной основой повышения точности обработки данных (сверх)избыточных измерений.

Определение 2

Повышение точности обработки округленных и нормированных по разрядности данных с помощью УЧЗ возможно путем повышения точности вычисления базового значения варианты, представленной через отношение верных значений целых частей разностных данных числителя и знаменателя, путем уменьшения погрешности обработки данных, связанные с сомнительными цифрами дробных частей этих данных, с последующим их использованием в конституированном УЧЗ.

Свойства уравнений (сверх)избыточных измерений и уравнений числовых значений

Вышеизложенное дает возможность сформулировать следующие свойства (отличительные особенности) УЧЗ вида (18):

1) результат избыточных измерений прямо пропорционален сумме значений составляющих варианты, т.е.

$$\{x_i'\} = \{x_0\} k_x' = \{x_0\} (k_x + \Delta k_x) = \{x_0\} (k_x + \Delta k_{xa} - \Delta k_{xm}); \quad (19)$$

2) варианта УЧЗ состоит из трех составляющих (см. (8)): базовой варианты (неизменной верной составляющей), аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности (изменяющихся составляющих).

Поэтому, каждый конкретный результат избыточных измерений (см. (19)) зависит от верного базового значения варианты и от сомнительных значений составляющих погрешности ее определения, обусловленных сомнительными дробными частями данных числителя и знаменателя варианты;

3) базовое значение варианты равно отношению верных значений целых частей данных числителя и знаменателя (см. (5));

4) отношение сомнительных дробных частей данных числителя и знаменателя пропорционально отношению значений аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности (см. (11));

5) дробная часть данных числителя варианты пропорциональна дробной части знаменателя варианты при известном базовом значении варианты k_x и соотношениях значений аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности (см. (13));

6) погрешность определения истинного значения варианты равна нулю при отношении значений дробных частей числителя и знаменателя равно значению варианты, а также при равенстве нулю суммы аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности;

7) случайная составляющая погрешности определения результата избыточных измерений по УЧЗ определяется только после проведения многократных измерительных преобразований рядов входных физических величин и статистической обработки окончательных результатов.

Перечисленные свойства расширяют наши представления о теории структурного анализа УЧЗ.

III. Общая методология повышения точности обработки приближенных данных

Главной особенностью предложенной методологии повышения точности обработки округленных данных по

представления в другое. Как видно из правой части графических построений, отрезок прямой AF характеризует значение результата, полученное после обработки, а отрезки CF и FB , характеризуют равноотстоящие границы (или пределы) полосы неопределенности (см. рис. 1). Отрезок AF прямой линии представляет собой конечный результат обработки данных, который изменяется в пределах $\pm \Delta_x$ и не равен первоначальному значению (до обработки).

Метрологические задачи обработки

Рассмотрим перечисленные выше этапы преобразования и обработки данных на конкретных примерах измерения физической величины x_i методом избыточных измерений. Ниже приводится решение двух метрологических задач:

1) определение сомнительных цифр в результатах измерительного преобразования физических величин, непосредственное округление полученных результатов до 3-го, 2-го и 1-го знаков (*— метод или прием непосредственного округления исходных данных*), обработка округленных данных по УЧЗ, оценка точности определения значения искомой физической величины;

2) разработка методологии повышения точности обработки округленных данных путем оптимизации УЧЗ искомой физической величины, выраженному через базовое значение варианты и погрешности ее определения.

Метрологическая задача 1

1. Предположим, что в результате измерительного преобразования физических величин $\{x_1\} = \{x_0\}$, $\{x_2\} = \{x_i\}$ и $\{x_3\} = \{x_i\} + \{x_0\}$ получены напряжения, числовые значения которых, соответственно, равны: $U'_1(x_0) = 11,335\bar{3}$ В, $U'_2(x_i) = 13,251\bar{2}$ В и $U'_3(x_i + x_0) = 18,761\bar{4}$ В. Кроме того, $x_0 = 5 \pm 0,001$, а значение искомой физической величины $\{x'_i\} = 6,733$ (данные приведены для последующих сравнений). Штрихи при обозначениях напряжений характеризуют наличие погрешностей преобразования.

В метрологии рекомендуется точность преобразования выбирать на один-два десятичных разряда больше точности воспроизведения значения образцовой физической величины (меры). Например, при образцовой физической величине $x_0 = 5 \pm 0,001$ погрешность измерительного преобразования должна быть одна десятитысячная. Это связано с тем, что только после обработки данных результат округляется до тысячной.

Полученные числовые значения напряжения (данные) ограничиваются тремя десятичными разрядами после запятой путем их округления до третьего знака: $U'_1(x_0) = \lfloor 11,335\bar{3} \rfloor = 11,335$ В, $U'_2(x_i) = \lfloor 13,251\bar{2} \rfloor = 13,251$ В, и $U'_3(x_i + x_0) = \lfloor 18,761\bar{4} \rfloor = 18,761$ В.

2. Априори выводится и записывается УЧЗ с исходными данными и вычисляется значение искомой физической величины с 4-я десятичными разрядами после запятой:

$$\begin{aligned} \{x_i\} = \{x_0\}k_x = \{x_0\} \frac{\{U'_3(x_i + x_0)\} - \{U'_1(x_0)\}}{\{U'_3(x_i + x_0)\} - \{U'_2(x_i)\}} &= \{x_0\} \frac{\{\Delta U_{31}\} + \{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = \\ &= 5 \cdot \frac{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 11,335\bar{3} \rfloor}{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 13,251\bar{2} \rfloor} = 5 \cdot \frac{7 + \lfloor 0,426\bar{1} \rfloor}{5 + \lfloor 0,510\bar{2} \rfloor} = 5 \cdot \lfloor 1,347\bar{7} \rfloor = \lfloor 6,738\bar{6} \rfloor = 6,739. \end{aligned} \quad (20)$$

В УЧЗ (20) подчеркнуты цифры конечного результата вычисления, которые отбрасываются при его округлении до третьего знака после запятой.

В данном случае абсолютная погрешность, обусловленная округлением данных и их обработкой по УЧЗ (20) равна $\{\Delta_{x1}\} = 6,739 - 6,733 = 0,006$, а относительная — $\delta_{x1} = 100\% \cdot 0,006 / 6,733 = \lfloor 0,08\bar{9} \rfloor \% = 0,09\%$.

3. По полученным числовым значениям результатов измерительного преобразования рядов физических величин определяют сомнительные цифры и соответствующие им младшие разряды при сохранении разрядности значения погрешности. В частности, рассматриваются следующие варианты: а) сомнительными являются 4-я цифра после запятой; б) сомнительными цифрами являются 3-я и 4-я цифры после запятой; в) сомнительными цифрами являются 2-я, 3-я и 4-я цифры после запятой; г) сомнительными являются все цифры после запятой. Тогда УЧЗ запишутся в виде (сомнительные цифра подчеркнуты):

$$\{x'_1\} = \{x_0\}k'_{x1} = 5 \cdot \frac{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 11,335\bar{3} \rfloor}{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 13,251\bar{2} \rfloor}, \quad (21)$$

$$\{x''_2\} = \{x_0\}k''_{x2} = 5 \cdot \frac{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 11,335\bar{3} \rfloor}{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 13,251\bar{2} \rfloor}, \quad (22)$$

$$\{x'''_3\} = \{x_0\}k'''_{x3} = 5 \cdot \frac{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 11,335\bar{3} \rfloor}{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 13,251\bar{2} \rfloor}, \quad (23)$$

$$\{x''''_3\} = \{x_0\}k''''_{x3} = 5 \cdot \frac{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 11,335\bar{3} \rfloor}{\lfloor 18,761\bar{4} \rfloor - \lfloor 13,251\bar{2} \rfloor}. \quad (24)$$

4. Округляют данные до первого сомнительного десятичного знака при условии, что результат вычисления представлен количеством разрядов после запятой, которое на один-два десятичных разряда превышает значение погрешности измерения искомой физической величины. Допустим, что для указанных в п. 3 четырех случаев выявления сомнительных цифр получены следующие результаты вычислений:

а) сомнительная цифра в четвертом разряде после запятой —

$$\{x'_1\} = \{x_0\}k'_{x1} = 5 \cdot \frac{18,761 - 11,335}{18,761 - 13,251} = 5 \cdot \frac{7,426}{5,510} = 5 \cdot 1,3477 = \lceil 6,7385 \rceil = 6,739. \quad (25)$$

В этом случае абсолютная погрешность, обусловленная округлением данных до третьего знака и их обработкой по УЧЗ (21) равна $\{\Delta_{x1}\} = 6,739 - 6,733 = 0,006$, а относительная — $\delta_{x1} = 100\% \cdot 0,006 / 6,733 = \lceil 0,089 \rceil \% = 0,09\%$;

б) сомнительные четвертая и третья цифры после запятой —

$$\{x''_2\} = \{x_0\}k''_{x2} = 5 \cdot \frac{18,76 - 11,33}{18,76 - 13,25} = 5 \cdot \frac{7,43}{5,51} = 5 \cdot 1,3484 = \lceil 6,742 \rceil = 6,74. \quad (26)$$

В данном случае абсолютная погрешность, обусловленная округлением данных до второго знака и их обработкой по УЧЗ (22) равна $\{\Delta_{x1}\} = 6,74 - 6,733 = -0,007$, а относительная — $\delta_{x1} = 100\% \cdot 0,007 / 6,733 = \lceil 0,104 \rceil \% = 0,1\%$;

в) сомнительными являются четвертая, третья и вторая цифры после запятой —

$$\{x'''_3\} = \{x_0\}k'''_{x3} = 5 \cdot \frac{18,8 - 11,3}{18,8 - 13,2} = 5 \cdot \frac{7,5}{5,6} = 5 \cdot \lceil 1,3393 \rceil = \lceil 6,696 \rceil = 6,7. \quad (27)$$

В этом случае абсолютная погрешность, обусловленная округлением данных до первого знака и их обработкой по УЧЗ (23) равна $\{\Delta_{x1}\} = 6,7 - 6,733 = \lceil -0,033 \rceil = -0,03$, а относительная — $\delta_{x1} = 100\% \cdot 0,03 / 6,733 = \lceil 0,445 \rceil \% = 0,4\%$.

г) сомнительными являются четвертая, третья, вторая и первая цифры после запятой —

$$\{x''''_3\} = \{x_0\}k''''_{x3} = 5 \cdot \frac{\lceil 18,8 \rceil - \lceil 11,3 \rceil}{\lceil 18,8 \rceil - \lceil 13,3 \rceil} = 5 \cdot \frac{8}{6} = 5 \cdot \lceil 1,33 \rceil = \lceil 6,66 \rceil = 7. \quad (28)$$

В данном случае абсолютная погрешность, обусловленная округлением данных целого числа и их обработкой по УЧЗ (24) равна $\{\Delta_{x1}\} = 7 - 6,733 = \lceil -0,267 \rceil = 0,3$, а относительная — $\delta_{x1} = 100\% \cdot 0,3 / 6,733 = \lceil 4,45 \rceil \% = 4,5\%$.

Следовательно, чем меньше количество сомнительных цифр, тем точнее результат обработки. Погрешность округления может составлять от 0,1% до 4,5%.

Согласно УЧЗ (18), результат обработки может быть представлен как сумма произведения значений образцовой физической величины на сумму базового значения варианты и значений ее погрешности.

Запишем аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности обработки как функции от приращения $\{\Delta U_{qi}\}$ и $\{\Delta U_{zi}\}$ дробной части данных

$$\{\Delta_{xa}(\Delta U_{qi})\} = \{x_0\} \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{qi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \quad (29)$$

и

$$\{\Delta_{xm}(\Delta U_{zi})\} = -k_x \{x_0\} \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{zi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{zi}\}}. \quad (30)$$

При приведении приращений к одной шкале значений, т.е. когда $\{\Delta U_{qi}\} = \{\Delta U_{zi}\} = \{\Delta U_{pi}\}$, где $\{\Delta U_{pi}\}$ — значение приращения, обусловленное помехой или введением поправки, получим:

$$\{\Delta_{xa}(\Delta U_{pi})\} = \{x_0\} \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{pi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \quad (31)$$

и

$$\{\Delta_{xm}(\Delta U_{pi})\} = -k_x \{x_0\} \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{pi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{pi}\}}. \quad (32)$$

Для случая, когда сомнительная цифра находится в четвертом разряде после запятой (см. (21)), получим УЧЗ для аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности в виде:

$$\{\Delta_{xa1}(\Delta U_{pi})\} = \{x_0\} \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{pi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_{zi}\}} = 5 \cdot \frac{0,426 + \{\Delta U_{pi}\}}{5,51} \quad (33)$$

и

$$\{\Delta_{xm1}(\Delta U_{pi})\} = -k_x \{x_0\} \frac{\{\Delta U_{zi}\} + \{\Delta U_{pi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_{zi}\} + \{\Delta U_{pi}\}} = -1,4 \cdot 5 \cdot \frac{0,51 + \{\Delta U_{pi}\}}{5,51 + \{\Delta U_{pi}\}}. \quad (34)$$

Для случая, когда сомнительными являются четвертая и третья цифры после запятой (см. (22)), УЧЗ погрешностей примут вид:

$$\{\Delta_{xa2}(\Delta U_{pi})\} = 5 \cdot \frac{0,42 + \{\Delta U_{pi}\}}{5,51} \quad (35)$$

и

$$\{\Delta_{xm2}(\Delta U_{pi})\} = -1,4 \cdot 5 \cdot \frac{0,51 + \{\Delta U_{pi}\}}{5,51 + \{\Delta U_{pi}\}} \quad (36)$$

В том случае, когда сомнительными являются четвертая, третья и вторая цифры после запятой (см. (23)), УЧЗ составляющих погрешности примут вид:

$$\{\Delta_{xa3}(\Delta U_{pi})\} = 5 \cdot \frac{0,5 + \{\Delta U_{pi}\}}{5,5} \quad (37)$$

и

$$\{\Delta_{xm3}(\Delta U_{pi})\} = -1,4 \cdot 5 \cdot \frac{\{\Delta U_{pi}\}}{5,5 + \{\Delta U_{pi}\}} \quad (38)$$

Определим значение приращения или поправки, при котором аддитивная и мультипликативная погрешности будут равны между собой. Приравняем правые части УЧЗ (31) и (32), а полученное равенство решим относительно значения поправки:

$$\frac{\{\Delta U_{ч}\} + \{\Delta U_{pi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_{3}\}} = -k_x \frac{\{\Delta U_{3}\} + \{\Delta U_{pi}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_{3}\} + \{\Delta U_{pi}\}} \quad (39)$$

В результате получаем УЧЗ, связывающее целые и дробные части данных числителя и знаменателя варианты и базовое значение варианты со значением поправки, в виде:

$$\{\Delta U_{pi}\} = -\frac{[(1+k_x)(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_{3}\}) + \{\Delta U_{ч}\}]}{2} + \sqrt{0,25[(1+k_x)(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_{3}\}) + \{\Delta U_{ч}\}]^2 - [\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_{3}\}][\{\Delta U_{ч}\} + k_x \{\Delta U_{3}\}]} \quad (40)$$

Запишем УЧЗ (40) в виде уравнения величин:

$$\Delta U_{pi} = -\frac{[(k_1+k_x)(\Delta U_{32} + \Delta U_{3i}) + \Delta U_{ч}]}{k_2} + \sqrt{\frac{[(k_1+k_x)(\Delta U_{32} + \Delta U_{3i}) + \Delta U_{ч}]^2}{k_2^2} - [\Delta U_{32} + \Delta U_{3}][\Delta U_{чi} + k_x \Delta U_{3}]} \quad (41)$$

где $k_1 = 1, k_2 = 2$.

Анализ полученных данных показал, что описанный подход с округлением результатов измерительного преобразования до 3-го, 2-го или 1-го знака после запятой приводит к уменьшению точности обработки.

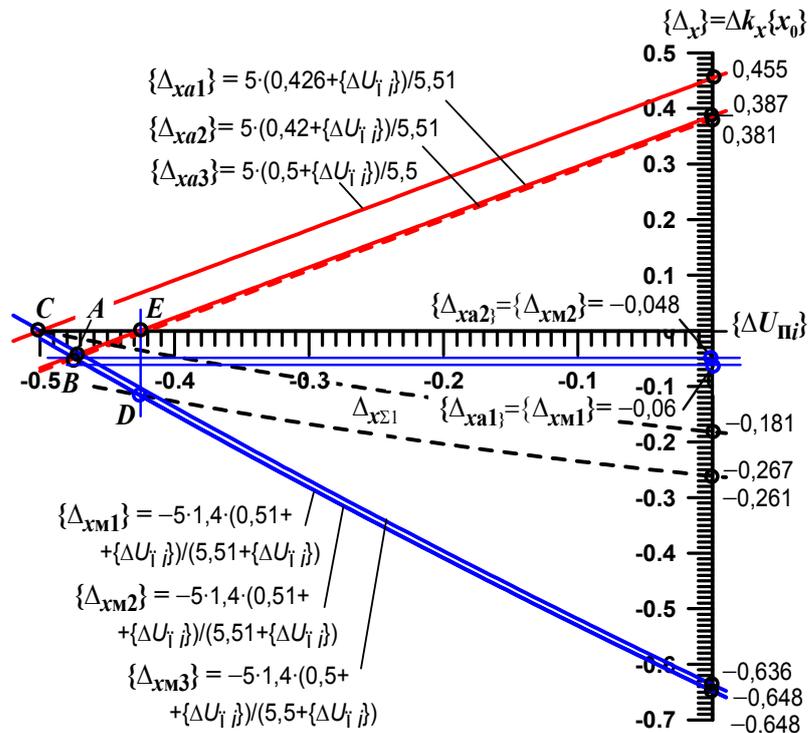


Рис. 2. Графики погрешностей вычисления значения искомой физической величины, обусловленные округлением исходных данных до 3-го, до 2-го и до 1-го знака после запятой

Проиллюстрируем вышеизложенное графическими построениями погрешностей (31) и (32), (33) и (34), (35) и (36) обработки при округлении исходных данных до 3-го, до 2-го и до 1-го знака после запятой (см. рис. 2).

Согласно рис. 2, в указанном диапазоне изменения $\Delta U_{\text{п}i}$ графики погрешностей линейны. При $\{\Delta U_{\text{п}i}\}=0$ аддитивные составляющие погрешности имеют максимальные значения 0,381, 0,387 и 0,455, а мультипликативные — значения $-0,648$, $-0,648$ и $-0,636$.

Для первого случая, когда данные были округлены с точностью до четвертой знака после запятой, значения аддитивной и мультипликативной составляющих равны между собой в точке A , в которой значение поправки $\{\Delta U_{\text{п}1}\} = -0,4708$. При этом суммарная погрешность составила $\{\Delta_{x_{a1}}\} = \{\Delta_{x_{m1}}\} = \{\Delta_{x1}\} = -0,048$.

Для третьего случая округления имеем, соответственно, $\{\Delta U_{\text{п}2}\} = -0,47$, а $\{\Delta_{x_{a1}}\} = \{\Delta_{x_{m1}}\} = \{\Delta_{x2}\} = -0,06$.

Анализ показал, что для данного примера округление исходных данных приводит к получению заниженных результатов. Только введение поправки позволяет уменьшить суммарную погрешность до $-0,06$ (для случая округления до тысячных), до $-0,048$ (для случая округления данных до сотых) и до 0 (при округлении до десятых). Парадокс заключается в том, что округление данных до обработки не приводит к повышению точности конечного результата вычисления.

Из графических построений видно существенное влияние аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности вычисления базового значения варианты на результат обработки.

Таким образом, некорректное округление данных может привести к погрешности вычисления от 0,1% до 4,0%. В этой связи актуальной является задача разработки новых путей и методов повышения точности обработки округленных данных по УЧЗ (4).

Метрологическая задача 2

На сегодняшний день предложено несколько подходов к повышению точности обработки округленных данных по УЧЗ, описывающему значение искомой физической величины через базовое значение варианты и погрешности ее определения. Один из них связан с повышением точности определения базового значения варианты и назван нами вариантным подходом.

Исследования показали, что повышение точности обработки округленных данных целесообразно осуществлять путем оптимизации базового значения варианты. Последнее достигается за счет переноса верных цифр данных числителя и знаменателя УЧЗ варианты влево или переноса запятых в используемых данных вправо на 1–3 знака. Это связано с выделением новых верных целочисленных значений исходных данных и с вычислением оптимального базового значения варианты $\{k_{x0}\}$ (индекс «0» — первая буква слова «оптимальный»).

Как будет показано ниже, в результате указанных действий уточняется базовое значение варианты и достигается уменьшение погрешности ее вычисления. В конечном счёте, вариантный подход приводит к повышению точности обработки и вычисления искомой физической величины x_i через произведение значения образцовой физической величины на оптимальное значение варианты, т.е. с использованием уравнение измерений $x = x_0 k_{x0}$ или УЧЗ $\{x\} = \{x_0\} k_{x0}$.

Рассмотрим вопросы округления базового значения варианты и ее погрешностей для случая, когда число значащих цифр в данных числителя и знаменателя УЧЗ разное, например, 4 и 3.

Все значащие цифры после запятой сомнительные, а $\{\Delta_{x_{m}}\} > \{\Delta_{x_{a}}\}$

Пример 1. Вычисление действительного значения варианты без переноса запятой вправо

В этом случае результат вычисления искомой физической величины запишется через УЧЗ в виде (25).

Вычислим значение варианты и ее составляющих с точностью до 4-го знака после запятой:

$$\begin{aligned} k'_{x1} &= k_{x1} + k_{x_{a1}} - k_{x_{m1}} = \frac{\{\Delta U_{31}\}}{\{\Delta U_{32}\}} + \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = \\ &= \frac{7}{5} + \frac{0,426}{5,510} - \frac{7}{5} \cdot \frac{0,51}{5,51} = 1,4 + [0,077314] - [0,129583] = [1,34773] = 1,3477 \end{aligned} \quad (42)$$

Соответствующее УЧЗ, описывающее результаты вычисления значения искомой физической величины и погрешности обработки, имеет вид:

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= \{x_0\} k'_{x1} = \{x_0\} (k_{x1} + k_{x_{a1}} - k_{x_{m1}}) = \{x_1\} + \{\Delta_{x_{a1}}\} - \{\Delta_{x_{m1}}\} = \\ &= 7 + [0,38657] - [0,64791] = 7 - 0,26134 = [6,73866] = 6,739. \end{aligned} \quad (43)$$

Представим погрешности полученного результат обработки в графическом виде с учетом изменения аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности обработки данных в пределах от $+0,5$ до $-0,5$.

На рис. 3 приведены графики погрешностей вычисления действительного значения варианты после непосредственного округления результатов измерительного преобразования рядов физических величин, т.е. исходных данных, до третьего знака. При этом предполагается, что все цифры после запятой являются сомнительными.

Прямая AB — результат вычисления аддитивной составляющей погрешности по УЧЗ $\{\Delta_{x_{ai}}\} = 5 \cdot (0,426 + \Delta U_{\text{п}i}) / 5,51$, прямая AF — результат вычисления мультипликативной составляющей по УЧЗ $\{\Delta_{x_{mi}}\} = (7/5) \cdot (0,51 + \Delta U_{\text{п}i}) / (5,51 + \Delta U_{\text{п}i})$. Точка A соответствует одинаковым значениям погрешностей, т.е. $-\{\Delta_{x_{a1}}\} = \{\Delta_{x_{m1}}\} = -0,048$.

Из рис. 3, точки B и F , видно, что аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности результата

обработки максимальны ($\{\Delta_{xa1}\} = 0,387$, $\{\Delta_{xm1}\} = -0,648$) при нулевом значении поправки, т.е. при $\{\Delta U_{pi}\} = 0$. Сумма погрешностей равна $\{\Delta_{x\Sigma1}\} = -0,261$. Следовательно, результат обработки исходных данных оказался заниженным на значение $0,261$ (см. УЧЗ (43) и рис. 3, точка E).

Определим действительное значение результата обработки данных и запишем его через среднее значение и симметричные границы полосы неопределенности. В основу положим приведенное выше обратное утверждение о представлении результатов обработки.

Для этого сместим кривую (параболу) AF вверх на значение, при котором $\{\Delta U_{\Sigma 2}\} = [0,38656] = 0,387$, $\{\Delta U_{pi}\} = 0$. В результате получим кривую NG (см. рис. 3), которая описывается УЧЗ $\{\Delta_{xm2i}\} = (7/5) \cdot (0,387 + \{\Delta U_{pi}\}) / (5,51 + \{\Delta U_{pi}\})$, и проходит через точки G и N , соответствующие новым значениям мультипликативной составляющей погрешности $\{\Delta_{xm2}\} = -0,492$ при $\{\Delta U_{pi}\} = 0$ и $\{\Delta_{xm4}\} = [0,05094] = 0,051$ при $\{\Delta U_{pi}\} = -0,423$.

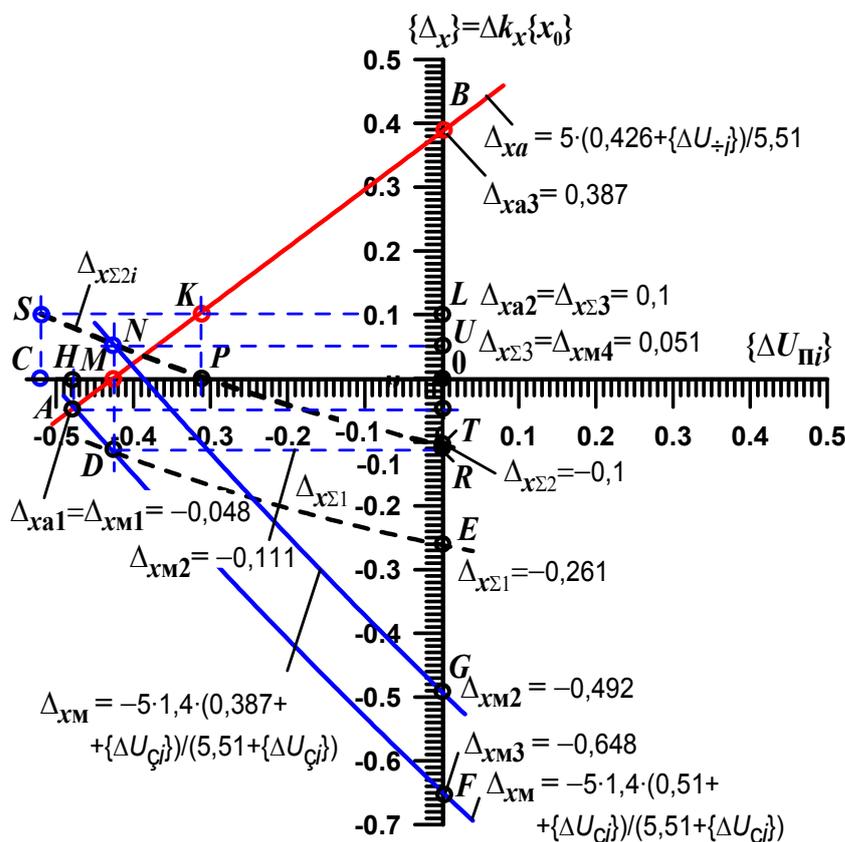


Рис. 3. Графики погрешностей вычисления результата обработки данных

Среднее значение суммы аддитивной (прямая AB) и мультипликативной (кривая NG) составляющих погрешности может быть представлено в виде кривой (параболы) NT , построенной согласно УЧЗ

$$\{\Delta_{x\Sigma 2i}\} = 5 \cdot (0,426 + \{\Delta U_{pi}\}) / 5,51 - 5 \cdot 1,4 \cdot (0,387 + \{\Delta U_{pi}\}) / (5,51 + \{\Delta U_{pi}\}). \quad (44)$$

Согласно рис. 3, прямая NT проходит через точку T , соответствующую $\{\Delta_{x\Sigma 2}\} = -0,1$ при $\{\Delta U_{pi}\} = 0$, и через точку S , соответствующей точке $L(0, 0,1)$, ордината которой $\{\Delta_{x\Sigma 3}\} = 0,1$ при $\{\Delta U_{pi}\} = -0,52$ (точка C). При $\{\Delta U_{pi}\} = -0,316$ (см. точку P) график проходит через нуль, а аддитивная составляющая погрешности обработки данных $\{\Delta_{xa2}\} = 0,1$ (см. точку K).

Следовательно, в диапазоне изменения данных результатов измерительного преобразования физических величин и связанных с этим значений поправок в пределах $-0,52 \leq \{\Delta U_{pi}\} \leq 0$, результат обработки определится УЧЗ

$$\{x'_i\} = \Delta U_{\Sigma 2} + \{\Delta_{x\Sigma 1}\} + (\{\Delta_{xm2}\} - \{\Delta_{xm3}\}) = (7 - 0,261) + (-0,492 + 0,648) = 6,739 + 0,156 = 6,895, \quad (45)$$

где $\{\Delta_{xm}\} = \{\Delta_{xm2}\} - \{\Delta_{xm3}\} = -0,492 + 0,648 = 0,156$ — значение приращения мультипликативной составляющей погрешности (см. рис. 3, кривые AF и NG при $\{\Delta U_{pi}\} = 0$).

Запишем результат обработки (45) с учетом полосы неопределенности, ограниченной значениями $\{\Delta_{xamax}\} = 0,1$ и $\{\Delta_{xmmax}\} = -0,1$. Тогда, окончательно, результат обработки округленных данных может быть записан (с вероятностью большей $0,98$ ($P = 0,985$)) в виде:

$$\{x'_i\} = \{x'_i\} \pm \{\Delta_{xi}\} = [6,895] \pm 0,1 = 6,9 \pm 0,1, \quad (46)$$

Следует отметить, что с изменением значения поправки от нуля до $\{\Delta U_{pi}\} = -0,48$, аддитивная и

мультипликативная составляющие погрешности уменьшаются до $\{\Delta_{xa1}\} = \{\Delta_{xm1}\} = -0,048$, т.е. становятся равными между собой (см. рис 3, точка A). При этом значение аддитивной составляющей погрешности уменьшаются в $E_{xa1} = \{\Delta_{xa3}\} / \{\Delta_{xa1}\} = 0,387 / 0,048 = 8,06$ раза, а значение мультипликативной составляющей — в $E_{xm1} = \{\Delta_{xm3}\} / \{\Delta_{xm4}\} = 0,648 / 0,048 = 13,5$ раза. Суммарная погрешность уменьшается с $\{\Delta_{x\Sigma1}\} = -0,261$ до $\{\Delta_{x\Sigma2}\} = -0,1$, т.е. в 2,6 раза.

1.2. *Повышение точности вычисления действительного значения варианты путем переноса запятой на один десятичный разряд вправо*

Рассмотрим на нескольких конкретных примерах сущность метода повышения точности обработки предварительно округленных (до третьего знака после запятой) данных, который основан на повышении точности определения базового значения варианты. Этот метод назван нами вариантным методом или подходом. Покажем его преимущества по сравнению с методом непосредственного округления исходных данных.

Предположи, что необходимо вычислить значение искомой физической величины при следующих результатах измерительного преобразования трех физических величин: $U'_1(x_0) = 11,335$ В, $\{U'_2(x_i)\} = 13,251$ В и $\{U'_3(x_i + x_0)\} = 18,761$ В и $\{x_0\} = 5 \pm 0,001$. Для повышения точности определения базового значения варианты, в исходных данных перенесем запятую вправо на один десятичный разряд и тем самым увеличим число верных цифр в целой части данных. В результате получим новые исходные данные для обработки, — $\{U'_1(x_0)\} = 113,35$, $\{U'_2(x_i)\} = 132,51$ и $\{U'_3(x_i + x_0)\} = 187,61$.

Вычислим значение варианты и ее составляющие через результаты измерительного преобразования физических величин с перенесенной вправо запятой на один знак:

$$k'_{x2} = k_{x2} + k_{xa2} - k_{xm2} = \frac{74,26}{55,10} = \frac{74}{55} + \frac{0,26}{55,10} - \frac{74}{55} \cdot \frac{0,10}{55,10} = 1,3454 + 0,0047 - 0,0024 = 1,3477, \quad (47)$$

где $k_{x2} = k_{x01} = 1,3454$.

С учетом (47), УЧЗ для вычисления искомой физической величины примет вид:

$$\{x'_2\} = \{x_0\} k'_{x2} = 5 \cdot \frac{187,61 - 113,35}{187,61 - 132,51} = 5 \cdot \frac{74,26}{55,10} = 5 \cdot \frac{74}{55} + 5 \cdot \frac{0,26}{55,10} - 5 \cdot \frac{74}{55} \cdot \frac{0,10}{55,10} = 6,7273 + 0,0236 - 0,0122 = \lceil 6,7387 \rceil = 6,739. \quad (48)$$

Для рассматриваемого случая результат вычисления искомой физической величины x_i (48) получен округленным до третьего знака после запятой и представляет собой результат обработки тот же, что и в случае (43). Какова же точность обработки?

Проанализируем полученный результат. Для наглядности, на рис. 4 приведены графики погрешностей вычисления действительного значения варианты через ее новые базовое значение и погрешности вычисления.

Из рис. 4 видно, что, по сравнению с предыдущим случаем, шкала значений по оси ординат уменьшилась более, чем на порядок, а по оси абсцисс — в 2 раза. Результаты обработки данных также уменьшились по значению. Так, например, максимальные значения аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности результата обработки уменьшились до $\{\Delta_{xa1}\} = 0,0235$ и $\{\Delta_{xm3}\} = -0,012$, соответственно (см. рис. 4, точки B и D). С изменением значения поправки от $\{\Delta U_{pi}\} = 0$ до $\{\Delta U_{p1}\} = -0,167$, аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности уменьшаются до $\{\Delta_{xa2}\} = \{\Delta_{xm2}\} = 0,0083$ (см. точку G на рис. 4), т.е. указанные составляющие погрешности становятся равными между собой при значении поправки $\{\Delta U_{p1}\} = -0,167$ (см. рис. 4, точка A). При этом значение аддитивной составляющей погрешности уменьшается в $E_{xa1} = \{\Delta_{xa1}\} / \{\Delta_{xa2}\} = 0,0235 / 0,0083 = 2,83$ раза, а значение мультипликативной составляющей — в $E_{xm1} = \{\Delta_{xm1}\} / \{\Delta_{xm2}\} = 0,012 / 0,0083 = 1,45$ раза.

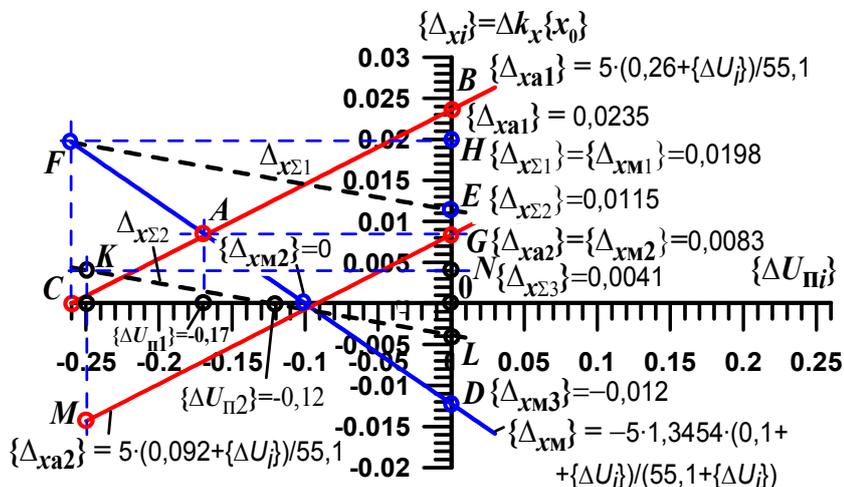


Рис. 4. Графики погрешностей обработки данных после переноса запятой вправо на один знак и уточнения базового значения варианты объединения

По сравнению с предыдущим случаем без переноса запятой, в рассматриваемом суммарная погрешность уменьшилась с $\{\Delta_{x\Sigma 1}\} = -0,261$ (см. рис.3, точку *E*) до $\{\Delta_{x\Sigma 2}\} = -0,0115$ (см. рис.4, точку *E*), т.е. в 22,7 раза (см. рис. 4, точку *E* на шкале погрешностей). При введении поправки $\{\Delta U_{\Pi 2}\} = -0,26$ аддитивная составляющая становится равной нулю, а результирующая — равной мультипликативной составляющей, т.е. $\{\Delta_{x\Sigma 1}\} = \{\Delta_{xM1}\} = 0,0198$ (см. рис. 4, точка *F = H*). В то же время, при $\{\Delta U_{\Pi 2}\} = -0,12$ значение $\{\Delta_{xM2}\} = 0$. При $\{\Delta U_{\Pi i}\} = 0$ $\{\Delta_{xM3}\} = -0,012$ (см. рис. 4, точка *D*). Следовательно, подбором значения поправки можно изменить и значение суммарной погрешности определения базового значения варианты. Путем введения поправки $\{\Delta U_{\Pi 1}\} = -0,167$ в дробную часть числителя и знаменателя, погрешность обработки уменьшается до $\{\Delta_{x\Sigma}\} = 0,0083$, т.е. в 5,8 раза ($E_{xM} = \{\Delta_{xM1}\} / \{\Delta_{xM2}\} = 0,048 / 0,0083 = 5,8$) по сравнению с предыдущим случаем, когда запятую не переносили вправо (см. на рис. 3 и рис. 4 точку *A*).

В рассматриваемом случае полученный результат завышен на 0,0115 единиц (рис. 4, точка *E*). В этой связи уменьшают значение $\{x'_i\}$ (48) на $\{\Delta_{x\Sigma 2}\} = 0,0115$ и получают наиболее вероятное среднее значение

$$\{x'_3\} = \{x'_2\} - \{\Delta_{x\Sigma 2}\} = 6,7387 - 0,0115 = \lfloor 6,7272 \rfloor = 6,727. \quad (49)$$

Однако утверждать, что полученный результат близок к истинному значению искомой физической величины, затруднительно, поскольку необходимо указать границы полосы неопределенности. Для этого через точку *G* соответствующую точке *A*, когда $\{\Delta_{x\Sigma 2}\} = \{\Delta_{xM2}\} = 0,0083$, проведем график аддитивной погрешности (см. рис. 4, прямая *MG*). Для этого определим новое значение дробной части числителя из равенства

$$\{\Delta_{x\Sigma 2}(\{\Delta U_{\Pi i}\} = 0)\} = 5 \cdot \frac{\{\Delta U_{\Pi 2}\}}{55,1} = 0,0083, \quad (50)$$

откуда $\{\Delta U_{\Pi 2}\} = (55,1 \cdot 0,0083) / 5 = \lceil 0,0917 \rceil = 0,092$. УЧЗ для второго графика аддитивной составляющей погрешности обработки УЧЗ примет вид:

$$\{\Delta_{x\Sigma 2i}\} = 5 \cdot \frac{\{\Delta U_{\Pi 2}\} - \{\Delta U_{\Pi i}\}}{55,1} = 5 \cdot \frac{0,092 - \{\Delta U_{\Pi i}\}}{55,1} \text{ при } -0,25 \leq \{\Delta U_{\Pi i}\} \leq 0. \quad (51)$$

В этом случае значение суммарной погрешности опишется УЧЗ вида

$$\{\Delta_{x\Sigma 2i}\} = \{\Delta_{x\Sigma 2i}\} + \{\Delta_{xMi}\} = 5 \cdot (0,092 + \{\Delta U_{\Pi i}\}) / 55,1 - 5 \cdot 1,3454 \cdot (0,1 + \{\Delta U_{\Pi i}\}) / (55,1 + \{\Delta U_{\Pi i}\}). \quad (52)$$

Соответствующий график приведен на рис 4 (см. линию *KL*). При $\{\Delta U_{\Pi i}\} = -0,25$ $\{\Delta_{x\Sigma 2i}\} = +0,0041$, а при $\{\Delta U_{\Pi i}\} = 0$ $\{\Delta_{x\Sigma 2i}\} = -0,0041$. Данные значения примем, соответственно, за верхнюю и нижнюю границы полосы неопределенности результата (49) обработки данных.

Окончательно, с вероятностью $P = 6,727 / 6,739 = 0,998$, получим результат обработки в виде

$$\{x'_3\} = x'_2 + \{\Delta_{x\Sigma 1}\} \pm \{\Delta_{x\Sigma 2}\} / 2 = (6,7387 - 0,0115) \pm (0,0083 / 2) = 6,7272 \pm 0,00415 = \lceil 6,7272 \rceil \pm 0,004 = 6,727 \pm 0,004. \quad (53)$$

Поскольку, по заданию, сомнительной является вторая цифра после запятой, то результат обработки по УЧЗ (53) округлим до второго знака и представим в виде

$$\{x'_3\} = \lceil 6,7272 \rceil \pm \lceil 0,004 \rceil = 6,73 \pm 0,01 \quad (54)$$

с той же вероятностью $P = \lceil 6,727 \rceil / \lceil 6,739 \rceil = 6,73 / 6,74 = 0,998$.

Таким образом, по сравнению с «классической» обработкой округленных данных по УЧЗ (24), вариантный подход дает возможность, путем увеличения на единицу числа верных цифр в целой части данных, более точно определить среднее значение результата обработки исходных данных по УЧЗ (53) и установить верхнюю и нижнюю допустимые границы полосы неопределенности. При этом важно определить, в каком десятичном разряде после запятой находится сомнительная цифра дробной части данных числителя и знаменателя.

1.3. *Повышение точности вычисления действительного значения варианты путем переноса запятой на два десятичных разряда вправо*

Дальнейшее повышение точности обработки данных осуществляется аналогичным способом, — путем уточнения сомнительного разряда после запятой, например, только третьего, и выполнения второго шага оптимизации базового значения варианты. В результате осуществляется перенос влево уже не одной, а двух верных цифр данных, используемых в числителе и знаменателе УЧЗ варианты, — путем переноса запятой вправо на два знака. Эти действия направлены на выделение новых верных целочисленных значений исходных данных и вычисление оптимального базового значения варианты.

Предположим, что необходимо вычислить значение искомой физической величины при тех же исходных результатах измерительного преобразования трех физических величин: $U'_1(x_0) = 11,335$ В, $U'_2(x_i) = 13,251$ В и $U'_3(x_i + x_0) = 18,761$ В. В исходных данных перенесем запятую вправо на два знака. Тем самым еще на порядок увеличивается число верных цифр в целой части данных. В результате получают новые исходные данные (числовые значения) для обработки, —

$$\{U'_1(x_0)\} = 1133,5, \quad \{U'_2(x_i)\} = 1325,1 \text{ и } \{U'_3(x_i + x_0)\} = 1876,1. \quad (55)$$

Для рассматриваемого случая результат вычисления искомой физической величины запишется в виде УЧЗ:

$$\{x'_2\} = \{x_0\}k'_{x2} = 5 \cdot \frac{1876,1 - 1133,5}{1876,1 - 1325,1} = 5 \cdot \frac{742,6}{551,0} = \lceil 6,73866 \rceil = 6,739. \quad (56)$$

Как видно из (56), результат обработки тот же, что и в предыдущих случаях.

Затем вычисляется значение варианты и ее составляющие с использованием данных (55) с перенесенной вправо запятой на два знака:

$$k'_{x3} = k_{x3} + k_{xa3} - k_{xm3} = \frac{742,6}{551,0} = \frac{742}{551} + \frac{0,6}{551,0} - 0 = 1,3466 + 0,0011 = 1,3477 \quad (57)$$

где $k_{x3} = k_{x02} = 1,3466$.

Запишем УЧЗ (56) через варианту и ее погрешности в виде

$$\{x'_3\} = \{x_0\}k'_{x3} = 5 \cdot \frac{742,6}{551,0} = 5 \cdot \frac{742}{551} + 5 \cdot \frac{0,6}{551,0} = 6,7330 + 0,0054 = \lfloor 6,7384 \rfloor = 6,738. \quad (58)$$

Построим графики погрешностей вычисления действительного значения варианты через ее новые базовое значение и погрешности вычисления.

Из графических построений, приведенных на рис. 4, видно, что, по сравнению с предыдущим случаем (см. рис. 3), шкала значений по осям координат уменьшилась в 4 раза. А как уменьшились результаты обработки данных в этом случае? Максимальное значение аддитивной составляющей уменьшилось в 4,35 раза ($E_{xa} = \{\Delta_{xa1}\} / \{\Delta_{xa}\} = 0,0235 / 0,0054 = 4,35$), — до ($\{\Delta_{xa1}\} = 0,0054$). Мультипликативная составляющая погрешности результата обработки данных стала равной нулю, т.е. ($\{\Delta_{xm}\} = 0$) (см. рис. 5, точку O). Это связано с меньшим числом значащих цифр в знаменателе УЧЗ (см. например, (25))

С изменением значения поправки отрицательного значения от $\{\Delta U_{pi}\} = 0$ до $\{\Delta U_{pi}\} = -0,26$ аддитивная составляющая погрешности уменьшается, а мультипликативная составляющая увеличивается до значения $\{\Delta_{xa2}\} = \{\Delta_{xm2}\} = 0,0032$, т.е. указанные составляющие погрешности становятся равными между собой (см. рис. 5, точку G).

Как видно из рис. 5, результат обработки завышен на значение аддитивной составляющей погрешности, т.е. на $\{\Delta_{xa1}\} = 0,0054$ при $\{\Delta U_{pi}\} = 0$. В этом случае можно принять полученный результат (51) обработки исходных данных минус аддитивная составляющая погрешности как достоверный, т.е.

$$\{x'_3\} = \{x_0\}k_{x03} = 5 \cdot \frac{742}{551} = 5 \cdot \lfloor 1,34664 \rfloor = 6,7330 = 6,733. \quad (59)$$

где $k_{x03} = 1,3466$.

Сместим прямую AL на 0,0054 единицы вниз. В этом случае прямая пройдет через нуль (см. рис.5, точка O), а ее УЧЗ примет вид:

$$\{\Delta_{xa2i}\} = 5 \cdot \frac{\{\Delta U_{q2}\} - \{\Delta U_{pi}\}}{551} = 5 \cdot \frac{0,013 - \{\Delta U_{pi}\}}{551}, \text{ при } -0,25 \leq \{\Delta U_{pi}\} \leq 0,25, \quad (60)$$

где $\{\Delta U_{q2}\}$ — второе значение дробной части числителя варианты ($\{\Delta U_{q2}\} = 0,013$).

Построим график суммарной погрешности с учетом (60) (рис. 5, прямая EF). Для данной прямой УЧЗ имеет вид:

$$\{\Delta_{x\Sigma 2i}\} = \{\Delta_{xa2i}\} + \{\Delta_{xmi}\} = 5 \cdot \frac{0,013 - \{\Delta U_{pi}\}}{551} - \frac{7}{5} \cdot \frac{0 - \{\Delta U_{pi}\}}{551 + \Delta U_{pi}}. \quad (61)$$

Как видно из рис. 5, в диапазоне $-0,25 \leq \{\Delta U_{pi}\} \leq 0,25$ значения суммарной погрешности, описываемой УЧЗ (54), не превышают $\pm 0,001$, т.е. $-0,001 \leq \{\Delta_{x\Sigma 2i}\} \leq 0,001$.

Поскольку погрешность, определения базового значения варианты является числом того же порядка малости, что и погрешность образцовой физической величины ($\{x_0\} = 5 \pm 0,001$), и может меняться от нуля до 0,0054, т.к. $\{k'_{x3}\} = \{k_{x03}\} + \{\Delta_{ka3}\} = 1,3466 + 0,0011$, то, окончательно, после обработки, значение искомой физической величины будет равно

$$\{x_3\} = \{x_0\}k_{x03} = 6,733 \pm \lceil 0,00275 \rceil = 6,733 \pm 0,001. \quad (62)$$

при вероятности $P = 6,733 / 7 = \lfloor 0,9618 \rfloor = 0,96$.

При необходимости, полученный результат может быть округлен до второго знака после запятой, т.е. $\{x'_3\} = 6,73 \pm 0,01$.

В формализованном виде весь процесс формирования конституированного УЧЗ для данного варианта может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{x'_i\} &= \{x_0\}k'_{xi} = 5 \cdot \frac{18,761 - 11,335}{18,761 - 13,251} \Rightarrow \{x_i\} = 5 \cdot \frac{1876,1 - 1133,5}{1876,1 - 1325,1} \Rightarrow \{x_i\} = 5 \cdot \frac{742,6}{551,0} \Rightarrow \{x_i\} = 5 \cdot \frac{742 + 6}{551 + 0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x'_i\} = 5 \cdot \frac{742}{551} + 5 \cdot \frac{0,6}{551} - 5 \cdot \frac{742}{551} \cdot \frac{0}{551} \Rightarrow \{x'_i\} = 6,7384 - 0,0054 \Rightarrow \{x'_i\} = 6,733 \pm 0,001. \end{aligned} \quad (63)$$

Следовательно, используя принцип вариантности, можно достичь уменьшения погрешности обработки

результатов измерительного преобразования физических величин по УЧЗ. Подбором значения поправки можно изменить значение суммарной погрешности определения базового значения варианты или изменить соотношение значений аддитивной и мультипликативной составляющих.

Принципиальным отличием предложенной методологии обработки данных (результатов измерительного преобразования рядов физических величин) при избыточных измерениях является отказ от отбрасывания сомнительных цифр дробной части многоразрядных данных и от округления их до определенного десятичного разряда после запятой до обработки этих данных.

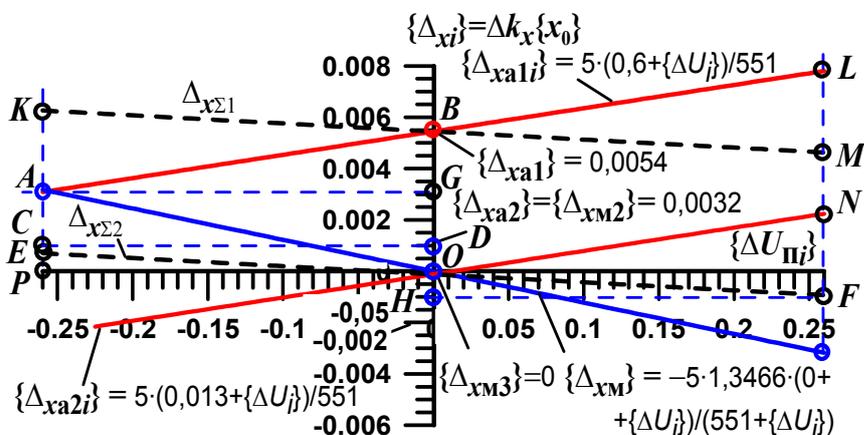


Рис. 5. Графики погрешностей обработки данных после переноса запятой вправо на два знака и уточнения базового значения варианты объединения

В основу методологии положено использование представления дробно-линейных функций, к которым относятся УИиСИИ и УЧЗ, через главный показатель объединения преобразованных физических величин и коэффициентов — через варианту и погрешности ее определения.

Другими словами, необходимо работать, прежде всего, не с сомнительными цифрами исходных данных, а с верными цифрами целочисленных разностных данных числителя и знаменателя УЧЗ.

Описанная методология обработки данных имеет широкие функциональные возможности, связанные с введением поправок разного знака и значения в УЧЗ. Она обеспечивает возможность тестирования алгоритмов обработки данных и введения поправок, с целью компенсации накопленных систематических погрешностей при машинной обработке округленных данных. Дальнейшее развитие этого научного направления поможет решить весь комплекс проблем обработки данных при избыточных измерениях.

Число значащих цифр в числителе и знаменателе УЧЗ одинаковое

Пример 1. Рассмотрим пример с одинаковым числом значащих цифр в числителе и знаменателе УЧЗ, при следующих исходных результатах измерительного преобразования трех физических величин: $U_1(x_0) = 11,335 \text{ В}$, $U_2(x_i) = 13,252 \text{ В}$ и $U_3(x_i + x_0) = 18,771 \text{ В}$. В случае, когда третья после запятой цифра младшего разряда является сомнительной, искомая величина до обработки данных вычисляется по УЧЗ

$$\{x'_i\} = \{x_0\}k'_{x1} = 5 \cdot \frac{18,771 - 11,335}{18,771 - 13,252} = 5 \cdot \frac{7,436}{5,519} = 5 \cdot 1,347345 = 5 \cdot [6,73673] = 6,737. \quad (64)$$

Согласно предложенной методологии, перенесем запятую на два разряда вправо. Запишем процесс вычисления искомой физической величины по УЧЗ (64) через варианту и ее погрешности:

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= \{x_0\}k'_{x1} = 5 \cdot \frac{18,771 - 11,335}{18,771 - 13,252} \Rightarrow \{x_i\} = 5 \cdot \frac{1877,1 - 1133,5}{1877,1 - 1325,2} \Rightarrow \{x_i\} = 5 \cdot \frac{743,6}{551,9} \Rightarrow \{x_i\} = 5 \cdot \frac{743 + 0,6}{551 + 0,9} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x'_i\} = 5 \cdot \frac{743}{551} + 5 \cdot \frac{0,6}{551,9} - 5 \cdot \frac{743}{551} \cdot \frac{0,9}{551,9} \Rightarrow \{x'_i\} = 6,7423 + 0,00543 - 0,0109 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x'_i\} = 6,74771 - 0,00547 = [6,74224] = 6,742. \end{aligned} \quad (65)$$

Ниже, на рис. 8, приведены графики погрешностей обработки данных после переноса запятой вправо на два знака при одинаковом количестве значащих цифр. Прямая AB представляет собой график аддитивной составляющей погрешности, описываемый УЧЗ

$$\{\Delta_{xa1i}\} = \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U_{\text{ч}}\} - \{\Delta U_{\text{пi}}\}}{\Delta U_{32}} = 5 \cdot \frac{0,6 - \{\Delta U_{\text{пi}}\}}{551,9} \text{ при } -0,9 \leq \{\Delta U_{\text{пi}}\} \leq 0, \quad (66)$$

прямая CD — график мультипликативной составляющей, описываемый УЧЗ

$$\{\Delta_{xm1i}\} = \{x_0\} \cdot k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{31}\} - \{\Delta U_{\text{пi}}\}}{\Delta U_{32} - \{\Delta U_{\text{пi}}\}} = 5 \cdot 1,3485 \cdot \frac{0,9 - \{\Delta U_{\text{пi}}\}}{551,9 - \{\Delta U_{\text{пi}}\}} \text{ при } -0,9 \leq \{\Delta U_{\text{пi}}\} \leq 0, \quad (67)$$

прямая GF — график суммарной составляющей погрешности, описываемый УЧЗ

$$\{\Delta_{x\Sigma 1i}\} = \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U_{ч1}\} + \{\Delta U_{пi}\}}{\Delta U_{32}} + \{x_0\} \cdot k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{з1}\} + \{\Delta U_{пi}\}}{\Delta U_{32} + \{\Delta U_{пi}\}} = 5 \cdot \frac{0,6 + \{\Delta U_{пi}\}}{551,9} + 5 \cdot k_x \cdot \frac{0,9 + \{\Delta U_{пi}\}}{551,9 + \{\Delta U_{пi}\}}. \quad (68)$$

При $\{\Delta U_{пi}\} = 0$ $\{\Delta_{xa1}\} = 0,0054$, $\{\Delta_{xm1}\} = 0,011$, а $\{\Delta_{x\Sigma 1}\} = -0,0055$.

Как видно из графических построений, результат обработки занижен, так как превалирует мультипликативная составляющая погрешности.

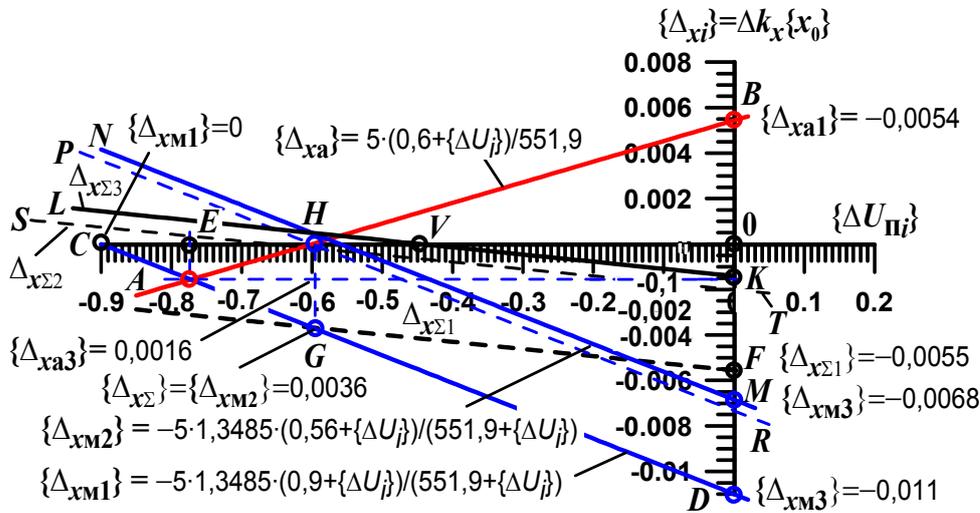


Рис. 8. Графики погрешностей обработки данных после переноса запятой вправо на два знака и уточнения базового значения варианты объединения

В точке G прямая GF при $\{\Delta U_{п}\} = -0,6$ не проходит через нуль. Она смещена вниз на $0,0037$ ($\{\Delta_{x\Sigma 1}\}_{\{\Delta U_{п}\}=-0,6} = -\lceil 0,00367 \rceil = -0,0037$). Для исключения занижения результата вводится поправка, равная $\{\Delta U_{п}\} = -0,6$, в УЧЗ мультипликативной составляющей погрешности, и строится прямая PR , характеризующая мультипликативную составляющую погрешности с учетом поправки.

Прямая PR описывается УЧЗ

$$\{\Delta_{xm2i}\} = \{x_0\} \cdot k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{з2}\} - \{\Delta U_{пi}\}}{\Delta U_{32} - \{\Delta U_{пi}\}} = 5 \cdot 1,3485 \cdot \frac{0,6 - \{\Delta U_{пi}\}}{551,9 - \{\Delta U_{пi}\}} \text{ при } -0,9 \leq \{\Delta U_{пi}\} \leq 0. \quad (69)$$

С учетом (66) и (69), строится график суммарной погрешности (см. рис. 8, прямая ST).

Как видно из графических построений, при $\{\Delta U_{п}\} = -0,6$, суммарная погрешность, описываемая УЧЗ

$$\{\Delta_{x\Sigma 2}\} = 5 \cdot (0,6 + \{\Delta U_{пi}\}) / 551,9 - 5 \cdot 1,3485 \cdot (0,6 + \{\Delta U_{пi}\}) / (551,9 + \{\Delta U_{пi}\}), \quad (70)$$

имеет разные значения и знак в начале и в конце диапазона значений поправок (приращений) (см. на рис. 8 пунктирную линию ST на концах диапазона значений $\Delta U_{пi}$).

Для получения одинаковых по модулю верхней и нижней границ доверительного интервала, сместим прямую PR вверх до совпадения с прямой NM , которая характеризует мультипликативную составляющую с уменьшенным на $0,04$ (до $\{\Delta U_{з3}\} = 0,56$) дробной частью знаменателя варианты и описывается УЧЗ

$$\{\Delta_{xm2}\} = -5 \cdot 1,3485 \cdot (0,56 + \{\Delta U_{пi}\}) / (551,9 + \{\Delta U_{пi}\}). \quad (71)$$

В (71) значение $\{\Delta U_{з3}\} = 0,56$ определяется путем решения равенства

$$\{\Delta_{xm2i}\} = -\{x_0\} \cdot k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{пi}\}}{\Delta U_{32}} = -5 \cdot 1,3485 \cdot \frac{\{\Delta U_{пi}\}}{551,9} = -0,0068, \quad (72)$$

которое имеет место при

$$\{\Delta U_{пi}\} = -0,0068 \cdot \frac{551,9}{5 \cdot 1,3485} = -0,56. \quad (73)$$

При этом график суммарной погрешности описывается УЧЗ

$$\{\Delta_{x\Sigma 2}\} = 5 \cdot (0,6 + \{\Delta U_{пi}\}) / 551,9 - 5 \cdot 1,3485 \cdot (0,56 + \{\Delta U_{пi}\}) / (551,9 + \{\Delta U_{пi}\}). \quad (74)$$

Убедимся, что в данном случае значения границ равны по модулю. Подставим в (72) значения $\{\Delta U_{п}\} = -0,9$ и $\{\Delta U_{п}\} = 0$. В результате получим, соответственно:

$$\begin{aligned} \{\Delta'_{x\Sigma 2}\} &= 5 \cdot (0,6 - 0,9) / 551,9 - 5 \cdot 1,3485 \cdot (0,56 - 0,9) / (551,9 - 0,9) = \\ &= 5 \cdot (-0,3) / 551,9 - 5 \cdot 1,3485 \cdot (-0,3) / 551 = -0,00272 + 0,00416 = \lceil 0,00144 \rceil = 0,0015 \end{aligned} \quad (75)$$

и

$$\{\Delta''_{x\Sigma 2}\} = 5 \cdot 0,6 / 551,9 - 5 \cdot 1,3485 \cdot 0,56 / 551,9 = 0,00543 - 0,00684 = -\lceil 0,00141 \rceil = -0,0015. \quad (76)$$

Как видно из рис. 8, график суммарной погрешности (см. рис. 8, прямая *LK*) проходит через нуль в точке *V*, соответствующей $\{\Delta U_{\Pi}\} = -0,45$. В диапазоне $-0,9 \leq \{\Delta U_{\Pi}\} \leq 0$ максимальное значение суммарной погрешности не превышает $-0,0015 < \{\Delta_{x22}\} < 0,0015$. Следовательно, эти значения можно принять за границы доверительного интервала.

Смещение графика суммарной погрешности или графика мультипликативной составляющей, при $\{\Delta U_{\Pi}\} = 0,6$, равно

$$\begin{aligned} \{\Delta_{x2i}\} &= \{x_0\} \cdot k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{32}\} - \{\Delta U_{\Pi i}\}}{\Delta U_{32} - \{\Delta U_{\Pi i}\}} - \{x_0\} \cdot k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{31}\} - \{\Delta U_{\Pi i}\}}{\Delta U_{32} - \{\Delta U_{\Pi i}\}} = -5 \cdot 1,3485 \cdot \frac{0,56 - \{\Delta U_{\Pi i}\}}{551,9 - \{\Delta U_{\Pi i}\}} + \\ &+ 5 \cdot 1,3485 \cdot \frac{0,6 - \{\Delta U_{\Pi i}\}}{551,9 - \{\Delta U_{\Pi i}\}} = 5 \cdot 1,3485 \cdot \frac{0,6 - 0,56}{551,9 - 0,56} = [0,000489] = 0,0005. \end{aligned} \quad (77)$$

Результат обработки данных с сомнительной цифрой в третьем знаке после запятой может быть записан, с учетом смещения (77), в виде

$$\{x'_i\} = 6,74224 + 0,0005 \pm 0,0015 = [6,74274] \pm 0,0015 = 6,743 \pm 0,0015. \quad (78)$$

Округлив полученный результат до третьего знака после запятой, который является сомнительным, окончательно получим, что, в зависимости от способа округления (до “пола” или до “потолка”):

$$\{x'_i\} = 6,743 \pm [0,0015] = 6,743 \pm 0,001 \quad (79)$$

или

$$\{x'_i\} = 6,743 \pm [0,0015] = 6,743 \pm 0,002. \quad (80)$$

В рассматриваемом случае сомнительная цифра младшего разряда изменяется в пределах от 1 до 3-х или от 0 до 4-х, а результат вычислений — от 6,742 до 6,744 и от 6,741 до 6,745 соответственно.

Пример 2. Предположим, что в результате измерительного преобразования трех физических величин: $U'_1(x_0) = 11,335$ В, $U'_2(x_i) = 13,252$ В и $\{U'_3(x_i + x_0)\} = 18,771$ В все цифры являются верными и одинаково их количество в числителе и знаменателе одинаково. Запишем УЧЗ искомой физической величины в виде

$$\{x'_i\} = \{x_0\} k'_{x1} = k_x \cdot \frac{\{U_3\} - \{U_1\}}{\{U_3\} - \{U_2\}} = 5 \cdot \frac{18,771 - 11,335}{18,771 - 13,252} \Rightarrow \{x'_i\} = 5 \cdot \frac{18771 - 11335}{18771 - 13252} \Rightarrow \{x'_i\} = k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{31}\}}{\{\Delta U_{32}\}} = 5 \cdot \frac{7436}{5519}. \quad (81)$$

Рассмотрим случай изменения дробной части данных числителя и знаменателя УЧЗ варианты при изменении числителя и знаменателя варианты в диапазоне значений $-0,25 \leq \{\Delta U_{\Pi i}\} \leq 0,25$. Тогда УЧЗ примет вид:

$$\{x''_i\} = k_x \cdot \frac{\{\Delta U_{31}\} \pm \{\Delta U_{\Pi i}\}}{\{\Delta U_{32}\} \pm \{\Delta U_{\Pi i}\}} = 5 \cdot \frac{7436 \pm 0,25}{5519 \pm 0,25}. \quad (82)$$

Приведем соответствующие графические построения, для возможных погрешностей обработки исходных (см. рис. 9). Как видно из приведенного рисунка, шкала значений по осям координат уменьшилась на порядок по сравнению с предыдущим примером (см. рис. 8). На рис. 9 прямая *CD* характеризует изменения аддитивной составляющей погрешности, прямая *AB* — мультипликативной, а прямая *EF* — изменения суммарной погрешности.

Графики погрешностей практически линейные. Для указанного диапазона изменения $\Delta U_{\Pi i}$ максимальное значение аддитивной составляющей погрешности составило $\{\Delta_{xa1}\} = \pm 0,00023$, а мультипликативной — $\{\Delta_{xa1}\} = \pm 0,0003$. Практически все графики проходят через нуль. Приведенные графики построены с учетом УЧЗ искомой физической величины

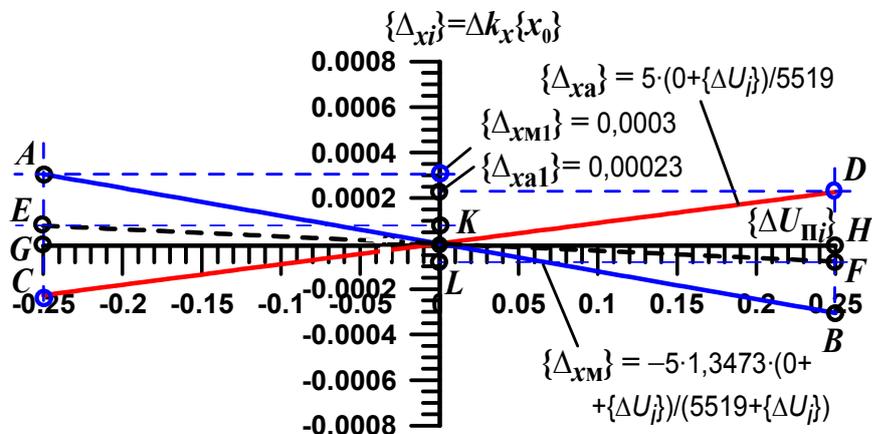


Рис. 9. Графики погрешностей обработки данных после переноса запятой вправо на три знака и уточнения базового значения варианты объединения

$$\{x_i^n\} = 5 \cdot \frac{7436}{5519} + 5 \cdot \frac{\pm 0,25}{5519} - 5 \cdot \frac{7436}{5519} \cdot \frac{\pm 0,25}{5519}, \quad (83)$$

записанного через базовое значение варианты и погрешности ее определения.

В результате вычислений получим

$$\begin{aligned} \{x_i^n\} &= 6,73673 \pm 0,00023 \mp 0,00030 \Rightarrow \{x_i^n\} = [6,73673] \mp [0,00007] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x_i^n\} = [6,73666] \pm 0,0001 \Rightarrow \{x_i^n\} = 6,7367 \pm 0,0001. \end{aligned} \quad (84)$$

Как видно из (84) и рис. 9, результирующая погрешность обработки данных не превышает 0,0001 в диапазоне значений $-0,25 \leq \{\Delta U_{pi}\} \leq 0,25$. В этом случае можно принять полученный результат обработки исходных данных за верный или округлить его до третьего верного знака после запятой.

Окончательно получим (при $k_{x0} = 1,34735$):

$$\{x_i^n\} = [6,7367] \pm [0,0001] = 6,737 \pm 0,001. \quad (85)$$

В формализованном виде весь процесс обработки можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \{x_i'\} &= \{x_0\}k'_{x1} = 5 \cdot \frac{18,771-11,335}{18,771-13,252} \Rightarrow \{x_i'\} = 5 \cdot \frac{18771-11335}{18771-13252} \Rightarrow \{x_i'\} = 5 \cdot \frac{7436}{5519} \Rightarrow \{x_i^n\} = 5 \cdot \frac{7436 \pm 0,25}{5519 \pm 0,25} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x_i^n\} = 5 \cdot \frac{7436}{5519} + 5 \cdot \frac{\pm 0,25}{5519} - 5 \cdot \frac{7436}{5519} \cdot \frac{\pm 0,25}{5519} \Rightarrow \{x_i^n\} = 6,73673 \pm 0,00023 \mp 0,00030 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{x_i^n\} = [6,73673] \mp [0,00007] \Rightarrow \{x_i^n\} = [6,73666] \pm 0,0001 \Rightarrow \{x_i^n\} = 6,7367 \pm 0,0001. \end{aligned} \quad (86)$$

Следовательно, в диапазоне значений $-0,25 \leq \{\Delta U_{pi}\} \leq 0,25$ поправок (приращений или помех) дробной части числителя и знаменателя, результат обработки, при округлении (до "потолка") до одной тысячной, не превысит $\{x_i^n\} = [6,7367] \pm [0,0001] = 6,737 \pm 0,001$.

В заключение отметим, что при многократных измерительных преобразованиях рядов физических величин результаты обработки округленных данных по УЧЗ следует представлять с указанием одной и той же верхней и нижней границ полосы неопределенности. Только после этого осуществляется их статистическая обработка. Например, в результате усреднения округленных до третьего десятичного знака после запятой результатов измерительного преобразования физических величин получили: $\{U_1'(x_0)\} = 11,335 \pm 0,001$, $\{U_2'(x_i)\} = 13,252 \pm 0,001$ и $\{U_3'(x_i + x_0)\} = 18,771 \pm 0,001$. Тогда, в формализованном виде, процедура получения и записи конечного результата примет вид:

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= (\{x_0\} \pm \{\Delta_{пн0}\}) \cdot \frac{(\{U_3'(x_i + x_0)\} \pm \{\Delta_{пн1}\}) - (\{U_1'(x_0)\} \pm \{\Delta_{пн1}\})}{(\{U_3'(x_i + x_0)\} \pm \{\Delta_{пн1}\}) - (\{U_1'(x_0)\} \pm \{\Delta_{пн1}\})} = \\ &= (\{x_0\} \pm \{\Delta_{пн0}\}) \cdot \frac{(\{U_3'(x_i + x_0)\} - \{U_1'(x_0)\}) \pm \{\Delta_{пн1}\}}{(\{U_3'(x_i + x_0)\} - \{U_1'(x_0)\}) \pm \{\Delta_{пн1}\}} = \\ &= (\{x_0\} \pm \{\Delta_{пн0}\}) \cdot \frac{\{U_{31}'\} \pm \{\Delta_{пн1}\}}{\{U_{32}'\} \pm \{\Delta_{пн1}\}} = (\{x_0\} \pm \{\Delta_{пн0}\}) \cdot \frac{\{U_{31}'\}}{\{U_{32}'\}} \pm \{\Delta_{пн2}\} \end{aligned} \quad (87)$$

Подставив в (87) исходные данные, получим:

$$\begin{aligned} \{x_i\} &= (5 \pm 0,0001) \cdot \frac{(18,771 \pm 0,001) - (11,335 \pm 0,001)}{(18,771 \pm 0,001) - (13,252 \pm 0,001)} = (5 \pm 0,0001) \cdot \frac{(18,771 - 11,335) \pm 0,001}{(18,771 - 13,252) \pm 0,001} = \\ &= (5 \pm 0,0001) \cdot \frac{7,436 \pm 0,001}{5,519 \pm 0,001} = (5 \pm 0,0001) \cdot \left[\frac{7,436}{5,519} \pm 0,0001 \right] = \\ &= 5 \cdot \frac{7,436}{5,519} \pm 0,0001 \cdot \frac{7,436}{5,519} + (5 \pm 0,0001) \cdot 0,0001 = 5 \cdot \frac{7,436}{5,519} \pm [0,000135] + [0,0005] \pm 1 \cdot 10^{-8} = \\ &\approx 6,737 \pm (0,001 + 0,001) = 6,737 \pm 0,002. \end{aligned} \quad (88)$$

При статистической обработке результатов многократных измерительных преобразований физической величины в каждом такте, следует их значения представлять с одной и той же полосой неопределенности.

Выводы

1. Дальнейшее развитие получили философские аспекты структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. С учетом специфики (сверх)избыточных измерений, дано более общее определение понятию «поправка» и определение понятию «эффективность вычислений».

2. Предложено два подхода к повышению точности машинной обработки округленных результатов измерительного преобразования физических величин: — без и с использованием структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений.

3. Показано, что задача повышения точности обработки округленных данных разрешима только для

методов избыточных и сверхизбыточных измерений.

4. В основу нового подхода к обработке и представлению округленных данных положено обратное утверждение: «если результат статистической обработки данных представлен в виде среднего значения с указанием симметричных (верхней и нижней) границ полосы неопределенности, то исходная выборка данных представляется статистически достоверной, а их значения распределены по нормальному закону.

5. Применительно к теории структурного анализа сформулировано два определения принципа вариантности. Так, например, согласно первому, результат обработки округленных и нормированных по количеству разрядов данных может быть представлен через базовую варианту, аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности ее определения в том, и только в том случае, если уравнение избыточных или сверхизбыточных измерений по своей структуре можно привести к виду дробно-линейной функции.

6. Описано и дана математическая интерпретация семи новым свойствам уравнений (сверх)избыточных измерений и соответствующих уравнений числовых значений, представляющих собой дробно-линейную функцию, что дало возможность создать новую методологию обработки округленных данных, получаемых при (сверх)избыточных измерениях.

7. На основе свойств дробно-линейных функций выведено УЧЗ варианты k'_x , как функция от значений целой и дробной частей данных числителя и знаменателя, что позволило по-новому решить задачу повышения точности обработки приближенных данных.

8. Впервые в мире разработана общая методология повышения точности обработки округленных результатов измерительного преобразования рядов физических величин по уравнениям числовых значений, что обогатило наши представления о возможностях повышения точности обработки данных при избыточных измерениях.

9. Обработка округленных данных по априори определенному уравнению числовых значений, полученному из уравнения (сверх)избыточных измерений, приводит к завышению или занижению значения конечного результата измерений в зависимости от соотношения значений аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности определения базового значения варианты и от неучтенного количества сомнительных цифр после запятой.

10. Установлено, что результат вычисления значения искомой физической величины может быть представлен в виде произведения нормированного значения физической величины (меры) на базовое значение варианты и на аддитивную и мультипликативную составляющие погрешностей ее определения.

11. Доказана возможность повышения точности обработки округленных данных за счет повышения точности определения базового значения варианты путем введения поправок в результаты вычислений по УЧЗ.

12. Показано, что графики аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности определения базового значения варианты практически имеют линейный характер, но при больших значениях поправки — параболический. Аддитивная составляющая убывает, а мультипликативная — возрастает с уменьшением значения поправки в пределах младшего десятичного разряда.

13. Установлено, что мультипликативная составляющая погрешности обработки данных всегда отрицательна и является «противовесом» к аддитивной составляющей. При определенных значениях поправки графики аддитивной и мультипликативной составляющих пересекаются, т.е. значения аддитивной и мультипликативной составляющих становятся равными между собой.

14. Предложено устанавливать значение конечного результата обработки данных по базовому значению варианты, а верхнюю (со знаком плюс) и нижнюю (со знаком минус) границы полосы неопределенности конечного результата устанавливать по значениям аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности определения базового значения варианты.

15. Установлено, что погрешность, не превышающая половины единицы младшего десятичного разряда обеспечивает определение значения округленного результата с вероятностью, не меньшей $P = 0,95$.

16. Повышение точности определения базового значения варианты, а, следовательно, и результата избыточных измерений, связано с корректным разграничением верных и сомнительных цифр в обрабатываемых данных.

17. Одним из приемов повышения точности получения базового значения варианты является перенос запятой вправо до первой сомнительной цифры данных, используемых для определения оптимального значения варианты.

18. Установлено, что округленные данные должны иметь одинаковое число значащих цифр, что обеспечивает большую точность обработки.

19. Показано, что необходимо бороться не с сомнительными цифрами исходных данных, а повышать точность определения верных цифр целочисленных разностей данных в числителе и знаменателе УЧЗ.

20. Рекомендуется вычислять базовое значение варианты с точностью на 1–2 десятичных разряда большей точности воспроизведения нормированной по значению физической величины.

21. Установлено, что некорректное округление данных приводит к погрешности вычисления от 0,1% до 4,0%.

22. Предлагается конституированное УЧЗ записывать через оптимальное базовое значение варианты и ее погрешности, что обеспечит получение более достоверных результатов обработки округленных данных.

23. При многократных измерительных преобразованиях физических величин результаты обработки округленных данных по УЧЗ следует представлять с указанием одних и тех же значений границ полосы

неопределенности и только после этого производить их статистическую обработку.

24. Дальнейшее развитие описанной методологии связано с исследованиями разновидностей уравнений (сверх)избыточных измерений и соответствующих уравнений числовых значений при нелинейных функциях преобразования измерительного канала.

Литература

1. Кондратов В.Т. Фундаментальная метрология: Теория структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. Сообщение 1 / В.Т.Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2016. — №1. — С. 17 – 26.

2. Кондратов В.Т. Фундаментальная метрология: Теория структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. Сообщение 2 / В.Т.Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2016. — №2. — С. 7 – 22.

3. Кондратов В.Т. Фундаментальная метрология: Теория структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. Сообщение 3 / В.Т.Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2016. — №3. — С. 7 – 26.

4. Глоссарий системного подхода. Режим доступа: <http://kinsmark.com/index.php/syspod>.

5. Общесистемные законы в ОТС(У). Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B5%D0%B2_%D0%AE%D0%BD%D0%B8%D1%80_%D0%90%D0%B1%D0%B4%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87.

6. Словарь лингвистических терминов Т.В.Жеребило. Системных преобразований закон это Режим доступа: http://lingvistics_dictionary.academic.ru/3613/%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%B7%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD

7. Метрология в вопросах и ответах: Учебное пособие. Режим доступа: http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/987/25987/8882?p_page=8.

8. Загадки округления. Режим доступа: <http://www.interface.ru/home.asp?artId=19535>).

References

1. Kondratov V.T. Fundamentalnaja metrologija: Teorija struktornogo analiza uravnenij izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij. Soobschenie 1 / V.T.Kondratov // Vymiryuvalna ta obchislyuvalna tekhnika v tekhnologichnykh prozesakh. — 2016. — №1. — S. 17 – 26.

2. Kondratov V.T. Fundamentalnaja metrologija: Teorija struktornogo analiza uravnenij izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij. Soobschenie 2 / V.T.Kondratov // Vymiryuvalna ta obchislyuvalna tekhnika v tekhnologichnykh prozesakh. — 2016. — №2. — S. 7 – 22.

3. Kondratov V.T. Fundamentalnaja metrologija: Teorija struktornogo analiza uravnenij izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmerenij. Soobschenie 3 / V.T.Kondratov // Vymiryuvalna ta obchislyuvalna tekhnika v tekhnologichnykh prozesakh. — 2016. — №3. — S. 7 – 26.

4. Glossarij sistemnogo podkhoda. Rezhim dostupa: <http://kinsmark.com/index.php/syspod>

5. Obschesistemnye zakony v OTS(U). Rezhim dostupa: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D1%80%D0%BC%D0%B0%D0%BD%D1%86%D0%B5%D0%B2_%D0%AE%D0%BD%D0%B8%D1%80_%D0%90%D0%B1%D0%B4%D1%83%D0%BB%D0%BB%D0%BE%D0%B2%D0%B8%D1%87.

6. Slovar lingvisticheskikh terminov T.V.Zherebilo. Sistemnykh preobrazovanij zakon eto Rezhim dostupa: http://lingvistics_dictionary.academic.ru/3613/%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%BD%D1%8B%D1%85_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BE%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%B7%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%BD

7. Metrologija v voprosakh i otvetakh: Uchebnoe posobie. Rezhim dostupa: http://window.edu.ru/catalog/pdf2txt/987/25987/8882?p_page=8.

8. Zagadki okruglenija. Rezhim dostupa: <http://www.interface.ru/home.asp?artId=19535>).

Рецензія/Peer review : 7.3.2017 р. Надрукована/Printed :9.3.2017 р.
Стаття рецензована редакційною колегією